

JEAN-PIERRE OLIVIER

**Changement de base dans la clôture intégrale par
morphismes absolument plats**

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1969-1970), exp. n° 7, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=STNB_1969-1970____A7_0

© Université Bordeaux 1, 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHANGEMENT DE BASE DANS LA CLOTURE INTEGRALE
PAR MORPHISMES ABSOLUMENT PLATS

par

Jean-Pierre OLIVIER

-:-:-:-:-

Nous désignons par ANN la catégorie des anneaux commutatifs
si $f: A \rightarrow B$ est un morphisme de ANN , nous notons ∇_f (adlet indice f)
la "codiagonale" $B \otimes_A B \rightarrow B$.

DEFINITION [5]. - Soit f un morphisme de ANN . Nous dirons que f
est abosument plat si f et ∇_f sont plats.

La classe des morphismes absolument plats est stable par change-
ment de base [4].

PROPOSITION 1 : Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de ANN et soit M un B -module. Notons $\otimes_A M$ le foncteur de $\text{Mod } B$ dans $\text{Mod}(B \otimes_A B)$ qui au B -module N fait correspondre le $B \otimes_A B$ module $N \otimes_A M$ (la structure étant définie par $b \otimes c \cdot x \otimes y = bx \otimes yc$). On a : $\nabla_f^* \circ (\otimes_A M) = \otimes_B M$.

Démonstration :

Soient N et P deux B -modules et soit g une application Z -linéaire de $N \otimes_A M$ dans P . Alors g est ∇_f linéaire si et seulement si $g \circ i$ (où i est l'application A -bilinéaire canonique de $N \times M$ dans $N \otimes_A M$) est B -bilinéaire.

En effet, $g(b \otimes c, x \otimes y) = bc g(x \otimes y)$
 équivaut à $g \circ i(bx, cy) = bc g \circ i(x, y)$.

COROLLAIRE 1. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme tel que ∇_f soit plat et soit M un B -module. Alors si M est plat sur A il est plat sur B .

COROLLAIRE 2. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme absolument plat, alors pour tout B -module M on a : $\text{Wd}_A(M) \geq \text{Wd}_B(M)$.

COROLLAIRE 3. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme absolument plat. Alors :

- i) Si A est un anneau absolument plat [1], B est un anneau absolument plat,
- ii) Si A est un anneau arithmétique [2] réduit, B est un anneau arithmétique réduit,
- iii) Si A est semi-héréditaire, B est semi-héréditaire,
- iv) Si A est cohérent, B est cohérent.

Démonstration :

- i) Un anneau A est absolument plat est par définition un anneau tel que $Wd A = 0$.
- ii) Un anneau A est arithmétique réduit si et seulement si $Wd A \leq 1$.
- iii) Un anneau A est semi-héréditaire si et seulement si $Wd A \leq 1$ et son anneau total des fractions est absolument plat ([3] et [7]).
- iv) Un anneau cohérent est un anneau tel que tout produit de plats est plat.

Rappelons ([7]) qu'un anneau semi-héréditaire est intégralement clos dans son anneau total des fractions.

PROPOSITION 2. - Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de ANN. Alors A est intégralement fermé dans B si et seulement si il existe un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\quad} & K \end{array}$$

où V est semi-héréditaire et K est l'anneau total des fractions de V .

Démonstration : On utilise la terminologie de [2]. En utilisant [2] et [8] on remarque que " A est un sous-anneau paravaluatif de B si et seulement si il existe un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\quad} & K \end{array}$$

où V est un sous-anneau de valuation de K ". D'autre part, si A est intégralement fermé dans B , A est l'intersection des sous-anneaux paravaluatifs de B contenant A (cf. [2] et [8]). Soit alors A un sous-anneau de B

intégralement fermé dans B et $\underline{C}$ l'ensemble des sous-anneaux paravaluatifs de B contenant A . Pour tout $C \in \underline{C}$,

choisissons un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\quad} & V_c \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\quad} & K_c \end{array}$$

où V_c est un anneau de valuation de corps des fractions K_c . Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & \pi V_c \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\quad} & \pi K_c \end{array}$$

est cartésien, $V = \pi V_c$ est semi-héréditaire d'anneau total des fractions πK_c .

La proposition que nous avons en vue est une simple application des résultats précédents.

PROPOSITION 3. - Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme absolument plat, et soit $g : A \rightarrow C$ un morphisme de ANN. Si A' est la fermeture intégrale de A dans C , $A' \otimes_A B$ est la fermeture intégrale de B dans $C \otimes_A B$.

Démonstration : Puisque la classe des morphismes absolument plats est stable par changement de base, il suffit de démontrer que si A est intégralement fermé dans C alors B est intégralement fermé dans $C \otimes_A B$. On utilise alors la proposition précédente, le corollaire 3 de la proposition 1 et le fait qu'un morphisme plat conserve les carrés cartésiens.

Cette proposition généralise E.G.A.IV 18-12-15.

COROLLAIRE. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme absolument plat. Si A est intègre intégralement clos et si B est connexe alors B est intègre intégralement clos.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI - Algèbre commutative ; chap. 1 : modules plats ;
ex. 17, §.2 .
- [2] N. BOURBAKI - Algèbre commutative ; chap. 6 : valuations ; ex.8, §.1.
- [3] S. ENDO - On semi-hereditary rings ; J. Math. Soc. Japan, 13, n^o2, 1961.
- [4] D. FERRAND - Epimorphismes d'anneaux et algèbres séparables. C.R.
Acad. Sc. Paris, t.265 (9 Octobre 1967) p.411-414.
- [5] D. FERRAND - Thèse (en préparation) + communications orales.
- [6] A. GROTHENDIECK - Eléments de géométrie algébrique (E. G. A.).
- [7] J. MAROT - Extensions de la notion d'anneau de valuation. Département
de Mathématiques - Faculté des Sciences de Brest - 29 - Brest.
- [8] P. SAMUEL - La notion de place dans un anneau. Bull. Soc. Math. France,
85, 1957, p.123 à 133.
- [9] Chr. U. JENSEN - A remark on arithmetical rings. Proceed. Amer.
Math. Soc., vol. 15, n^o6, december 1964, p.951-954.

-:-:-:-:-