SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

JEAN-FRANÇOIS MELA

Approximation diophantienne et ensembles lacunaires

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. nº 4, p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969____A4_0>

© Université Bordeaux 1, 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

APPROXIMATION DIOPHANTIENNE
ET ENSEMBLES LACUNAIRES

par

Jean-François MELA

I. Introduction. Résultats. Préliminaires

On notera $\|x\|$ la distance d'un réel x à l'entier le plus proche. Soit (λ_j) une suite infinie discrète de nombres réels. Etant donné $\varepsilon > 0$ et une suite infinie de nombres réels (α_j) , on considère le système d'inégalités

$$(1) \qquad \|\lambda_j x - a_j\| < \varepsilon \qquad (j = 1, 2, \ldots) .$$

A quelles conditions a-t-il une solution $x \in \mathbb{R}$? Il s'agit d'un problème d'approximations diophantiennes simultanées qui généralise le problème classique de Kronecker [2] .

Si l'on veut que (1) ait une solution quel que soit ε et quels que soient les α_j , il est nécessaire que les λ_j soient indépendants sur les rationnels. Cette dernière condition est loin d'être suffisante ; il faut faire une hypothèse supplémentaire concernant la lacunarité de le suite (λ_j), par exemple que l'on a $\lim_{j\to\infty} \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} = \infty$ [4] . La propriété que l'on a alors peut s'exprimer en disant que toute fonction de module 1 définie sur l'ensemble $\Lambda = (\lambda_j)$ est limite uniforme sur Λ d'exponentielles imaginaires $e^{2\pi i x\lambda}$.

Pour des suites (λ_j) vérifiant une condition de lacunarité moins forte et sans la condition d'indépendance, on a des théorèmes d'existence pour le système (1) pour certaines valeurs de ε . Si l'on suppose par exemple que $\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \geq q > 3$, il existe $0 < \delta = \delta(q) < \frac{1}{4}$ fonction croissante de q , telle que le système

$$\|\lambda_j x - \alpha_j\| < \frac{1}{4} - \delta \qquad (j = 1, 2, \ldots) ,$$

ait une solution, quels que soient les α_j . Nous aurons l'occasion de redémontrer ce résultat chemin faisant (cf. cor. th. 7). Il n'est pas possible d'ailleurs d'étendre ce résultat à des valeurs de q trop petites, en tout cas pas à $q \leq 2$ [9] , [12] .

Un intérêt du résultat précédent est que l'on peut en déduire facilement la propriété suivante [3] : pour tout $\varepsilon > 0$ et toute suite (β_j) de nombres complexes de module 1 , il existe un polynôme trigonométrique $P(\lambda) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{2\pi i \xi_n \lambda}$ tel que

$$|P(\lambda_j) - \beta_j| < \varepsilon \qquad (j = 1, 2, \ldots) .$$

Autrement dit, toute fonction de module 1 sur $\Lambda = (\lambda_j)$ (et par suite toute fonction bornée sur Λ), est limite uniforme sur Λ de polynômes trigonométriques. De façon générale un ensemble $\Lambda = (\lambda_j)$ qui possède cette propriété est appelé un <u>ensemble d'interpolation</u> [3] , [8] .

La propriété précédente d'approximation par les polynômes trigonométriques mérite une certaine attention. Elle remplace la propriété d'approximation par les exponentielles imaginaires du théorème de Kronecker qui n'est vérifiée ici que pour des suites (λ_j) très lacunaires, comme nous l'avons dit. Cette propriété d'approximation par les polynômes trigonométriques se trouve être, en toute généralité, exactement équivalente à une propriété d'approximation diophantienne à plusieurs dimensions. On se reportera pour cela à [8] , [9].

Les ensembles de Hadamard.

Dans la suite nous appellerons ensemble de Hadamard tout ensemble de nombres réels positifs qui peut être ordonné en une suite (λ_j) telle que $\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \geq q > 1$. Bien que la propriété d'approximation diophantienne énoncée plus haut dans le cas $q > 3$ ne soit pas vraie pour toute valeur de $q > 1$, on a néanmoins le résultat suivant :

THEOREME 1. Tout ensemble de Hadamard est ensemble d'interpolation [12].

Nous donnerons du théorème 1 une démonstration élémentaire qui permet d'obtenir du même coup le théorème 5 , propriété fondamentale dont on peut déduire les résultats classiques de Sidon (cf. [1]) et de Zygmund [13] dans le cas où les λ_j sont entiers, ainsi que d'autres propriétés qui se rattachent plutôt à la théorie générale de la pseudo-périodicité [5] , [6]. Nous nous contenterons de donner quelques exemples de ces résultats renvoyant pour plus de détails aux travaux cités ou aux traités classiques [1] , [14] .

Etant donné un intervalle I borné ou non, nous noterons $C_\Lambda(I)$ l'espace vectoriel fermé pour la topologie de la convergence compacte, engendré par la famille $(e^{i\lambda_j x})$. $B(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions transformées de

Fourier de mesures de Radon bornées sur $\mathbb{R}$ et $B(I)$ l'espace des restrictions à I des fonctions de $B(\mathbb{R})$.

THEOREME 2. *Si* Λ *est un ensemble de Hadamard, pour tout intervalle* I , $C_\Lambda(I) \subset B(I)$. *Toute fonction* $f \in C_\Lambda(I)$ *s'écrit de façon unique*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{i\lambda_j x} \qquad (x \in I) ,$$

avec $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty$.

THEOREME 3. *Si* Λ *est un ensemble de Hadamard, toute série* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{i\lambda_j x}$ *qui converge au voisinage d'un point (par un procédé régulier de sommation quelconque) converge absolument.*

Ce théorème peut être amélioré dans plusieurs directions (cf. [7] , [18]).

THEOREME 4. *Si* Λ *est un ensemble de Hadamard, toute fonction de* $C_\Lambda(\mathbb{R})$ *qui est analytique au voisinage d'un point, est analytique partout.*

A vrai dire le théorème 4, comme beaucoup d'autres théorèmes analogues cités dans [5] , demeurent valables pour des ensembles Λ beaucoup moins lacunaires que les ensembles de Hadamard (il suffit par exemple que $\lim_{j\to\infty} (\lambda_{j+1} - \lambda_j) = \infty$) , mais nous le citons ici à titre d'exemple car tout comme les théorèmes 2 et 3 il peut être directement déduit du résultat suivant qui est plus fort :

THEOREME 5. *Soit* $\Lambda = (\lambda_j)$ *un ensemble de Hadamard. Il existe des constantes* A *et* B , *ne dépendant que de* q , *telles que, quel que soit l'intervalle* I *de longueur* $|I| \geq \frac{A}{\lambda_1}$, *on ait :*

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j| \leq B \sup_{x \in I} |P(x)|$$

pour tout polynôme trigonométrique $P(x) = \sum a_j e^{i\lambda_j x}$.

