SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

JEAN-LOUIS NICOLAS

Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1969-1970), exp. nº 13, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1969-1970____A13_0>

© Université Bordeaux 1, 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REPARTITION DES NOMBRES HAUTEMENT COMPOSES DE RAMANUJAN

par

Jean-Louis NICOLAS (1)

-:-:-:-

1. INTRODUCTION. On dit qu'un nombre entier A est hautement composé si tout nombre M plus petit que A a moins de diviseurs que A. Si l'on définit $d(n)$ = nombre de diviseurs de n, on sait que, si la décomposition en facteurs premiers de n est :

$$n = \prod_i p_i^{a_i} \quad , \quad \text{on a} \quad : \quad d(n) = \prod_i (a_i + 1) \; .$$

La définition devient : A est hautement composé si et seulement si :

$$(1) \qquad M < A \Longrightarrow d(M) < d(A) \; .$$

S. RAMANUJAN (8) a défini et étudié les nombres hautement composés, démontrant les propriétés suivantes :

- Si $A = 2^{a_2} 3^{a_3} \dots p_k^{a_{p_k}}$ est un nombre hautement composé, on a :

$$(2) \qquad a_2 \geqslant a_3 \geqslant \dots \geqslant a_{p_k}$$

et à l'exception de $A = 4$ et $A = 36$, on a : $a_{p_k} = 1$ ([8], § 8) .

- Soit $p = p_k$ le plus grand nombre premier divisant A, soit λ un nombre premier plus petit que p, S. RAMANUJAN donne des formules permettant de déterminer a_λ à une unité près lorsque λ est grand, et donnant un équivalent de a_λ lorsque λ est petit ([8],§ 18 à 24).

- Le quotient de deux nombres hautement composés consécutifs tend vers 1, et $Q(X)$, le nombre de nombres hautement composés inférieurs à X, vérifie : ([8], § 28)

$$(3) \qquad \lim_{X \to \infty} \frac{Q(X)}{\log X} = + \infty$$

---

(1) L'auteur de cet article a reçu l'octroi n° A 7201 du Conseil National de recherches du Canada.

- Enfin, S. RAMANUJAN définit les nombres hautement composés supérieurs ([8], §32) dont nous rappelons la définition et les propriétés un peut plus loin et qui sont à la base des résultats obtenus dans cet article.

En utilisant principalement le résultat de A.E. INGHAM ([4]) affirmant que pour $\frac{5}{8} \leqslant \tau \leqslant 1$, on a :

(4) $$\pi(x + x^{\tau}) - \pi(x) \sim \frac{x^{\tau}}{\log x}$$

où $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à x, P. ERDÖS et L. ALAOGLU ont donné ([1], théorème 13) une formule permettant de déterminer a_{λ} à une unité près quel que soit λ, et P. ERDÖS a amélioré la formule (3) en montrant ([2]) :

(5) $$Q(X) \geqslant (\log X)^{1+c}$$

avec $c = \frac{1 - \tau}{4} = \frac{3}{32}$.

L'objet de cet article est d'étudier la répartition des nombres hautement composés entre deux nombres hautement composés supérieurs consécutifs. Nous montrerons que ce problème est lié à celui des approximations diophantiennes du nombre $\theta = \frac{\log 3/2}{\log 2}$ et plus précisément à l'étude des formes linéaires à coefficients entiers $\sum u_k \theta_k$, avec $\theta_k = \frac{\log(1 + \frac{1}{k})}{\log 2}$

Le récent théorème de N. FELDMANN ([3]) améliorant les travaux de A. BAKER sur les formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques, nous dit qu'il existe des constantes c et κ telles que l'on ait : $|q\theta - p| > \frac{c}{q^{\kappa}}$ pour tous p, q entiers. Cela nous permettra de montrer que: $Q(X) \leqslant (\log X)^{c'}$ (théorème 4)

Nous améliorerons les résultats de P. ERDÖS et L. ALAOGLU sur le calcul des exposants a_{λ} (théorème 2) et nous augmenterons légèrement la constante c de la formule (5). Finalement nous conjecturons que:

$$\lim_{X \to \infty} \frac{\log Q(X)}{\log \log X} = 1 + \frac{\log 3/2 + \log 5/4}{4 \log 2} = 1.277\ldots$$

2. NOMBRES HAUTEMENT COMPOSES SUPERIEURS.

On dit que N est un nombre hautement composé supérieur s'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$, tel que, pour tout M entier, on ait:

$$\frac{d(M)}{M^{\varepsilon}} \leqslant \frac{d(N)}{N^{\varepsilon}}$$

Propriétés: ([8], §32 à 34). ε étant donné, $0 < \varepsilon < 1$, il existe un nombre hautement composé supérieur associé à ε dont la décomposition en facteurs premiers, $N = \prod \lambda^{a_\lambda}$ est donnée par:

(6) $$a_\lambda = \left[\frac{1}{\lambda^{\varepsilon} - 1}\right] = \text{partie entière de } \frac{1}{\lambda^{\varepsilon} - 1}$$

On attache à $N = N_\varepsilon$ les nombres:

(7) $$x = 2^{1/\varepsilon} \quad \text{et} \quad x_k = x^{\frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log 2}}$$

On a alors:

(8) $$a_\lambda = k \iff x_{k+1} < \lambda \leqslant x_k$$

Soit $p \leqslant x < P$ les nombres premiers encadrant x. Le plus grand nombre premier qui divise N est p et le nombre hautement composé supérieur suivant N est inférieur ou égal à NP.

