

ELHANAN MOTZKIN

PHILIPPE ROBBA

**Prolongement analytique en analyse  $p$ -adique**

*Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux* (1968-1969), exp. n° 3, p. 1-47

[http://www.numdam.org/item?id=STNB\\_1968-1969\\_\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969___A3_0)

© Université Bordeaux 1, 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

PROLONGEMENT ANALYTIQUE EN ANALYSE  $p$ -ADIQUE.

par Elhanan MOTZKIN et Philippe ROBBA

-----

PLAN

- § 1. - Introduction
- § 2. - Notations
- § 3. - Polygone de valuation
- § 4. - Condition suffisante d'analyticité
- § 5. - Condition nécessaire d'analyticité
- § 6. - Démonstration du théorème 1
- § 7. - Démonstration des autres proposition du § 4
- § 8. - Démonstration du théorème 2
- § 9. - Fonctions analytiques

-----

§ 1. - Introduction

La théorie des fonctions analytiques dans  $\mathbb{C}$  s'est surtout développée à partir de deux définitions équivalentes :

- la définition de Cauchy exprimant une condition de dérivabilité complexe, l'intérêt principal de cette définition étant dû à l'établissement des formules intégrales de Cauchy.

- la définition de Weierstrass exprimant que localement la fonction est somme de sa série de Taylor, cette définition ayant l'avantage de se généraliser immédiatement à tous les corps ( $\mathbf{R}$  par exemple).

Enfin, Runge a caractérisé les domaines de  $\mathbf{C}$  sur lesquels les fonctions analytiques étaient limite uniforme sur tout compact de fractions rationnelles.

Lorsqu'il a fallu édifier une théorie des fonctions analytiques sur  $\widehat{\Omega}_p$  (fermeture topologique de la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$ , où  $\mathbb{Q}_p$  désigne le corps rationnels muni de la valuation p-adique), on s'est aperçu qu'en l'absence de toute théorie de l'intégration sur  $\widehat{\Omega}_p$  la définition de Cauchy ne convenait pas et on a dû se rabattre sur celle de Weierstrass.

A l'intérieur de son disque de convergence, une fonction somme d'une série entière vérifie bien le principe du prolongement analytique (c'est-à-dire que si la fonction est nulle au voisinage d'un point elle est identiquement nulle). Mais le fait que la distance était ultra métrique [ $d(b, c) \leq \max(d(a; b), d(a, c))$ ] amenait un ennui inattendu : on ne pouvait pas prolonger une somme de série entière en dehors de son disque de convergence par la méthode de Weierstrass puisque le développement en série entière de la fonction autour d'un point arbitraire du disque de convergence donnait toujours le même disque de convergence.

S'inspirant de la méthode de Runge, M. Krasner eut l'idée de définir les fonctions analytiques comme limites uniformes de fractions rationnelles sur des ensembles convenables qu'il a appelé des quasi-connexes. (Plus exactement, ce que l'on définit ainsi c'est un élément analytique, une fonction analytique est définie sur une famille enchaînée de quasi-connexes, sa restriction à chaque quasi-connexe étant un élément analytique). Ces fonctions analytiques vérifient bien le principe du prolongement analytique, (\*) sans lequel on ne saurait parler de fonction analytique.

---

(\*) C'est pour cette raison et par analogie avec le cas des fonctions analytiques sur  $\mathbf{C}$  que M. Krasner a appelé ses ensembles des quasi-connexes, bien qu'ils ne soient nullement connexes.

Mais cette solution très ingénieuse restait pourtant peu satisfaisante pour l'esprit dans la mesure où il n'était pas évident qu'elle fût la meilleure possible : les quasi-connexes sont en quelque sorte "parachutés", et il paraissait possible que d'autres définitions plus compréhensives et d'autres ensembles plus généraux puissent également donner lieu à une théorie convenable de fonctions analytiques. On a été ainsi amené à formuler le problème de la façon suivante : soit  $A$  un sous-ensemble ouvert de  $K$ . On appelle "élément analytique" sur  $A$  une limite uniforme sur  $A$  de fractions rationnelles n'ayant pas de pôles dans  $A$ . Une famille d'ensembles  $(A_i)$  est dite enchaînée si étant donné deux ensembles  $A$  et  $B$  de cette famille, il existe un nombre fini d'ensembles de cette famille, soient  $A_1, \dots, A_n$  tels que  $A_1 = A$ ,  $A_n = B$ ,  $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$   $1 \leq i \leq n-1$ .