La propriété du théorème 5 étant invariante par translation, il suffira de démontrer le théorème pour un intervalle I particulier. On trouvera la démonstration au chapitre II en même temps que celle du théorème 1 . Pour les démonstrations des théorèmes 2 , 3 , 4 à partir du théorème 5 , nous renvoyons aux divers travaux cités plus haut.

Les ensembles de Sidon de première espèce.

Définition. Un ensemble de nombres réels Λ est un ensemble de Sidon s'il existe un intervalle I pour lequel $C_\Lambda(I) \subset B(I)$. Il existe plusieurs formulations équivalentes de cette propriété [6] ; nous utiliserons la suivante :

Il existe un intervalle I et une constante $C = C_I$ telle que, pour tout polynôme trigonométrique

$$P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda)\, e^{i\lambda x} \quad ,$$

on ait :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |a(\lambda)| \leq C \sup_{x \in I} |P(x)| \ .$$

Cette dernière propriété entraîne en effet que toute fonction $f \in C_\Lambda(I)$ qui est limite uniforme sur I de polynômes trigonométriques à spectre dans Λ s'écrit :

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda)\, e^{i\lambda x} \qquad (x \in I) \quad ,$$

avec $\sum_{\lambda \in \Lambda} |a(\lambda)| < \infty$; donc $C_\Lambda(I) \subset B(I)$. Pour la réciproque, on se reportera à [6].

Sous la deuxième forme il est clair que, si les propriétés précédentes sont réalisées pour un intervalle I , elles le sont pour tout intervalle $J \supset I$.

D'après le théorème 5 un ensemble de Hadamard est ensemble de Sidon. On démontre que tout ensemble d'interpolation est ensemble de Sidon [8]. Un ensemble de Sidon est nécessairement dénombrable discret et assez lacunaire (cf. [6]) ; mais on peut construire des ensembles de Sidon irréguliers qui s'écartent des ensembles de Hadamard (cf. plus loin remarque 2).

Il n'est pas possible d'avoir la condition

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |a(\lambda)| \leq C \sup_{x\in I} |P(x)| ,$$

pour un intervalle I arbitrairement petit, avec la même constante C . En effet, il suffit de considérer le polynôme trigonométrique $P(x) = e^{i\lambda x} - e^{i\lambda' x}$ avec λ , $\lambda' \in \Lambda$, $\lambda \neq \lambda'$; on doit avoir

$$2 \leq C |I| \, |\lambda - \lambda'| ,$$

ce qui montre que $|I|$ est borné inférieurement.

Néanmoins le théorème 5 nous montre que, dans le cas des ensembles de Hadamard, on peut prendre l'intervalle I arbitrairement petit avec la même constante C , à condition de supprimer un nombre fini de termes de Λ .

Définition. On dira que Λ est un ensemble de Sidon de première espèce s'il existe une constante C ne dépendant que de Λ telle que, pour tout intervalle I , on ait :

$$(2) \qquad \sum_{\lambda\in\Lambda_I} |a(\lambda)| \leq C \sup_{x\in I} |P(x)| ,$$

pour tout polynôme trigonométrique

$$P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_I} a(\lambda)\, e^{i\lambda x} ,$$

où Λ_I désigne un sous-ensemble de Λ ne différant de Λ que par un nombre fini de termes.

Avec cette terminologie un ensemble de Hadamard est ensemble de Sidon de première espèce.

Une conséquence de la définition est que toute fonction $f \in C_{\Lambda_I}(I)$ qui est limite uniforme sur I de polynômes trigonométriques à spectre dans Λ_I s'écrit

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_I} a(\lambda)\, e^{i\lambda x} ,$$

avec $\sum_{\lambda \in \Lambda_I} |a(\lambda)| < \infty$. Par suite, toute fonction $g \in C_\Lambda(I)$, qui est somme d'une fonction de $C_{\Lambda_I}(I)$ et d'un polynôme trigonométrique à spectre dans $\Lambda \setminus \Lambda_I$ s'écrit :

$$g(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} b(\lambda) e^{i\lambda x} ,$$

avec $\sum_{\lambda \in \Lambda} |b(\lambda)| < \infty$. Donc $C_\Lambda(I) \subset B(I)$ pour tout intervalle I . C'est cette dernière propriété que J. P. Kahane prend comme définition d'un ensemble de Sidon de première espèce [6] . La propriété $C_\Lambda(I) \subset B(I)$ est elle-même équivalente, comme nous l'avons déjà dit, à l'existence d'une constante C_I telle que :

$$(3) \qquad \sum_{\lambda \in \Lambda} |a(\lambda)| \leq C_I \sup_{x \in I} |P(x)| ,$$

pour tout polynôme trigonométrique

$$P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda)\, e^{i\lambda x} .$$

Mais nous ne savons pas si la propriété (3) supposée vraie pour tout intervalle I, entraîne la propriété (2) avec une constante C indépendante de I.

Les théorèmes 2, 3, 4 demeurent vrais pour les ensembles de Sidon de première espèce. Mais la propriété (2) et l'existence de la constante C indépendante de I ont des conséquences supplémentaires. Tout d'abord nous avons :

$$2 \leq C|I| \inf_{\substack{\lambda, \lambda' \in \Lambda \\ \lambda \neq \lambda'}} |\lambda - \lambda'| \quad ,$$

et lorsque $|I|$ tend vers 0, nous en déduisons :

$$\lim_{\substack{\lambda, \lambda' \to \infty \\ \lambda \neq \lambda'}} |\lambda - \lambda'| = \infty \quad . \tag{4}$$

Les ensembles de Sidon de première espèce sont donc régulièrement lacunaires. Mais nous verrons qu'il en existe qui ne sont pas des ensembles de Hadamard, ni même des réunions finies d'ensembles de Hadamard.

D'autre part les ensembles de Sidon de première espèce sont arbitrairement stables. On entend par là que, étant donné α arbitrairement grand, tout ensemble $\Lambda' = (\lambda'_j)$ tel que $|\lambda'_j - \lambda_j| \leq \alpha$ est encore un ensemble de Sidon de première espèce. Pour cette question ainsi que pour le problème connexe de "l'élargissement" des ensembles de Sidon, on se reportera à [9], [10].

Les ensembles d'interpolation.

Pour les ensembles de Hadamard les propriétés résumées par le théorème 5 sont étroitement liées à la propriété d'approximation par les polynômes trigonométriques. Dans la deuxième partie nous examinerons ce qu'il en est dans le cas général des ensembles d'interpolation.