Proposition 1. <u>Soit $N = N_\varepsilon$ un nombre hautement composé supérieur. Soit r/s une fraction irréductible telle que s divise N. On note $v_\lambda(n)$ l'exposant de λ dans la décomposition en facteurs premiers de n. On a alors, λ et μ étant premiers, et a_λ et a_μ étant déterminés par (6):</u>

$$\log d(\tfrac{r}{s} N) - \log d(N) = \varepsilon \log \frac{r}{s} - \sum_{\lambda | r} v_\lambda(r)(\varepsilon \log \lambda - \log(1 + \frac{1}{a_\lambda + 1}))$$

$$- \sum_{\mu | s} v_\mu(s)(\log(1 + \frac{1}{a_\mu}) - \varepsilon \log \mu) - \sum_{\lambda | r} \log U_\lambda - \sum_{\mu | s} \log V_\mu$$

<u>les nombres</u> U_λ <u>et</u> V_μ <u>vérifiant</u>: $U_\lambda \geqslant 1$ <u>et</u> $V_\mu \geqslant 1$ <u>avec égalité lorsque</u> $v_\lambda(r) = 1$ <u>et</u> $v_\mu(s) = 1$

Démonstration: En raison de l'additivité des fonctions $\log d(n)$ et $\log n$, il suffit de vérifier cette formule pour $r = \lambda^k$, $s = 1$ puis pour $r = 1$, $s = \mu^k$.

Si $r = \lambda^k$, $s = 1$, posons $a_\lambda = a$, la formule nous permet de calculer U_λ:

$$\log d(\tfrac{r}{s} N) - \log d(N) = \log \frac{a+k+1}{a+1} = \varepsilon k \log \lambda - k(\varepsilon \log \lambda - \log(1 + \frac{1}{a+1})) - \log U_\lambda$$

d'où il vient:

$$(9) \qquad U_\lambda = \frac{a+1}{a+1+k} \left(\frac{a+2}{a+1}\right)^k = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{a+i}{a+i+1}\right)\left(\frac{a+2}{a+1}\right)$$

Pour $k = 1$, on a : $U_\lambda = 1$ et pour $i \geqslant 2$, $\frac{a+i+1}{a+i} < \frac{a+2}{a+1}$ d'où il vient: $U_\lambda > 1$ si $k \geqslant 2$

Si $r = 1$, $s = \mu^k$, on calcule de même V_μ :

$$(10) \qquad V_\mu = \frac{a+1}{a+1-k} \left(\frac{a}{a+1}\right)^k = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{a+2-i}{a+1-i}\right) \left(\frac{a}{a+1}\right)$$

On trouve de même: pour $k = 1$, $V_\mu = 1$ et pour $k > 1$, $V_\mu > 1$.

<u>Définition</u>: <u>Soit</u> $N = N_\varepsilon$ <u>un nombre hautement composé supérieur. Soit</u> M <u>un entier que l'on écrit</u> : $M = \frac{r}{s} N$ <u>avec</u> r <u>et</u> s <u>premiers entre eux. On appelle bénéfice de</u> M <u>relatif à</u> N, <u>la quantité</u>:

$$(11) \qquad \text{bén } M = \sum_{\lambda | r} v_\lambda(r)(\varepsilon \log \lambda - \log(1 + \frac{1}{a_\lambda+1})) + \sum_{\lambda | r} \log U_\lambda$$

$$+ \sum_{\mu | s} v_\mu(s)(\log(1 + \frac{1}{a_\mu}) - \varepsilon \log \mu) + \sum_{\mu | s} \log V_\mu \quad .$$

La proposition 1 s'écrit alors :

$$(12) \qquad \varepsilon \log \frac{M}{N} = \log \frac{d(M)}{d(N)} + \text{bén } M$$

avec $\text{bén } M \geqslant 0$.

Proposition 2 . <u>Soit</u> A <u>un nombre hautement composé. Soit</u> M <u>et</u> M' <u>deux nombres tels que</u>: $d(M) \leqslant d(A) \leqslant d(M')$. <u>On a</u>:

$$\text{bén } A \leqslant \text{bén } M' + \log \frac{d(M')}{d(M)}$$

<u>Démonstration</u>: Le nombre A étant hautement composé, la relation (1) nous donne: $d(M') \geqslant d(A) \Longrightarrow M' \geqslant A$. La formule (12) nous donne:

$$\text{bén } A = \varepsilon \log \frac{A}{N} - \log \frac{d(A)}{d(N)} \leqslant \varepsilon \log \frac{M'}{N} - \log \frac{d(M)}{d(N)} = \text{bén } M' + \log \frac{d(M')}{d(M)}$$

Proposition 3 . <u>Soit</u> A <u>un nombre hautement composé. Soit</u> $N = N_\varepsilon$ <u>le nombre hautement composé supérieur précédant</u> A . <u>On a</u>: $\text{bén } A < \varepsilon + \log 2$.

<u>Démonstration</u>: Soit P le plus petit nombre premier ne divisant pas N . On sait que $N \leqslant A \leqslant NP$. La formule (11) nous donne:
$\text{bén } NP = \varepsilon \log P - \log 2$. Posant $x = 2^{1/\varepsilon}$, soit $\varepsilon = \frac{\log 2}{\log x}$, il vient :
$\text{bén } NP = \varepsilon \log \frac{P}{x} \leqslant \varepsilon \frac{P-x}{x}$. D'après le postulat de Bertrand, on a: $P - x \leqslant x$ donc:
$\text{bén } NP \leqslant \varepsilon$.

Ensuite, ou bien on a : $d(N) < d(A) \leqslant d(NP)$ et la proposition 2 nous dit: $\text{bén } A \leqslant \text{bén } NP + \log 2 \leqslant \varepsilon + \log 2$, ou bien on a: $d(NP) < d(A)$ et comme $A \leqslant NP$, la formule (12) nous dit: $\text{bén } A \leqslant \text{bén } NP \leqslant \varepsilon$.