Soit alors  $\mathcal{Q}$  une famille de sous-ensembles ouverts de  $K$ . On dira que la fonction  $f$  est analytique sur la famille enchaînée  $(A_i)$  d'éléments de  $\mathcal{Q}$  si sa restriction à chaque  $A_i$  est un élément analytique. On notera que si  $f$  est une fonction définie sur  $\mathcal{Q}$  tel que sa restriction à chaque  $A_i$  d'une famille enchaînée engendrant  $\mathcal{Q}$  est une fonction analytique, alors  $f$  est une fonction analytique sur  $\mathcal{Q}$ . (Ceci signifie que si l'on réitère le procédé de formation des fonctions analytiques on reste dans la même classe de fonctions - démonstration évidente).

Le problème consiste alors à trouver une famille  $\mathcal{Q}$  telle que les fonctions analytiques vérifient le principe du prolongement analytique.

M. Krasner a fourni une réponse partielle à ce problème en proposant les ensembles quasi-connexes. Voyons comment donner une réponse plus satisfaisante.

Notons d'abord que les éléments analytiques sont aussi des fonctions analytiques. Si les éléments analytiques sur  $A$  vérifient le principe du prolongement analytique,  $A$  sera dit analytique. On voit donc qu'il est nécessaire que  $\mathcal{Q}$  soit contenue dans la classe des ensembles analytiques. Montrons alors que la classe des ensembles analytiques répond à notre problème.

Proposition 1 : Une fonction analytique  $f$  sur une famille enchaînée  $(A_i)$  d'ensembles analytiques vérifie le principe du prolongement analytique.

En effet, supposons que  $f$  soit nulle au voisinage d'un point  $x_0$  de  $\bigcup_i A_i$  et soit  $x$  un autre point de  $\bigcup_i A_i$ , il faut montrer que  $f(x) = 0$ . Soient  $A$  et  $B$  respectivement les deux ensembles de la famille enchaînée auxquels appartiennent  $x_0$  et  $x$ . Soient  $A_1 \dots A_n$  les ensembles tels que  $A_1 = A$ ,  $A_n = B$ ,  $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ . La restriction de  $f$  à  $A_1$  étant un élément analytique, et  $f$  étant nulle au voisinage de  $x_0$ ,  $f$  est identiquement nulle dans  $A_1$ , puisque  $A_1$  est analytique.  $A_1$  et  $A_2$  étant ouverts, leur intersection  $A_1 \cap A_2$  est un ouvert non vide dans lequel  $f$  est identiquement nulle. La restriction de  $f$  à  $A_2$  étant un élément analytique,  $f$  est identiquement nulle dans  $A_2$ . De proche en proche, on voit ainsi que  $f$  est identiquement nulle dans  $A_n$ , donc  $f(x) = 0$ .

Notons en passant la remarque intéressante.

Corollaire 1 : La réunion  $\bigcup_i A_i$  d'une famille enchaînée d'ensembles analytiques est un ensemble analytique.

En effet un élément analytique sur  $\bigcup_i A_i$  est une fonction analytique sur la famille  $(A_i)$  donc vérifie le principe du prolongement analytique. On voit ainsi que l'on a la :

Proposition 2 : Soient  $A$  un ensemble analytique,  $R$  une fraction rationnelle non constante, sans pôle dans  $A$ . Alors  $R(A)$  est un ensemble analytique.

On voit d'abord que l'image par une fraction rationnelle non constante d'un disque ouvert est un disque ouvert. (Nous en donnerons la démonstration facile comme application du polygone de valuation au § 3).  $A$ , étant ouvert, est une réunion de disques ouverts, il en résulte que  $R(A)$  est aussi la réunion d'une famille de disques ouverts, c'est donc un ouvert. Si alors  $f$  est la limite uniforme sur  $R(A)$  d'une suite  $f_n$  de fractions rationnelles sans pôles dans  $R(A)$ , il est clair que  $f_n \circ R$  est une fraction rationnelle sans pôles dans  $A$  et que  $f_n \circ R$  converge uniformément vers  $f \circ R$  sur  $A$ ,  $f \circ R$  est donc un élément analytique sur  $A$ . Si  $f$  est identiquement nulle sur un ouvert non vide  $O$  de  $R(A)$ ,  $R^{-1}(O)$  est un ouvert non vide de  $A$  sur lequel  $f \circ R$  est nulle, puisque  $A$  est analytique,  $f \circ R$  est identiquement nulle sur  $A$  et donc  $f$  est identiquement nulle sur  $R(A)$ , ce qui prouve que  $R(A)$  est analytique.

Il s'agit alors de donner une caractérisation plus géométrique des ensembles analytiques.

Nous établirons une condition suffisante d'analyticité, puis nous verrons qu'une forme légèrement renforcée de cette condition est une condition nécessaire d'analyticité ce qui nous conduit à conjecturer que cette condition est nécessaire et suffisante.

Ce faisant, nous verrons (proposition 6) que la classe des ensembles analytiques ne possède malheureusement pas la propriété d'intersection finie.