On ne peut espérer que tout ensemble d'interpolation soit ensemble de Sidon de première espèce à cause de la condition (4) ; en effet on sait par exemple, que si Λ est d'interpolation, l'ensemble $\Lambda \cup (\Lambda + \alpha)$ est aussi d'interpolation pour α assez petit. Mais il s'avère que la propriété (2) demeure valable dans le cas général à condition de remplacer l'intervalle I par la réunion d'un nombre fini d'intervalles de longueur arbitrairement petite (théorème 11).

On déduit de là le résultat suivant :

THEOREME 6. <u>Tout ensemble d'interpolation est réunion finie d'ensembles de Sidon de première espèce.</u>

Supposons que Λ soit réunion de k ensembles de Sidon de première espèce. Pour tout $\ell > 0$ écrivons :

$$N(\ell) = \overline{\lim_{|x|\to\infty}} \ \mathrm{card}\ (\Lambda \cap [x, x+\ell]\ ).$$

Alors, il est clair que l'on a $N(\ell) \leq k$ pour tout ℓ .

Nous utiliserons dans la suite le critère suivant.

LEMME 1. <u>Pour qu'un ensemble</u> Λ <u>soit d'interpolation, il suffit qu'il existe</u> $0 < \delta < 1$ <u>tel que, pour toute fonction</u> $\beta(\lambda)$ <u>à valeurs</u> ± 1 , <u>on puisse trouver un polygône trigonométrique</u> P <u>tel que</u>

$$|P(\lambda) - \beta(\lambda)| \leq \delta \qquad (\lambda \in \Lambda)\ .$$

On sait que les limites uniformes sur $\mathbb{R}$ des polynômes trigonométriques forment une algèbre de Banach de fonctions pour la norme uniforme, appelées fonctions presque-périodiques. Le spectre de cette algèbre est un compact qui contient $\mathbb{R}$ comme sous-ensemble dense (pour la topologie du spectre) et qu'on appelle le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$. Les fonctions presque-périodiques se trouvent être les restrictions à $\mathbb{R}$ des fonctions continues sur le compactifié de Bohr. Pour toutes ces questions on pourra se reporter à [15] .

Etant donné une fonction $\beta(\lambda) = \pm 1$ nous poserons $\Lambda_1 = \beta^{-1}(1)$ et $\Lambda_{-1} = \beta^{-1}(-1)$. L'hypothèse du lemme signifie que les ensembles Λ_1 et Λ_{-1} ont des adhérences disjointes dans le compactifié de Bohr et par suite il existe une fonction presque périodique f telle que $f(\lambda) = 1$ si $\lambda \in \Lambda_1$ et $f(\lambda) = -1$ si $\lambda \in \Lambda_{-1}$. Donc $f(\lambda) = \beta(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $\beta(\lambda)$ est limite uniforme sur Λ de polynômes trigonométriques.

Il suffit alors de se rappeler que toute fonction bornée sur Λ est limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions à valeurs ± 1 .

Remarque. Il peut être commode d'utiliser le critère précédent en faisant intervenir les fonctions $\beta(\lambda)$ à valeurs 0 , 1 ; il faut alors supposer $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

II. Le cas des ensembles de Hadamard.

Soit une suite croissante de nombres réels $\lambda_j > 0$ et une suite d'intervalles fermés Δ_j de longueur $\frac{1}{2} - \alpha$, où α est un paramètre $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$. On désigne par E_j l'ensemble des nombres réels x tels que $x\lambda_j \in \Delta_j \pmod 1$. Chaque E_j est un ensemble fermé périodique de période $\frac{1}{\lambda_j}$ et consiste en une réunion d'intervalles de longueur $\frac{1}{\lambda_j}(\frac{1}{2} - \alpha)$. On cherche des conditions sur la suite λ_j pour que l'on ait, quel que soit le choix des Δ_j ,

$$(1) \qquad \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \neq \emptyset \quad .$$

Nous utiliserons essentiellement les deux remarques suivantes qui sont évidentes si l'on veut bien faire un dessin.

a) Considérons un intervalle fermé Δ. Si la longueur de Δ est supérieure à $\frac{3}{2}$ fois la période de l'ensemble E_j, c'est-à-dire si

(2) $$|\Delta| \geq \frac{3}{2}\frac{1}{\lambda_j} ,$$

alors on est assuré que Δ contient un intervalle entier de l'ensemble E_j.

b) Supposons que la condition (2) ne soit pas satisfaite. Néanmoins, puisque le complémentaire de E_j consiste en une réunion d'intervalles de longueur $\frac{1}{\lambda_j}(\frac{1}{2}+\alpha)$, Δ contiendra des points de E_j dès que la condition

(3) $$|\Delta| \geq \frac{1}{\lambda_j}(\frac{1}{2}+\alpha) ,$$

sera satisfaite. Alors Δ ne contiendra pas nécessairement un intervalle entier de E_j mais au moins un sous-intervalle de longueur

(4) $$\frac{1}{2}[\ |\Delta| - \frac{1}{\lambda_j}(\frac{1}{2}+\alpha)] .$$

Ces deux simples remarques vont nous permettre de donner une réponse à notre problème pour les ensembles de Hadamard. On supposera donc désormais $\frac{\lambda_j}{\lambda_{j-1}} = q_j \geq q > 1$.

Nous utiliserons les remarques (a) et (b) en prenant comme intervalle Δ un intervalle quelconque de E_{j-1}, de longueur $\frac{1}{\lambda_{j-1}}(\frac{1}{2}-\alpha)$. Deux possibilités peuvent se présenter :

1. Ou bien la condition (2) est vérifiée, c'est-à-dire ici

(5) $$q_j \geq \frac{3}{1-2\alpha} ,$$

et alors un intervalle de E_{j-1} contient nécessairement un intervalle entier de E_j.