<u>Calcul de bénéfices</u>. Soit $N = N_\varepsilon$ un nombre hautement composé supérieur. Soit k un entier fixé. On définit x et x_k par la formule (7).
Soit $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, les nombres premiers rangés par ordre croissant à partir de x_k . On choisit n tendant vers l'infini avec x et $n \leqslant \frac{x^\tau}{\log x}$ avec $\tau = 5/8$.
D'après la formule (4) de A.E. INGHAM on a $Q_n - x_k = O(x^\tau)$, et pour x assez grand $Q_n < x_{k-1}$, ce qui entraîne par (8) que l'exposant des Q_i dans la décomposition en facteurs premiers de N est (k-1) .
Posons $W_n = NQ_1 Q_2 \ldots Q_n$. On a par la formule (11):

$$\text{bén } W_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \log Q_i - \log(1 + \frac{1}{k}) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \log \frac{Q_i}{x_k}$$

Comme on a toujours $\frac{u-1}{u} \leqslant \log u \leqslant u - 1$, on obtient:

(13) $$\text{bén } W_n \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i - x_k}{x_k} \leqslant \frac{\varepsilon}{x_k} n(Q_n - x_k) \leqslant \frac{n \log 2}{x_k^{1-\tau} \log x}$$

et :

$$\text{bén } W_n \geqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i - x_k}{Q_i} \geqslant \frac{\varepsilon}{Q_n} \sum_{i=1}^{n} 2(i-1) = \frac{\varepsilon}{Q_n} (n^2 - n)$$

d'où il vient :

(14) $$\text{bén } W_n \gtrsim \frac{n^2 \log 2}{x_k \log x}$$

Soit, de la même façon $q_1, q_2, \ldots q_n$ les nombres premiers précédant x_k , rangés par ordre décroissant à partir de x_k . Dans les mêmes conditions, en posant $W'_n = \frac{N}{q_1 q_2 \cdots q_n}$, on obtient :

(15) $$\frac{n^2 \log 2}{x_k \log x} \lesssim \text{bén } W'_n \lesssim \frac{n \log 2}{x_k^{1-\tau} \log x}$$

Proposition 4 . <u>Soit</u> A <u>un nombre hautement composé, et</u> $N = N_\varepsilon$ <u>le nombre hautement composé supérieur précédant</u> A . <u>On définit</u> x <u>et</u> x_k <u>par la formule (7)</u>. <u>Soit</u> p_k <u>le plus grand nombre premier divisant</u> A <u>avec l'exposant</u> k . <u>On a:</u>

$$\pi(p_k) - \pi(x_k) = O(\sqrt{x_k \log x})$$

<u>où</u> $\pi(x)$ <u>désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à</u> x .

Démonstration: Supposons par exemple $p_k \geqslant x_k$. Posons $n = \pi(p_k) - \pi(x_k)$. Les relations (11) et (14) donnent

$\text{bén } A \geqslant \text{bén } W_n \gtrsim \frac{n^2 \log 2}{x_k \log x}$. D'autre part la proposition 3 nous indique:

$\text{bén } A = O(1)$, d'où le résultat .

<u>Corollaire</u>. <u>Avec les mêmes notations, si</u> $x_k \to \infty$, <u>on a, avec</u> $\tau = 5/8$:

$$p_k - x_k = O(x_k^\tau)$$

Démonstration: D'après la formule (4) de A.E. INGHAM, si l'on avait $p_k - x_k \geqslant x_k^\tau$, cela entraînerait $\pi(p_k) - \pi(x_k) \geqslant \frac{x_k^\tau}{\log x}$, ce qui contredirait la proposition 4 .

3. THEOREME DE MAJORATION DES BENEFICES ET APPLICATIONS.

Théorème 1. Soit A un nombre hautement composé, soit $N = N_\varepsilon$ le nombre hautement composé supérieur précédant A. Posons $x = 2^{1/\varepsilon}$. Il existe deux constantes $\gamma > 0$ et $C > 0$ telles que:

$$\text{bén } A \leqslant C\, x^{-\gamma}$$

Démonstration. Nous allons construire une famille de nombres M_h, compris entre N et NP (où P désigne le nombre premier suivant x) tels que bén M_h ne soit pas trop grand et tels que les nombres $d(M_h)$ soient assez proches les uns des autres. La proposition 2 appliquée aux nombres M_h nous donnera le résultat.

Soit y un nombre réel, on note $[y]$ la partie entière de y ($[y] \leqslant y < [y]+1$), on note $\{y\} = y - [y]$ la partie fractionnaire de y et on note $||y|| = \min(\{y\}, 1-\{y\})$ la distance de y à l'entier le plus proche. Soit $\theta = \frac{\log 3/2}{\log 2}$, la formule (7) donne: $x_2 = x^\theta$. Soit $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$ les nombres premiers rangés par ordre croissant à partir de x_2 et $q_1, q_2, \ldots, q_h$ les nombres premiers précédant x_2 et rangés par ordre décroissant. Définissons de même $P_1 = P, P_2, \ldots P_h$ et $p_1, p_2, \ldots, p_h$ à partir de x.

Pour $h > 0$, on définit $M_h = N \frac{Q_1 Q_2 \cdots Q_h}{p_1 p_2 \cdots p_k}$ avec $k = [h\,\theta]$

Pour $h < 0$, on pose $h' = -h$ et $M_h = N \frac{P_1 P_2 \cdots P_{k'}}{q_1 q_2 \cdots q_{h'}}$ avec $k' = [h'\,\theta] + 1$

On a, pour $h > 0$:

$$\delta_h = \log \frac{d(M_h)}{d(N)} = \frac{\log(3/2)^h}{2^k} = h \log 3/2 - k \log 2 = \{h\,\theta\} \log 2$$

et pour $h < 0$:

$$\delta_h = \log \frac{d(M_h)}{d(N)} = \frac{\log 2^{k'} 2^{h'}}{3^{h'}} = k' \log 2 - h' \log 3/2 = \{h\,\theta\}\log 2$$

Pour $h = 0$, on pose $M_o = N$ et $\delta_o = 0$.