Enfin nous montrerons que la classe des fonctions analytiques ainsi obtenues est plus vaste que la classe des fonctions analytiques sur les quasi-connexes (§ 3).

Quelques cas particuliers de ces résultats ont été exposés dans [1].

§ 2. - Notations

$K$  désigne un corps valué ultramétrique complet algébriquement clos. On suppose de plus que  $K$  est une extension du corps  $p$ -adique  $\mathbb{Q}_p$ . Cette dernière hypothèse n'interviendra pas au paragraphe 4 : (condition suffisante d'analyticité), mais sera essentielle au paragraphe 5 : (condition nécessaire d'analyticité). Voyons exactement ce qu'implique cette dernière hypothèse.  $K$  étant un corps,  $\mathbb{Q}$  s'identifie de façon canonique à un sous-corps de  $K$ . Munissons le de la valeur absolue définie sur  $K$ . Il résulte alors d'un célèbre théorème d'Ostrowski que les seules valeurs absolues non triviales sur  $\mathbb{Q}$  sont la valeur absolue ordinaire et les valeurs absolues  $p$ -adiques. Comme la valeur absolue ordinaire n'est pas ultramétrique, on voit que la valeur absolue sur  $\mathbb{Q}$  induite par celle définie sur  $K$  est soit la valeur absolue triviale (\*), soit une valeur absolue  $p$ -adique. Ce que nous supposons donc c'est que  $K$  n'induit pas la valeur absolue triviale sur  $\mathbb{Q}$ .

La valeur absolue sur  $K$  sera notée  $|| \cdot ||$ .

Suivant l'usage, nous introduisons la valuation sur  $K$  :

$$||x|| = -\log_p |x|$$

Alors  $||xy|| = ||x|| + ||y||$

et  $||x+y|| \geq \min(||x||, ||y||)$  l'égalité ayant lieu si  $||x|| \neq ||y||$ .

Nous attirons l'attention du lecteur sur la perversion du signe - : les inégalités sont donc changées de sens. Le disque  $||x-a|| \leq r$  sera noté  $||x-a|| \geq \rho$  avec  $\rho = \text{Log } r$ .  $||x|| \rightarrow +\infty$  signifie  $x \rightarrow 0$ .

Le signe  $<$  signifiera, soit  $<$ , soit  $\leq$ .

---

(\*) c'est-à-dire  $|x| = 1$  pour tout  $x \in \mathbb{Q}$

### § 3. - Polygone de valuation

Considérons le polynôme du premier degré  $P_a(x) = x - a$ . On a

$$\begin{aligned} |P_a(x)| &= |a| && \text{pour } |x| > |a| \\ |P_a(x)| &\leq |x| = |a| && \text{pour } |x| = |a| \\ |P_a(x)| &= |x| && \text{pour } |x| < |a| \end{aligned}$$

On voit donc que  $|P_a(x)|$  ne dépend que de  $|x|$  sauf pour la valeur exceptionnelle  $|x| = |a|$ . Ceci nous permet donc de définir la fonction de valuation  $|P_a|(r)$  du polynôme  $P_a$  définie sur le groupe de valuation et à valeurs dans le groupe de valuation :  $|P_a|(r) = |P_a(x)|$  pour  $|x| = r$ . Cette fonction qui est définie pour  $r \neq |a|$  se prolonge par continuité au point  $r = |a|$  en posant  $|P_a|(|a|) = |a|$  ( $= \inf_{|x|=|a|} |P_a(x)|$ ).

Si l'on considère alors la fraction rationnelle  $R(x)$ , comme  $K$  est algébriquement clos,  $R(x)$  se décompose sous forme d'un produit de facteurs du premier degré :

$$R(x) = a \frac{(x-a_1) \dots (x-a_n)}{(x-b_1) \dots (x-b_n)}$$

et donc

$$|R(x)| = |a| + \sum_{i=1}^n |x-a_i| - \sum_{j=1}^n |x-b_j|$$

Donc, pour  $|x| \neq |a_i|$ ,  $|x| \neq |b_j|$ ,  $|R(x)|$  ne dépend que de  $|x|$  ce qui permet de définir la fonction de valuation  $|R|(r)$  de la fraction rationnelle  $R(x)$ , pour  $r \neq |a_i|$ ,  $|b_j|$ , cette fonction se prolongeant par continuité aux valeurs exceptionnelles  $|a_i|$ ,  $|b_j|$ . On a bien sûr

$$|R|(r) = |a| + \sum_{i=1}^n |P_{a_i}|(r) - \sum_{j=1}^n |P_{b_j}|(r)$$



$|R|$ , somme de fonctions linéaires par morceaux, est une fonction linéaire par morceaux et son graphe est appelé le polygone de valuation de la fraction rationnelle  $R$ . Cette fonction se prolonge sur  $\mathbb{R}$  en une fonction linéaire par morceaux à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

La pente de  $|P_a|$  au point  $r$  vaut 1 (resp. 0) si  $r < |a|$  (resp.  $r > |a|$ ).