2. Ou bien la condition (2) n'est pas vérifiée mais seulement la condition (3) qui s'écrit ici :

$$q_j \geq \frac{1+2\alpha}{1-2\alpha} ;$$

et se trouve réalisée dès que

(6) $$q \geq \frac{1+2\alpha}{1-2\alpha} ;$$

et alors un intervalle de E_{j-1} contient un sous-intervalle de E_j de longueur $\frac{1}{2}[\frac{1}{\lambda_{j-1}}(\frac{1}{2}-\alpha) - \frac{1}{\lambda_j}(\frac{1}{2}+\alpha)]$. Mais nous pouvons utiliser à nouveau la remarque (a) en prenant ce sous-intervalle comme intervalle Δ. Nous serons assurés qu'il contient un intervalle entier de E_{j+1} dès que la condition (2) sera vérifiée, c'est-à-dire si l'on a :

(7) $$\frac{1}{2}[\frac{1}{\lambda_{j-1}}(\frac{1}{2}-\alpha) - \frac{1}{\lambda_j}(\frac{1}{2}+\alpha)] \geq \frac{3}{2}\,\frac{1}{\lambda_{j+1}} .$$

Un calcul élémentaire montre que (7) est entraînée par la condition

(8) $$q_j\, q_{j+1} \geq \frac{6q}{q-1-2\alpha\,(q+1)} .$$

Etant donné un ensemble de Hadamard, on peut toujours choisir α assez-petit pour que (6) soit vérifiée. Soit alors Q tel que

(9) $$Q > \frac{6q}{q-1} .$$

Il est possible de prendre α de façon que l'on ait aussi

$$Q \geq \frac{6q}{q-1-2\alpha(q+1)} .$$

La condition (8) se trouvera satisfaite si l'on a

(10) $$q_j\, q_{j+1} \geq Q .$$

Finalement si l'on suppose que l'on a la condition (10) vraie pour tout j et si l'on choisit α assez petit, l'une ou l'autre des possibilités 1) et 2) se présente nécessairement. Nous allons voir qu'il est alors possible de conclure.

En effet, partons d'un intervalle quelconque Δ de E_1. Il peut se faire que $q_2 \geq \frac{3}{1-2\alpha}$, auquel cas Δ contient un intervalle entier de E_2. Sinon on est dans le deuxième cas et Δ contient un sous-intervalle de E_2 qui lui-même contient un intervalle entier de E_3. Il ne reste plus qu'à répéter l'argument de proche en proche, ce qui nous donne : il existe une suite n_k d'indices $(n_k < n_{k+1} \leq n_k+2)$ telle que, pour tout k, $\Delta \cap E_2 \cap E_3 \cap \ldots \cap E_{n_k}$ contient un intervalle de E_{n_k+1}. On en conclut que (1) a lieu et même, de façon plus précise, Δ contient un point de $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$. Ou encore tout intervalle de longueur $\frac{3}{2\lambda_1}$, qui contient un intervalle Δ, contient un point de $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$.

Remarquons que le choix de α qui a été fait ne dépend finalement que de q et Q.

Nous pouvons résumer le résultat obtenu en termes d'approximations diophantiennes en faisant intervenir les centres α_j des intervalles Δ_j et en posant $\delta = \frac{\alpha}{2}$.

THEOREME 7. <u>Soit</u> (λ_j) <u>un ensemble de Hadamard</u> $(\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \geq q > 1)$ <u>vérifiant la condition</u>

$$\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_{j-1}} \geq Q > \frac{6q}{q-1} \qquad (j = 2, 3, \dots) .$$

<u>Il existe</u> $\delta > 0$ <u>ne dépendant que de</u> q <u>et</u> Q , <u>tel que, quels que soient les nombres réels</u> α_j , <u>tout intervalle de longueur</u> $\frac{3}{2\lambda_1}$ <u>contient un nombre</u> x <u>solution du système</u>

$$\|\lambda_j x - \alpha_j\| < \frac{1}{4} - \delta \qquad (j = 1, 2, \dots) .$$

En particulier on a toujours $\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_{j-1}} \geq q^2$. La condition du théorème sera satisfaite si

$$q^2 > \frac{6q}{q-1} ,$$

ce qui donne $q > 3$. On retrouve un résultat classique annoncé dans l'introduction et qui peut être établi directement à l'aide de (5) :

COROLLAIRE. <u>Soit</u> (λ_j) <u>un ensemble de Hadamard tel que</u> $\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \geq q > 3$. <u>Quels que soient les nombres réels</u> α_j , <u>tout intervalle de longueur</u> $\frac{3}{2\lambda_1}$ <u>contient un nombre</u> x <u>solution du système</u>

$$\|\lambda_j x - \alpha_j\| \leq \frac{1}{4} - \delta \qquad (j = 1, 2, \dots) ,$$

<u>pour</u> $0 < \delta \leq \delta(q)$.

Remarque 1. Si l'on se reporte à la démonstration précédente on verra que l'on peut prendre $\delta(q) = \frac{q-3}{4q}$ dans l'énoncé du corollaire. C'est peut-être la meilleure valeur possible de $\delta(q)$; en tout cas on voit que $\delta(q)$ est aussi voisin que l'on veut de $\frac{1}{4}$ pour des valeurs de q assez grandes. Cette remarque va nous permettre de construire des ensembles (λ_j) pour lesquels la propriété du corollaire est vraie (avec un δ convenable) et qui ne sont ni des ensembles de Hadamard ni même des réunions finies d'ensembles de Hadamard.

Soit (μ_j) et (ν_j) deux suites de réels telles que l'ensemble $(\mu_j) \cup (\nu_j)$ possède la propriété du corollaire avec un $\delta > \frac{1}{8}$ alors l'ensemble (λ_j), où $\lambda_j = \mu_j + \nu_j$, possède également la propriété du corollaire avec $\delta' > 0$. En effet, étant donné une suite de nombres réels α_j, il existe un réel x tel que

$$\left.\begin{array}{l} \|\mu_j x - \alpha_j\| < \frac{1}{4} - \delta \\ \|\nu_j x\| < \frac{1}{4} - \delta \end{array}\right. \qquad (j = 1, 2, \ldots) ;$$

on en déduit aussitôt

$$\|\lambda_j x - \alpha_j\| < \frac{1}{2} - 2\delta = \frac{1}{4} - \delta' \quad (j = 1, 2, \ldots) .$$

On pourra prendre par exemple $\mu_j = q^{2j}$ et $\nu_j = q^{2k_j+1}$, avec $q > 6$ et k_j une suite croissante d'entiers positifs. L'ensemble $(\mu_j) \cup (\nu_j)$ est contenu dans l'ensemble (q^j) qui vérifie la propriété du corollaire avec $\delta > \frac{1}{8}$. Nous pouvons choisir la suite k_j de façon que (λ_j) soit un ensemble à lacunarité irrégulière. Prenons par exemple

$$k_j = (n+1)^2 \qquad \text{si} \qquad n^2 < j \leq (n+1)^2 .$$

Pour un ensemble qui est réunion finie d'ensembles de Hadamard on vérifie sans peine que le nombre de points de l'ensemble compris dans l'intervalle $[A^n, A^{n+1}]$ doit être borné uniformément en n, quel que soit $A > 0$. Or ici le nombre de points de (λ_j) compris dans l'intervalle $[q^{2(n+1)^2+1}, q^{2(n+1)^2+2}]$ augmente indéfiniment avec n.

Démonstration des théorèmes 1 et 5.