On considère les nombres M_h, $-H \leqslant h \leqslant H$, H étant un entier que l'on précisera par la suite, et le nombre $M = NP$. On pose: $\delta_M = \log \frac{d(M)}{d(N)} = \log 2$, et on les range par ordre croissant de δ_h . Soit $\frac{u_n}{v_n}$ le $n^{\text{ième}}$ convergent principal de θ , et choisissons n de façon que:

(16) $$v_{n+1} < H \leqslant v_{n+2}$$

D'après les propriétés des fractions continues, (voir, par exemple [6] , Ch. 1) l'un des convergents $\frac{u_n}{v_n}$ et $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$, soit $\frac{u}{v}$ va vérifier $v\,\theta > u$, et par suite $v\,\theta = u + ||v\theta||$, l'autre soit $\frac{u'}{v'}$ va vérifier $v'\,\theta < u'$ et $v'\,\theta = u' - ||v'\theta||$

Pour $h \geqslant 0$, on a: $(h - v')\theta = [h\theta] + \{h\theta\} - u' + ||v'\theta||$

Si $\{h\theta\} < 1 - ||v'\theta||$, on a: $\{(h - v')\theta\} = \{h\theta\} + ||v'\theta||$ et :

$$\delta_h < \delta_{h-v'} < \delta_h + ||v'\theta|| \log 2$$

le nombre $M_{h-v'}$ suivra M_h dans le rangement par ordre croissant des δ_h et l'écart entre δ_h et $\delta_{h-v'}$ est inférieur à $||v'\theta|| \log 2$.

Si $1 - ||v'\theta|| \leqslant \{h\theta\}$, on aura : $\delta_h < \delta_M < \delta_h + ||v'\theta|| \log 2$, et le nombre $M = NP$ suivra M_h , avec un écart $\delta_M - \delta_h$ inférieur à $||v'\theta|| \log 2$.

Pour $h < 0$, on a de même: $(h + v)\theta = [h\theta] + \{h\theta\} + u' + ||v\theta||$.

Si $\{h\theta\} < 1 - ||v\theta||$, on aura $\delta_h < \delta_{h+v} < \delta_h + ||v\theta|| \log 2$.

Si $1 - ||v\theta|| \leqslant \{h\theta\}$, on aura $\delta_h < \delta_M < \delta_h + ||v\theta|| \log 2$.

Dans tous les cas, l'écart entre deux nombres consécutifs de la famille δ_h , $-H \leqslant h \leqslant H$ et δ_M rangés par ordre croissant est au plus $||v\theta|| \log 2$, ou $||v'\theta|| \log 2$, c'est à dire au plus $||v_n\theta|| \log 2$.

D'après le théorème de N. FELDMANN ([3]), il existe deux constantes κ

et c_1 telles que, pour tous u et v entiers, on ait:

$$|v\theta - u| > \frac{c_1}{v^{\kappa}}$$

On a en particulier:

$$|v_{n+1}\theta - u_{n+1}| > \frac{c_1}{v_{n+1}^{\kappa}}$$

Mais, d'après les propriétés des fractions continues (voir [6] , Ch. 1), on a:

$$|v_{n+1}\theta - u_{n+1}| < \frac{1}{v_{n+2}}$$

On en déduit:

$$v_{n+2} < \frac{1}{c_1} \quad v_{n+1}^{\kappa}$$

La relation (16) donne:

$$H < \frac{1}{c_1} \quad v_{n+1}^{\kappa} \text{ , soit : } v_{n+1} > (c_1 \ H)^{1/\kappa}$$

Finalement, on obtient:

(17) $$||v_n \ \theta||\log 2 \leqslant ||v_n\theta|| = |v_n\theta - u_n| < \frac{1}{v_{n+1}} < c_2 \ H^{-1/\kappa}$$

Choisissons H de façon à avoir: $H < x_2^{\tau} < x^{\tau}$. Pour $-H \leqslant h \leqslant H$, on aura, par les relations (13) et (15):

(18) $$\text{bén } M_h \lesssim \frac{|h| \ \log 2}{x_2^{1-\tau} \ \log x} + \frac{([h\theta]+1)\log 2}{x^{1-\tau} \ \log x} \lesssim \frac{H \ \log 2}{x_2^{1-\tau} \ \log x}$$

Considérons le nombre hautement composé A . On pose, $\delta_A = \log \frac{d(A)}{d(N)}$. Le nombre δ_A va être compris entre deux nombres consécutifs δ_h et $\delta_{h'}$ de la famille des δ_h . On aura:

$$d(M_h) \leqslant d(A) \leqslant d(M_{h'})$$

et

(19) $$\log \frac{d(M_{h'})}{d(M_h)} = \delta_{h'} - \delta_h \leqslant ||v_n\theta||\log 2 < c_2 \ H^{-1/\kappa}$$

en appliquant l'inégalité (17) .

On applique la proposition 2 aux nombres A, M_h et $M_{h'}$:

$$\text{bén } A \leqslant \text{bén } M_{h'} + \log \frac{d(M_{h'})}{d(M_h)} \lesssim \frac{H \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + c_2 H^{-1/\kappa}$$

en appliquant les inégalités (18) et (19) . Si l'on choisit:

$$H = \left[x^{\gamma\kappa}\right] \text{ , on obtient } \text{bén } A \leqslant C\, x^{-\gamma}$$

avec $\gamma = \theta \frac{1-\tau}{\kappa+1}$, ce qui établit le théorème 1.