Considérons maintenant le cas général d'un ensemble de Hadamard quelconque $\Lambda = (\lambda_j)$. Soit n le plus petit entier tel que $q^n > \frac{6q}{q-1}$. Posons

$$\Lambda_k = (\lambda_{jn+k})_{j=o}^{\infty} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) .$$

On a évidemment $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{n} \Lambda_k$ et de plus, pour tout k,

$$\frac{\lambda_{(j+1)n+k}}{\lambda_{jn+k}} \geq q^n \quad .$$

Il en résulte de façon évidente que chacun des ensembles $\Lambda_k \cup \Lambda_\ell$ $(k \neq \ell)$ vérifie les hypothèses du théorème 7 avec $Q = q^n$. La conclusion du théorème 7 est alors valable avec un δ ne dépendant que de q et indépendant de k et ℓ.

Etant donné une fonction $\beta(\lambda)$ définie sur Λ et à valeurs 0 ou 1 nous allons construire un polynôme trigonométrique qui approche la fonction $\beta(\lambda)$ uniformément sur Λ. Nous poserons

$$\Lambda' = \beta^{-1}(1) \qquad \Lambda'' = \beta^{-1}(0) \quad ,$$

$$\Lambda'_k = \Lambda' \cap \Lambda_k \qquad \Lambda''_k = \Lambda'' \cap \Lambda_k \qquad (k = 1, \ldots, n) .$$

Nous pouvons appliquer le théorème 7 à chaque ensemble $\Lambda_k \cup \Lambda_\ell$ en prenant les nombres α_j égaux à 0 ou à $\frac{1}{2}$ de façon arbitraire. Ainsi, pour tout couple d'indices k, ℓ $(k \neq \ell)$ il existe $\xi_{k,\ell}$, $0 \leq \xi_{k,\ell} \leq \frac{3}{2\lambda_1}$ tel que

$$\|\xi_{k,\ell}\lambda\| < \frac{1}{4} - \delta \quad \text{si} \quad \lambda \in \Lambda'_k \quad ,$$

$$\|\xi_{k,\ell}\lambda - \frac{1}{2}\| < \frac{1}{4} - \delta \quad \text{si} \quad \lambda \in \Lambda''_k \cup \Lambda_\ell \quad .$$

Soit une fonction périodique de période 1, à série de Fourier absolument convergente

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{2\pi i \nu x} \qquad (C = \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_\nu| < +\infty) \quad ,$$

telle que

$$\Phi(x) = 1 \qquad \text{si} \quad \|x\| < \frac{1}{4} - \delta \quad ,$$

$$\Phi(x) = 0 \qquad \text{si} \quad \|x - \frac{1}{2}\| < \frac{1}{4} - \delta \ .$$

Etant donné $\varepsilon > 0$ soit N tel que $\sum_{|\nu|>N} |a_\nu| < \varepsilon$; posons

$$P(x) = \sum_{-N}^{+N} a_\nu e^{2\pi i\nu x} .$$

Il est facile de vérifier alors que le polynôme trigonométrique

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{1\leq \ell\leq n \\ \ell\neq k}} P(\xi_{k,\ell}\, x) \quad ,$$

constitue une approximation uniforme sur Λ de la fonction $\beta(\lambda)$ avec une erreur inférieure à $n\,C^{n-2}\varepsilon$. Soit $0 < \gamma < \frac{1}{2}$; il suffit de choisir ε de façon que $n\,C^{n-2}\varepsilon \leq \gamma$ pour que les conditions du lemme 1 soient satisfaites. Ceci démontre donc le théorème 1 .

Mais nous avons démontré en fait quelque chose de plus précis. Tout d'abord rappelons que n et δ ont été choisis seulement en fonction de q ; par suite il en est de même de la constante C . L'entier N dépend de q et γ mais est indépendant de la fonction $\beta(\lambda)$. Ecrivons :

$$Q(x) = \sum b(\zeta) e^{i\zeta x} .$$

Il est clair que l'on a

$$\sum |b(\zeta)| \leq n\,(\sum |a_\nu|)^{n-1} = n\,C^{n-1} \quad ;$$

d'autre part l'ensemble des fréquences du polynôme Q se trouve situé dans l'intervalle

$$\frac{-3\pi N(n-1)}{\lambda_1} \leq \zeta \leq \frac{3\pi N(n-1)}{\lambda_1} .$$

Nous avons donc obtenu le résultat suivant.

THEOREME 8. *Soit* $\Lambda = (\lambda_j)$ *un ensemble de Hadamard, avec* $\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \geq q > 1$. *Soit* $0 < \gamma < \frac{1}{2}$. *Il existe deux constantes positives* $A = A(q, \gamma)$, $B = B(q)$ *telles que, pour toute suite* $\beta_j = 0, 1$, *il existe un polynôme trigonométrique*

$$Q(x) = \Sigma\ b(\zeta)\, e^{i\zeta x} \qquad (\Sigma\ |b(\zeta)| \leq B)$$

dont les fréquences sont situées dans l'intervalle $|\zeta| \leq \frac{A}{\lambda_1}$ *et tel que* $|Q(\lambda_j) - \beta_j| \leq \gamma \quad (j = 1, 2, \ldots)$.

En effet, il suffit de poser $B = nC^{n-1}$ et $A = 3\pi N(n-1)$. Remarquons d'ailleurs que le raisonnement précédent montre aussi que le nombre de termes de Q ne dépend que de q et γ.

Le théorème 8 n'est qu'une formulation duale du théorème 5. Pour s'en convraincre, on utilisera le lemme suivant. On désigne par $\hat{\mu}$ la transformée de Fourier d'une mesure de Radon bornée μ :

$$\hat{\mu}(\lambda) = \int e^{i\lambda x}\, d\mu(x).$$

LEMME 2. *Soit* K *un compact de* $\mathbb{R}$. *Supposons qu'il existe des constantes* $B > 0$ *et* $\delta < 1$ *telles que, pour toute fonction* $\beta(\lambda)$ *à valeurs* ± 1 *sur* Λ, *on ait une mesure* μ *à support dans* K, *de norme* $\|\mu\| \leq B$, *telle que*

$$|\hat{\mu}(\lambda) - \beta(\lambda)| \leq \delta \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

Alors il existe une constante C *ne dépendant que de* B *et* δ, *telle que, pour tout polynôme trigonométrique* $P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda)\, e^{i\lambda x}$, *on ait :*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |a(\lambda)| \leq C \sup_{x \in K \cup (-K)} |P(x)|.$$

Dans la démonstration du lemme nous supposerons d'abord que le polynôme P est à coefficients réels. Posons alors

$$\beta(\lambda) = \frac{a(\lambda)}{|a(\lambda)|} \quad ,$$

et soit μ la mesure relative à la fonction $\beta(\lambda)$, dont l'existence est supposée dans le lemme. Nous aurons

$$\left| \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda)\, \hat{\mu}(\lambda) \right| = \left| \int P(x)\, d\mu(x) \right| \leq B \sup_{x \in K} |P(x)| \quad ,$$

et d'autre part

$$\left| \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) \hat{\mu}(\lambda) \right| \geq \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda)\, \beta(\lambda) \right| - \delta \sum_{\lambda \in \Lambda} |a(\lambda)| \quad ,$$

$$\geq (1-\delta) \sum_{\lambda \in \Lambda} |a(\lambda)| \quad .$$

On a la conclusion du lemme avec la constante $C = \dfrac{B}{1-\delta}$.

Dans le cas général d'un polynôme trigonométrique P à coefficients quelconques, on peut écrire

$$P(x) = Q(x) + i\, R(x) \quad ,$$

où Q et R sont des polynômes à coefficients réels. Si l'on pose $a(\lambda) = b(\lambda) + ic(\lambda)$ avec $b(\lambda)$ et $c(\lambda)$ réels, on aura

$$Q(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} b(\lambda)\, e^{i\lambda x} = \frac{1}{2} \left(P(x) + \overline{P(-x)}\right) ,$$

$$R(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\, e^{i\lambda x} = \frac{1}{2i} \left(P(x) - \overline{P(-x)}\right) .$$

Le résultat antérieur appliqué aux polynômes Q et R donne

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |b(\lambda)| \leq C \sup_{x\in K} |Q(x)| \leq C \sup_{x\in K\cup(-K)} |P(x)| \quad ,$$

$$\sum_{\lambda\in K} |c(\lambda)| \leq C \sup_{x\in K} |R(x)| \leq C \sup_{x\in K\cup(-K)} |P(x)| \quad ,$$

d'où l'on déduit finalement :

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |a(\lambda)| \leq 2C \sup_{x\in K\cup(-K)} |P(x)| \ .$$

Pour obtenir le théorème 5 à partir du théorème 8 , nous utiliserons le lemme 2 en prenant pour compact K l'intervalle $[-\frac{A}{\lambda_1}, \frac{A}{\lambda_1}]$. Etant donné une fonction $\beta(\lambda) = \pm 1$ sur $\Lambda = (\lambda_j)$ nous poserons $\beta_j = \dfrac{1+\beta(\lambda_j)}{2}$. Alors le polynôme trigonométrique Q du théorème 8 , relatif à la suite β_j satisfait l'inégalité

$$|2Q(\lambda_j) - 1 - \beta(\lambda_j)| \leq 2\gamma < 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots) .$$

C'est là exactement l'hypothèse du lemme 2 car le polynôme trigonométrique $2Q(x) - 1$ se trouve être la transformée de Fourier d'une mesure atomique portée par l'intervalle $[-\frac{A}{\lambda_1}, \frac{A}{\lambda_1}]$ et de norme $\leq 2B+1$.

Remarque 2. Les démonstrations des théorèmes 1 et 8 se simplifient beaucoup dans le cas où $q > 3$. Les théorèmes 1 , 8 , 5 sont alors des conséquences du corollaire du théorème 7 et par conséquent subsistent pour les ensembles (λ_j) qui possèdent la propriété du corollaire. Ainsi par exemple, l'ensemble que nous avons construit à la suite de la remarque 1 est donc à la fois ensemble d'interpolation et ensemble de Sidon de première espèce, tout en n'étant pas réunion finie d'ensembles de Hadamard.

III. Le cas général des ensembles d'interpolation.

On peut considérer qu'un polynôme trigonométrique à fréquences réelles et à coefficients complexes $P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\xi_k x}$ est défini par la donnée de l'entier n et des vecteurs $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. On écrira $P(x) = P(n, a, \xi, x)$.

Etant donné $0 < \delta < 1$ désignons par F l'ensemble des polynômes trigonométriques dont les valeurs sur Λ sont égales à 1 ou à -1, à δ près. Etant donné un entier $n > 0$, $a \in \mathbb{C}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ et un nombre réel $\varepsilon > 0$, on notera $F(n, a, \xi, \varepsilon)$ le sous-ensemble des polynômes trigonométriques $P \in F$ qui s'écrivent $P(x) = P(n, a, \zeta, x)$ avec

$$|\zeta - \xi| = \sup_{1 \leq i \leq n} |\zeta_i - \xi_i| \leq \varepsilon .$$

Soit E l'ensemble des fonctions $\beta(\lambda)$ définies sur Λ et à valeurs ± 1. Il existe une application φ de F dans E qui à tout polynôme $P \in F$ fait correspondre la fonction $\beta(\lambda)$ telle que:

$$|P(\lambda) - \beta(\lambda)| \leq \delta \qquad (\lambda \in \Lambda) .$$

Dire que Λ est d'interpolation revient à dire, d'après le critère du lemme 1 que φ est surjective. D'autre part on vérifie aisément que φ est continue si l'on met sur E et F la topologie de la convergence simple sur Λ. Muni de cette topologie E est d'ailleurs un espace compact. Enfin on désignera par $E(n, a, \xi, \varepsilon)$ l'image par φ de $F(n, a, \xi, \varepsilon)$.

L'ensemble E est réunion dénombrable d'ensembles $E(n, a, \xi, \varepsilon)$. En effet, soit $\beta(\lambda)$ une fonction à valeurs ± 1 ; il existe un polynôme trigonométrique Q tel que :

$$|Q(\lambda) - \beta(\lambda)| \leq \frac{\delta}{2} \qquad (\lambda \in \Lambda) ,$$

puisque Λ est d'interpolation. Ecrivons :

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k e^{i\zeta_k x} .$$

Il existe $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, à coordonnées rationnelles (pour les a_k on entend que partie réelle et partie imaginaire sont rationnelles) tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| \leq \frac{\delta}{2} ,$$

$$\sup_{1 \leq k \leq n} |\xi_k - \zeta_k| \leq \varepsilon ,$$

où ε est rationnel. Alors le polynôme trigonométrique :

$$P(x) = P(n , a , \zeta , x) ,$$

qui appartient à $F(n , a , \xi , \varepsilon)$ vérifie la propriété :

$$|P(\lambda) - \beta(\lambda)| \leq \delta \qquad (\lambda \in \Lambda) ;$$

on a donc $\beta \in E(n , a , \xi , \varepsilon)$. Ceci démontre la propriété puisque les paramètres $n , a , \xi , \varepsilon$ ne prennent qu'une infinité dénombrable de valeurs.