Proposition 5 . <u>Soit</u> A <u>un nombre hautement composé assez grand</u>, $N = N_\varepsilon$ <u>le nombre hautement composé supérieur précédant</u> A . <u>Ecrivons</u> $A = \frac{r}{s} N$ <u>avec</u> r <u>et</u> s <u>premiers entre eux . Alors</u> r <u>et</u> s <u>ne sont divisibles par aucun carré</u>.

<u>Démonstration</u>: D'après la relation (11) , si λ^2 divisait r , on aurait:

$$\text{bén } A \geqslant 2(\varepsilon \log \lambda - \log \frac{1}{1+a_\lambda}) + \log U_\lambda \geqslant \log U_\lambda$$

où a_λ est défini par (6) . U_λ est donné par la formule (9), en posant $a = a_\lambda$:

$$\log U_\lambda \geqslant \log(\frac{a+1}{a+3} \frac{(a+2)^2}{(a+1)^2}) = \log(1 + \frac{1}{(a+1)(a+3)}) \geqslant \frac{1}{(a+2)^2}$$

Soit a_2 l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de N , on a: $a = a_\lambda \leqslant a_2$ et $a_2 \sim \frac{1}{2^\varepsilon - 1} \sim \frac{1}{\varepsilon \log 2}$. On aurait donc:

$$\text{bén } A \geqslant \log U_\lambda \gtrsim (\varepsilon \log 2)^2 = \frac{(\log 2)^4}{(\log x)^2}$$

ce qui est en contradiction avec le théorème 1 pour x assez grand.

On démontrerait de même que s n'a pas de facteurs carrés.

Proposition 6 . <u>Soit</u> A <u>un nombre hautement composé assez grand. Soit</u> $N = N_\varepsilon$ <u>le nombre hautement composé supérieur précédant</u> A . <u>Soit</u> λ <u>un nombre premier et posons</u> $a = a_\lambda = v_\lambda(N)$ <u>défini par</u> (6) <u>et</u> $b = b_\lambda = v_\lambda(A)$. <u>Alors:</u>

<u>Si</u> $\varepsilon \log \lambda - \log(1 + \frac{1}{a+1}) \leqslant C\, x^{-\gamma}$, <u>on a</u>: $b = a$ <u>ou</u> $b = a+1$

<u>Si</u> $\log(1 + \frac{1}{a}) - \varepsilon \log \lambda \leqslant C\, x^{-\gamma}$, <u>on a</u>: $b = a$ <u>ou</u> $b = a-1$

<u>Sinon, on a</u> $b = a$.

<u>Démonstration</u>: D'après la proposition 4 , on doit avoir: $|b-a| \leqslant 1$.

Si $b = a+1$, alors: bén $A \geqslant$ bén $\lambda N = \varepsilon \log \lambda - \log(1 + \frac{1}{a+1})$

le cas n'est possible que si $\varepsilon \log \lambda - \log(1 + \frac{1}{a+1}) \leqslant C\, x^{-\gamma}$ d'après le théorème 1 .

Si $b = a-1$, alors: bén $A \geqslant$ bén $\frac{N}{\lambda} = \log(1 + \frac{1}{a}) - \varepsilon \log \lambda$

Cela n'est possible que si $\log(1 + \frac{1}{a}) - \varepsilon \log \lambda \leqslant C\, x^{-\gamma}$.

Cela nous permet de déterminer l'exposant $b = v_\lambda(A)$ avec lequel λ divise A , suivant les valeurs croissantes de λ .

λ		x_{k+1}		x_k	
$\varepsilon \log \lambda$		$\log(1+\frac{1}{k+1})$		$\log(1+\frac{1}{k})$	
$\frac{1}{\lambda^\varepsilon - 1}$		$k+1$		k	
$a=v_\lambda(N)$	$k+1$		k		$k-1$
$b=v_\lambda(A)$	$k+1$	$k+1$ ou k	k	k ou $k-1$	$k-1$

La demi longueur des zones hachurées dans lesquelles b peut varier de une unité est:

Pour $\varepsilon \log \lambda$, la proposition 6 nous donne: $C\, x^{-\gamma}$

Pour $\lambda = e^{\frac{\varepsilon \log \lambda}{\varepsilon}}$, on trouve: $\frac{\lambda}{\varepsilon} C\, x^{-\gamma}$ soit: $O(x_k\, x^{-\gamma} \log x)$

Pour $\frac{1}{\lambda^\varepsilon - 1} = \frac{1}{e^{\varepsilon \log \lambda} - 1}$,on trouve $\frac{\lambda^\varepsilon}{(\lambda^\varepsilon - 1)^2} C\, x^{-\gamma}$ soit: $O(x^{-\gamma} \log^2 x)$

<u>Remarque</u> : Soit p_k le plus grand nombre premier divisant A avec l'exposant k .

Le tableau précédent nous indique:

$$p_k - x_k = O(x_k\, x^{-\gamma} \log x)$$

et le corollaire de la proposition 4 nous donne:

$$p_k - x_k = O(x_k^{\tau})$$

ce qui est meilleur lorsque k est petit.

<u>Théorème 2. Soit</u> A <u>un nombre hautement composé et</u> p <u>son plus grand facteur premier. Soit</u> $\lambda < p$ <u>un nombre premier, et posons:</u> $b = v_\lambda(A)$. <u>Alors on a:</u>

$$\log(1 + \frac{1}{b}) \geqslant \frac{\log \lambda \log 2}{\log p} + O(p^{-\gamma})$$

$$\log(1 + \frac{1}{b+1}) \leqslant \frac{\log \lambda \log 2}{\log p} + O(p^{-\gamma})$$

<u>Démonstration</u>: Associons à A le nombre hautement composé supérieur, $N = N_\varepsilon$ précédant A . Pour avoir $b = v_\lambda(A)$, le tableau précédent nous dit que:

$$\log(1 + \frac{1}{b+1}) - C\, x^{-\gamma} \leqslant \varepsilon \log\lambda \leqslant \log(1 + \frac{1}{b}) + C\, x^{-\gamma}$$

Le corollaire de la proposition 4 nous donne: $p - x = O(x^\tau)$ soit $p \sim x$ et:

$$\varepsilon\log\lambda - \frac{\log 2 \log \lambda}{\log p} = \log 2 \log \lambda(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{\log p}) = O(\log \lambda \frac{p - x}{\log^2 x}) = o(x^{1-\tau})$$

et comme $\gamma < 1 - \tau$, $x^{1-\tau} \sim p^{1-\tau} = o(p^{-\gamma})$

Cela démontre le théorème 2, qui améliore les théorèmes 11 et 12 de L. ALAOGLU et P. ERDÖS ([1]) . La remarque précédant le théorème 2 nous permettrait de remplacer $O(p^{-\gamma})$ par une quantité plus petite, lorsque b est petit.

<u>Théorème 3. Soit</u> $Q(X)$ <u>le nombre de nombres hautement composés inférieurs à</u> X . <u>Soit</u> $N = N_\varepsilon$ <u>et</u> N' <u>deux nombres hautement composés supérieurs consécutifs. Il existe une constante</u> c <u>pour laquelle on a:</u> $Q(N') - Q(N) = O(\log N)^c$.

<u>Démonstration</u>: Nous allons étudier toutes les possibilités de construire un nombre hautement composé, A entre N et N' , ayant un bénéfice inférieur à $C\, x^{-\gamma}$

La première ligne du tableau suivant la proposition 6 nous indique qu'un nombre premier λ a le même exposant dans N et dans A , sauf s'il est voisin d'un nombre x_k .

Il existe un entier k' , tel que pour $k > k'$ il y aura au plus un nombre premier dans la zone hachurée de x_k, soit: $x_k + O(x_k\, x^{-\gamma} \log x)$. Cela arrivera lorsque $x_k\, x^{-\gamma} \log x = o(1)$ c'est à dire, (compte tenu de (7)) pour:

$\frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log 2} - \gamma < 0$. Cela nous donne $k' = \left[\frac{1}{e^{\gamma \log 2}-1}\right]$ et l'on voit que k' ne dépend pas de N mais seulement de γ .

Pour k assez grand, il y aura plusieurs nombres x_k compris entre deux nombres premiers consécutifs. Cela aura lieu lorsque $x_k - x_{k+1} \leqslant 2$. Définissons k'' par :

$$x_{k''-1} - x_{k''} < 2 \leqslant x_{k''} - x_{k''+1}$$

Nous allons chercher un équivalent de k'' .

On a:

$$\log(1 + \frac{1}{k+1}) - \log(1 + \frac{1}{k}) = \log(1 - \frac{1}{(k+1)^2})$$

et:

$$x_k - x_{k+1} = x_k \{1 - \exp(\frac{\log(1 - \frac{1}{(k+1)^2})\log x}{\log 2})\} \sim x_k \frac{\log x}{k^2 \log 2} \tag{20}$$

Pour $k = \frac{C \log x}{\log \log x}$, on a: $x_k - x_{k+1} \sim x_k \frac{(\log \log x)^2}{C^2 \log x \log 2}$

et:

$$\log(x_k - x_{k+1}) = \log x \frac{\log(1 + \frac{1}{k})}{\log 2} + 2 \log_3(x) - \log \log x + 0(1)$$

$$\log(x_k - x_{k+1}) = \frac{\log \log x}{C \log 2} - \log \log x + 2\log_3(x) + 0(1)$$

On voit que, pour $C > \frac{1}{\log 2}$, $\lim(x_k - x_{k+1}) = 0$, et pour $C < \frac{1}{\log 2}$, $\lim(x_k - x_{k+1}) = +\infty$. On en conclut:

$$k'' \sim \frac{\log x}{\log \log x \ \log 2}$$

et par la relation (20) , $2 \sim x_{k''} \frac{\log x}{k^2 \log 2}$

$$x_{k''} \sim \frac{2}{\log 2} \frac{\log x}{(\log \log x)^2}$$

Regardons maintenant quel peut être l'exposant $b_\lambda = v_\lambda(A)$ de λ dans la décomposition en facteurs premiers de A par rapport à $a_\lambda = v_\lambda(N)$.

Pour $\lambda \leqslant x_{k''}$ il y a trois choix au plus pour b_λ: $a_\lambda + 1$, a_λ et $a_\lambda - 1$ à cause de la proposition 5.

Pour $x_{k''} < \lambda < x_{k'}$, pour chaque valeur de k il y aura au plus un nombre premier dans la zone hachurée de x_k . Pour un tel nombre premier, il y aura deux choix pour b_λ .

Pour $2 \leqslant k \leqslant k'$, pour chaque nombre k , il y aura au plus $2\sqrt{x_k \log x}$ possibilités de choisir p_k le plus grand nombre premier divisant A avec l'exposant k , à cause de la proposition 4.

Enfin, pour $k = 1$, il y aura en général une et au plus deux possibilités de choisir p_1 , le plus grand facteur premier de A , pour que le nombre A ainsi construit soit entre N et N' .

Dans ces deux derniers cas, la relation (2) montre que le choix des p_k détermine exactement les exposants b_λ pour tous les nombres λ .