De plus chaque ensemble $F(n , a , \xi , \varepsilon)$ est compact puisque c'est l'image du pavé $|\zeta - \xi| \leq \varepsilon$ de $\mathbb{R}^n$ par l'application qui à tout ζ fait correspondre le polynôme trigonométrique $P(n , a , \zeta , x)$ et qui est continue de $\mathbb{R}^n$ dans F comme on le vérifie aisément. Finalement $E(n , a , \xi , \varepsilon)$ est lui-même compact comme image de $F(n , a , \xi , \varepsilon)$ par l'application φ.

E étant compact donc espace de Baire, et réunion dénombrable de $E(n , a , \xi , \varepsilon)$, il existe un entier $n > 0$, $a \in \mathbb{C}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$ tels que $E(n , a , \xi , \varepsilon)$ est d'intérieur non vide. $E(n , a , \xi , \varepsilon)$ contient alors nécessairement un ouvert cylindrique de E, c'est-à-dire un ensemble de fonctions $\beta(\lambda)$ dont les valeurs sont fixées sur un sous-ensemble fini de Λ et quelconques sur son complémentaire $\tilde{\Lambda}$. On peut énoncer ce résultat sous la forme suivante :

THEOREME 9. Soit Λ un ensemble d'interpolation. Etant donné $0 < \delta < 1$, il existe un entier $n > 0$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour toute fonction $\beta(\lambda) = \pm 1$, on puisse trouver un polynôme

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\zeta_k x}$$

avec $\sup_{1 \le k \le n} |\zeta_k - \xi_k| \le \varepsilon$, tel que $|P(\lambda) - \beta(\lambda)| \le \delta \qquad (\lambda \in \tilde{\Lambda})$

où $\tilde{\Lambda}$ désigne un sous-ensemble de Λ de complémentaire fini.

Nous pouvons déduire de là un résultat plus fin. En effet, reprenant les notations antérieures, le pavé $|\zeta - \xi| \le \varepsilon$ de $\mathbb{R}^n$ peut être écrit comme réunion de 2^n pavés $|\zeta - \xi^{(i)}| \le \frac{\varepsilon}{2}$ $(i = 1, \ldots, 2^n)$ où les $\xi^{(i)}$ sont des points du pavé initial. Il est clair alors que

$$E(n, a, \xi, \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{2^n} E(n, a, \xi^{(i)}, \frac{\varepsilon}{2})$$

et, en poursuivant le raisonnement du théorème 9, on conclut que l'un au moins des ensembles $E(n, a, \xi^{(i)}, \frac{\varepsilon}{2})$ est d'intérieur non vide. Par suite la conclusion du théorème 9 est encore valable si l'on remplace ξ par l'un des $\xi^{(i)}$, ε par $\frac{\varepsilon}{2}$ et $\tilde{\Lambda}$ par $\tilde{\Lambda}_1$ convenable ($\Lambda \setminus \tilde{\Lambda}_1$ fini).

Naturellement on peut itérer cet argument. On montre ainsi l'existence d'une suite de pavés emboités $|\zeta - \omega_\nu| \le \frac{\varepsilon}{2^\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ avec $\omega_0 = \xi$ auxquels correspondent des ensembles $E(n, a, \omega_\nu, \frac{\varepsilon}{2^\nu})$ d'intérieur non vide. La suite ω_ν converge vers $\omega \in \mathbb{R}^n$ et il est clair que l'on a :

$$E(n, a, \omega_\nu, \frac{\varepsilon}{2^\nu}) \subset E(n, a, \omega, \frac{\varepsilon}{2^{\nu-1}})$$

puisque le pavé $|\zeta-\omega_\nu| \leq \frac{\varepsilon}{2^\nu}$ est contenu dans le pavé $|\zeta-\omega| \leq \frac{\varepsilon}{2^{\nu-1}}$. Donc quel que soit ν, $E(n, a, \omega, \frac{\varepsilon}{2^{\nu-1}})$ est d'intérieur non vide et le théorème 9 demeure valable si l'on remplace ξ par ω, ε par $\frac{\varepsilon}{2^{\nu-1}}$ et $\widetilde{\Lambda}$ par $\widetilde{\Lambda}_\nu$ convenable ($\Lambda \setminus \widetilde{\Lambda}_\nu$ fini). Ce que l'on peut énoncer sous la forme suivante :

THEOREME 10. Soit Λ un ensemble d'interpolation et $0 < \delta < 1$. Il existe un entier $n > 0$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ ne dépendant que de Λ et δ, et pour tout $\alpha > 0$ un sous-ensemble Λ_α de Λ ($\Lambda \setminus \Lambda_\alpha$ fini) tels que, quelle que soit la fonction $\beta(\lambda) = \pm 1$, on puisse trouver un polynôme trigonométrique

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\zeta_k x} ,$$

avec

$$\sup_{1\leq k\leq n} |\zeta_k - \omega_k| \leq \alpha ,$$

pour lequel

$$|P(\lambda) - \beta(\lambda)| \leq \delta \qquad (\lambda \in \Lambda_\alpha) .$$

Ce résultat assez précis et étonnant montre que l'on peut réaliser l'interpolation de toutes les fonctions ± 1 sur Λ_α, à δ près, à l'aide de polynômes trigonométriques ayant tous le même nombre de termes, les mêmes cœfficients et les mêmes fréquences à α près.

Un polynôme trigonométrique

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\zeta_k x} ,$$

peut s'interpréter comme la transformée de Fourier de la mesure atomique

$$\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{\zeta_k} ,$$

dont la norme est $\|\mu\| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ et le support $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ est contenu dans le compact

$$K_\alpha = \bigcup_{k=1}^{n} (\omega_k + [-\alpha, +\alpha]).$$

Utilisant alors le critère du lemme 2, on en déduit le résultat suivant qui est ici l'analogue du théorème 5 .

THEOREME 11. <u>Soit</u> Λ <u>un ensemble d'interpolation. Il existe un entier</u> $n > 0$, n <u>nombres réels</u> $\omega_1, \dots, \omega_n$ <u>et une constante</u> C , <u>ne dépendant que de</u> Λ , <u>tels que, pour tout intervalle</u> I , <u>on ait</u> :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_I} |a(\lambda)| \leq C \sup_{x \in \bigcup_{k=1}^{n} (\omega_k + I)} |P(x)| ,$$

<u>pour tout polynôme trigonométrique</u> $P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_I} a(\lambda) e^{i\lambda x}$, <u>où</u> Λ_I <u>désigne un sous-ensemble de</u> Λ , <u>de complémentaire fini.</u>

Remarquons que dans l'énoncé du théorème 11, les notations diffèrent un peu de celles du paragraphe précédent ; en effet, il faut comprendre que l'on a rajouté aux points $\omega_1, \dots, \omega_n$ leurs symétriques par rapport à 0 , conformément à la proposition du lemme 2 .