On aura donc:

$$(21) \qquad Q(N') - Q(N) \leqslant 2\left(\prod_{k=2}^{k'} 2\sqrt{x_k \log x}\right)(2^{k''-k'})(3^{\pi(x_{k''})})$$

Or, on a: $x_{k''} = o(\log x)$ et $k'' = o(\log x)$ donc:

$$\log(Q(N') - Q(N)) \leqslant \sum_{k=2}^{k'} \frac{1}{2} \log x_k + o(\log x) .$$

Mais, d'après (7) ,

$$\sum_{k=2}^{k'} \frac{1}{2} \log x_k \doteq \frac{\log x}{2 \log 2} \sum_{k=2}^{k'} \log(1 + \frac{1}{k}) = \frac{\log \frac{k'+1}{2}}{2 \log 2} \log x ,$$

On trouve donc:

$$Q(N') - Q(N) = O(x^c) \quad \text{avec} \quad c > \frac{\log \frac{k'+1}{2}}{2 \log 2}$$

Comme on a: $x \sim \log N$ ([8] , §39), cela démontre le théorème 3 .

<u>Théorème 4</u> . <u>Soit</u> $Q(X)$ <u>le nombre de nombre hautement composés inférieurs à</u> X . <u>On a</u>: $Q(X) = O(\log X)^{1+c}$, c <u>ayant la même valeur que dans le théorème 3</u> .

<u>Démonstration</u>: On a, avec le théorème 3:

$$Q(X) \leqslant \sum_{\substack{N \leqslant X \\ N \text{ h.c.s.}}} Q(N') - Q(N) = O\Big(\sum_{\substack{N \leqslant X \\ N \text{ h.c.s.}}} (\log N)^c\Big)$$

les sommations s'effectuant sur les nombres hautement composés supérieurs N précédant X , et N' désignant le nombre hautement composé supérieur suivant N .

On a ensuite:

$$\sum_{\substack{N\leqslant X\\ N \text{ h.c.s.}}} (\log N)^c \leqslant (\log X)^c \sum_{\substack{N\leqslant X\\ N \text{ h.c.s.}}} 1 \sim \frac{(\log X)^{c+1}}{\log\log X}$$

Cette dernière équivalence est donnée par S. RAMANUJAN ([8] , §44). Une évaluation plus précise donnerait:

$$\sum_{\substack{N\leqslant X\\ N \text{ h.c.s.}}} (\log N)^c \sim \sum_{\substack{\lambda\leqslant \log X\\ \lambda \text{ premier}}} \lambda^c \sim \frac{(\log X)^{c+1}}{(c+1)\log\log X}$$

Cette dernière équivalence étant donnée par [5], §55 .

4. MINORATION DE $Q(X)$.

<u>Théorème 5</u>. <u>Soit</u> $Q(X)$ <u>le nombre de nombres hautement composés inférieurs à</u> X . <u>Il existe une constante</u> $c' > 0$ <u>telle que</u> $Q(X) \geqslant (\log X)^{1+c'}$.

<u>Démonstration</u>. Ce théorème a déjà été démontré par P. ERDÖS ([2]) . Nous allons obtenir ici une valeur de c' un peu plus grande. La méthode de démonstration est essentiellement la même.

Soit . $\theta = \dfrac{\log 3/2}{\log 2}$ et $\theta' = \dfrac{\log 5/4}{\log 2}$. On considère les nombres $\{u\theta + v\theta'\}$, où $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire de y , avec u, v entiers, $|u| \leqslant U$ et $|v| \leqslant V$, U et V étant deux nombres que l'on déterminera par la suite . Les $(2U+1)(2V+1)$ nombres de cette forme sont tous distincts et tous compris entre 0 et 1 . Si l'on divise le segment $[0, 1]$ en $4UV + 2(U+V)$ intervalles de même longueur, l'un de ces intervalles contiendra deux points: $\{u_1\theta + v_1\theta'\} < \{u_2\theta + v_2\theta'\}$ d'après le principe des tiroirs de Dirichlet, et on aura:

$$\{(u_2 - u_1)\theta + (v_2 - v_1)\theta'\} \leqslant \frac{1}{4UV + 2(U+V)}$$

Posons: $u = u_2 - u_1$, $v = v_2 - v_1$ et $w = -[u\theta + v\theta']$, on a: $|u| \leqslant 2U$, $|v| \leqslant 2V$ et :

$$0 < u\theta + v\theta' + w = \{u\theta + v\theta'\} \leqslant \frac{1}{4UV + 2(U+V)} \leqslant \frac{1}{4UV} \tag{22}$$

Soit A un nombre hautement composé, $N = N_\varepsilon$ le nombre hautement composé supérieur précédant A. On définit x et x_k par (7) et, en particulier, $x_2 = x^\theta$ et $x_4 = x^{\theta'}$. Soit r, q, p les plus grands nombres premiers divisant A avec les exposants 4, 2, 1. D'après la proposition 4, on a:

$$\pi(r) - \pi(x_4) = O(\sqrt{x_4 \log x}) \quad ; \quad \pi(q) - \pi(x_2) = O(\sqrt{x_2 \log x})$$

et $$\pi(p) - \pi(x) = O(\sqrt{x \log x})$$

Les nombres U et V étant choisis, et u et v vérifiant (22) on construit un nombre A' tel que:

$$\log d(A') = \log d(A) + (u\theta + v\theta' + w) \log 2$$

dont la forme varie avec le signe de u, v, w. Dans le cas $u > 0$, $v > 0$, $w < 0$, on a:

$$A' = A \frac{Q_1 Q_2 \cdots Q_u R_1 R_2 \cdots R_v}{p_1 p_2 \cdots p_w}$$

où $Q_1, Q_2, \ldots$ sont les nombres premiers suivant q, $R_1, R_2, \ldots$ les nombres premiers suivant r, et $p_1 = p, p_2, \ldots$ les nombres premiers précédant p.