Dans le cas où $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n$, Λ est un ensemble de Sidon de première espèce. Mais nous avons vu que ce n'est pas le cas général et par conséquent, le théorème est de ce point de vue le meilleur possible. Le nombre minimum de points ω_k distincts pour lequel on a la conclusion du théorème 11 est une caractéristique intéressante de Λ que l'on pourra comparer avec la notion d'ordre d'un ensemble d'interpolation introduite dans [8] .

En général, on peut dire que les propriétés des ensembles de Hadamard et des ensembles de Sidon de première espèce, qui font intervenir un intervalle I de longueur arbitrairement petite, s'étendent au cas d'un ensemble d'interpolation quelconque à condition de remplacer I par une réunion finie convenable d'intervalles de longueur arbitrairement petite. C'est le cas notamment du théorème 2. Le théorème 3 par exemple se généralise comme suit.

THEOREME 12. Si Λ est un ensemble d'interpolation, il existe un nombre fini de points $\omega_1, \dots, \omega_n$ tels que toute série $\sum_{\lambda\in\Lambda} a(\lambda)\, e^{i\lambda x}$ qui converge dans un voisinage de $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ ou de tout translaté de cet ensemble de points (par un procédé régulier de sommation quelconque) converge absolument.

Le théorème 12 est peut-être susceptible d'amélioration contrairement au théorème 11 (cf. [7]).

Démonstration du théorème 6.

Nous avons eu l'occasion de remarquer que, si le théorème 11 est valable avec $\omega_1 = \dots = \omega_n$, alors Λ est un ensemble de Sidon de première espèce. Ce sera le cas en particulier si, pour au moins un δ $(0 < \delta < 1)$ la conclusion du théorème 10 est valable avec $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) = 0$. Nous allons voir que l'on peut toujours décomposer Λ en une réunion finie de sous-ensembles ayant cette dernière propriété. On aura donc ainsi le théorème 6.

Soit Λ un ensemble d'interpolation et $0 < \delta < 1$. Soient n, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ les éléments qui interviennent dans l'énoncé du théorème 10.

Etant donné $\delta' > 0$, on peut écrire

$$T^n = \bigcup_{j=1}^{p} \Delta_j$$

où les Δ_j sont des pavés de côtés $\leq \delta'$ dans T^n. Désignons par Λ_j l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ tels que

$$(e^{i\omega_1 \lambda}, \ldots, e^{i\omega_n \lambda}) \in \Delta_j .$$

On a évidemment :

$$\Lambda = \bigcup_{j=1}^{p} \Lambda_j .$$

Montrons que, si l'on choisit δ' assez petit, chaque Λ_j est un ensemble de Sidon de première espèce. Etant donné $\alpha > 0$, toute fonction $\beta(\lambda) = \pm 1$ peut être approchée à δ près sur Λ_α ($\Lambda \setminus \Lambda_\alpha$ fini) par un polynôme trigonométrique que l'on peut écrire

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \, e^{i(\omega_k + \xi_k)x} ,$$

avec $|\xi| = \sup_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \leq \alpha$ suivant le théorème 10. Désignons par ρ $\rho_j = (\rho_{j,1}, \ldots, \rho_{j,n})$ un point quelconque de Δ_j. On a évidemment :

$$\sup_{1 \leq k \leq n} \left| e^{i\omega_k \lambda} - \rho_{j,k} \right| \leq \delta' \qquad (\lambda \in \Lambda_j) ,$$

et par suite, si l'on considère le polynôme trigonométrique

$$Q_j(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \rho_{j,k} \, e^{i\xi_k x} ,$$

il diffère assez peu du polynôme P sur Λ_j. De façon précise

$$|P(\lambda) - Q_j(\lambda)| \leq \delta' \sum_{k=1}^{n} |a_k| \qquad (\lambda \in \Lambda_j) ,$$

d'où :

$$|\beta(\lambda) - Q_j(\lambda)| \leq \delta + \delta' \sum_{k=1}^{n} |a_k| \qquad (\lambda \in \Lambda_j \cap \Lambda_\alpha) .$$

Les polynômes Q_j ont des fréquences $|\xi_k| \leq \alpha$; si l'on choisit δ' de façon que $\delta + \delta' \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \delta'' < 1$, ceci montre que la conclusion du théorème 10 vaut pour Λ_j avec $\delta = \delta''$ et $\omega = 0$. Λ_j est donc ensemble de Sidon de première espèce.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARY (N.). - A treatise on trigonometric series. Pergamon Press, New York (1964).

[2] CASSELS . - An introduction to diophantine approximation. Cambridge University Press.

[3] HARTMAN (S.) , RYLL-NARDZEWSKI (C.). - Almost periodic extensions of functions. Coll. Math. 12 (1964, 23-29.

[4] HARTMAN (S.), ROLEWICZ (S.) , RYLL-NARDZEWSKI (C.) . - Ultra Kroneckerian sets. Coll. Math. 16 (1966) .

[5] KAHANE (J. P.). - Pseudopériodicité et séries de Fourier lacunaires. Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 79 (1962), 93-150.

[6] KAHANE (J. P.). - Sur les fonctions moyennes périodiques bornées. Ann. Inst. Fourier, 7 (1967), 293-314.

[7] MELA (J. F.). - Suites lacunaires de Sidon. Ensembles propres et points exceptionnels. Ann. Inst. Fourier, 14 (1964), 533-538

[8] MELA (J. F.). - Sur les ensembles d'interpolation de C. Ryll-Nardzewski et de S. Hartman. Stud. Math., 29 (1968), 167-193.

[9] MELA (J. F.). - Sur certains ensembles exceptionnels en analyse de Fourier. Ann. Inst. Fourier, 18 (1968), 32-71.

[10] MEYER (Y.). - Elargissement des ensembles de Sidon sur la droite. Séminaire d'Analyse Harmonique, Faculté des Sciences d'Orsay (1967-1968).

[11] RYLL-NARDZEWSKI (C.). - Remark on interpolation by periodic functions. Bull. Acad. Polonaise Sci., série des Sci. Math., 11 (1963), 363-366.

[12] STRZELECKI (E.). - On a problem of interpolation by periodic and almost periodic functions. Coll. Math. 11 (1963), 239-248.

[13] ZYGMUND (A.). - Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques et celles de puissances. Stud. Math. III (1931), 77-91.

[14] ZYGMUND (A.). - Trigonometric series. Cambridge University Press. New York (1959).

[15] LOOMIS. - An introduction to abstract Harmonic Analysis. Van Nostrand.