Si U est inférieur à $\frac{x_2^\tau}{\log x_2}$ on aura:

$$\pi(Q_u) - \pi(x_2) \leqslant |u| + |\pi(q) - \pi(x_2)| = O\left(\frac{x_2^\tau}{\log x_2}\right)$$

et on aura aussi: $|Q_u - x_2| = O(x_2^\tau)$. Si, de même $V \leqslant \frac{x_4^\tau}{\log x_4}$, on aura $|R_v - x_4| = O(x_4^\tau)$. Comme $w = O(U + V)$, on aura également $|p_w - x| = O(x^\tau)$. On peut donc appliquer les formules (13) et (15):

$$\text{bén } A' - \text{bén } A \leqslant \frac{u \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + \frac{v \log 2}{x_4^{1-\tau} \log x} + \frac{w \log 2}{x^{1-\tau} \log x}$$

(23) $$\text{bén } A' - \text{bén } A \leqslant \left(\frac{2U \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + \frac{2V \log 2}{x_4^{1-\tau} \log x}\right)(1 + o(1))$$

on a d'autre part: $\log \frac{d(A')}{d(A)} = (u\theta + v\theta' + w) \log 2 \leqslant \frac{1}{4UV}$

La relation (12) appliquée à A puis à A' donne:

$$\varepsilon \log \frac{A'}{A} = \log \frac{d(A')}{d(A)} + \text{bén } A' - \text{bén } A \lesssim \frac{1}{4UV} + \frac{2U \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + \frac{2V \log 2}{x_4^{1-\tau} \log x}$$

On choisit $U=x^{\alpha}$, $V=x^{\beta}$ avec $\alpha = \frac{2\theta - \theta'}{3}(1-\tau)$; $\beta = \frac{2\theta'-\theta}{3}(1-\tau)$ .et on obtient:

$$\varepsilon \log \frac{A'}{A} = O(x^{-(\alpha+\beta)}) = O(x^{\frac{\theta+\theta'}{3}(1-\tau)})$$

D'où l'on tire, en posant $c' < \frac{\theta+\theta'}{3}(1-\tau)$:

$$A' \leqslant A(1 + \frac{1}{x^{c'}})$$

et comme $x \sim \log A$, on obtient:

$$A' \leqslant A(1 + \frac{1}{(\log A)^{c'}})$$

Cette inégalité a été obtenue par P. ERDÖS ([2]) avec $c' = \frac{1-\tau}{4} = \frac{3}{32}$. Ici nous avons $c' < \frac{\theta+\theta'}{3}(1-\tau) = 0.113 \ldots$ La fin de la démonstration est la même: Comme $d(A') > d(A)$. On a $A' > A$ et il existe un nombre hautement composé A'' tel que $A < A'' \leqslant A'$ qui vérifie $A'' \leqslant A(1 + \frac{1}{(\log A)^{c'}})$. Cela entraîne: $Q(X) \geqslant (\log X)^{1+c'}$.

5. CONCLUSION. Si l'on supposait les nombres premiers très bien répartis, c'est-à dire distants de $\log x$ au voisinage de x , les formules (13), (14) et (15) deviendraient: $\text{bén } W_n \sim \frac{n^2 \log 2}{2x_k}$

La formule (23) deviendrait:

$$\text{bén } A' - \text{bén } A \sim \frac{u^2 \log 2}{2x_2} + \frac{v^2 \log 2}{2x_4}$$

et l'on trouverait $c' = \frac{\theta+\theta'}{4} = 0.277 \ldots$ dans le théorème 5 .

D'autre part, si l'on avait pour les formes linéaires en θ et θ' une relation :

$$\frac{1}{K(\eta)(uv)^{1+\eta}} < |u\theta + v\theta' + w|$$

pour tout $\eta > 0$, cela nous permettrait d'obtenir $\gamma = \frac{\theta+\theta'}{4} - \eta$ dans le théorème 1 et on obtiendrait dans la démonstration du théorème 3 , $k' = 5$. Comme les nombres $\frac{\log 4/3}{\log 2} = 1 - \theta$, et $\frac{\log 6/5}{\log 2} = \theta-\theta'$ sont rationnellement dépendants de $1, \theta, \theta'$,

les nombres premiers voisins de x_3 et x_5 n'apportent pas de valeurs nouvelles à la fonction d et le produit dans la formule (21) ne porterait que sur $k = 2$ et $k = 4$. On en déduirait alors :

$$(\log X)^{c-\eta} < Q(X) < (\log X)^{c+\eta} \quad \text{avec} \quad c = 1 + \frac{\theta+\theta'}{4} = 1.277 \ldots$$

Si, par contre les nombres $\{u\theta + v\theta'\}$ étaient mal répartis, il est vraisemblable que la quantité $\frac{\log Q(X)}{\log \log X}$ n'aurait pas de limite.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALAOGLU (L.) and ERDÖS (P.). - On highly composite and similar numbers, Trans. Amer. math. Soc. t. 56, 1944, pp. 448-469.

[2] ERDÖS (P.). - On highly composite numbers. J. London math. Soc. t. 19, 1944, pp. 130-133.

[3] FELDMANN (N.). - Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers. Math. Sbornik, t. 77, (119), 1968, n°3 (en russe) Math U.S.S.R. Sbornik t. 6, 1968, n° 3 - (traduction de l'A.M.S.).

[4] INGHAM (A.E.). - On the difference of two consecutive primes. Quart. J. Math. Oxford, t. 8, (1937), p. 255.

[5] LANDAU (E.). - Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909.

[6] LANG (S.). - Introduction to Diophantine Approximations. Addison-Wesley, 1966.

[7] NICOLAS (J.L.). - Ordre maximal d'un élément du groupe des permutations et highly composite numbers. Bull. Soc. Math. France, t. 97 (1969) pp. 129-191.

[8] RAMANUJAN (S.). - Highly composite numbers. - Proc. London math. Soc., Séries 2, t. 14, (1915), pp. 347-400 ; Collected papers, pp. 78-128.

-:-:-:-

Jean-Louis NICOLAS
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
91 - ORSAY