La pente de  $|R|$  au point non exceptionnel  $r$  étant la somme des pentes des fonctions  $|P_{a_i}|$  et  $-|P_{b_j}|$ , on voit que celle-ci est un nombre entier qui représente la différence entre le nombre de zéros et le nombre de pôles situés dans le disque  $|x| > r$ .

Si  $r$  est un point exceptionnel, la différence entre la pente du côté du polygone situé à gauche du point d'abscisse  $r$  et la pente du côté situé à droite représente la différence entre le nombre de zéros et le nombre de pôles situés sur le cercle  $|x| = r$ . (On voit donc qu'en un point exceptionnel il peut ne pas y avoir de changement de pente si le nombre de zéros égale le nombre de pôles).

Dans cette présentation, l'origine joue un rôle privilégié. Dans les applications, il sera donc utile de considérer la fonction de valuation  $|R|_{x_0}$  de  $R$  relative au point  $x_0$ . Elle est définie (sauf pour un nombre fini de valeurs exceptionnelles de  $r$ ) par

$$|R|_{x_0}(r) = |R(x)| \quad \text{pour } |x-x_0| = r.$$

Elle se prolonge par continuité aux valeurs exceptionnelles de  $r$ . Son graphe est appelé le polygone de valuation de  $R$  relatif à  $x_0$ .

On notera la formule d'échange très importante :

$$|R|_{x_0}(|x_1-x_0|) = |R|_{x_1}(|x_1-x_0|)$$

En effet, pour  $|x-x_0| < |x_1-x_0|$  on a  $|x-x_1| = |x-x_0|$  et donc pour  $r < |x_1-x_0|$ ,  $r$  non exceptionnel, on a  $|R|_{x_0}(r) = |R|_{x_1}(r)$ . Comme les fonctions de

valuation sont continues, on obtient le résultat en faisant tendre  $r$  vers  $x_1 - x_0$ .

Si maintenant on considère un élément analytique  $f$  défini sur un ouvert  $A$ , c'est-à-dire la limite uniforme sur  $A$  d'une suite de fractions rationnelles sans pôles dans  $A$ , on va pouvoir définir sa fonction de valuation  $|f|$  comme limite de la suite des fonctions de valuation  $|R_n|$  des fractions  $R_n$ . Mais bien sûr cette fonction ne sera pas définie sur tout le groupe de valuation mais seulement sur l'image  $|A|$  de  $A$  dans l'application  $x \rightarrow |x|$ .

Soient  $Q$  et  $R$  deux fonctions rationnelles approximant  $f$  sur  $A$ , c'est-à-dire que l'on a

$$|Q(x) - f(x)| > M, \quad |R(x) - f(x)| > M \quad \text{pour } x \in A, \text{ et donc :}$$

$$|Q(x) - R(x)| > M \quad \text{pour } x \in A.$$

Si  $r$  n'est exceptionnel ni pour  $Q$  ni pour  $R$  on a

$$|Q(x)| = |Q|(x) \quad \text{et} \quad |R(x)| = |R|(r) \quad \text{pour } |x| = r;$$

si de plus l'intersection  $A \cap C_r$  de  $A$  avec le cercle  $C_r$   $|x| = r$  n'est pas vide et si enfin  $|Q|(r) < M$ , on a  $|R|(r) = |R(x)| = |Q(x)|$  pour  $x \in A \cap C_r$  et donc  $|Q|(r) = |R|(r)$ . Il en résulte que si  $r_0$  est un point d'accumulation de  $|A|$  et si en ce point  $|Q|(r_0) < M$ , alors en ce point on a  $|R|(z) = |Q|(r_0)$ ; en effet dans tout voisinage de  $r_0$  il existe une infinité de valeurs de  $r$  appartenant à  $|A|$ ; comme il n'y a qu'un nombre fini de  $r$  exceptionnels pour  $Q$  et  $R$  simultanément, il y a une infinité de valeurs régulières de  $r$  dans ce voisinage appartenant à  $|A|$  et en ces points on a  $|Q|(r) = |R|(r)$  (on prend le voisinage assez petit pour qu'on y ait  $|Q|(r) < M$ ), alors par continuité on aura aussi  $|R|(r_0) = |Q|(r_0)$ .

L'ensemble  $Pr(A)$  des points d'accumulation dans  $\mathbb{R}$  de l'image  $|A|$  de  $A$  sera appelé la projection de  $A$ .

D'après ce qu'on vient de voir, si  $R_n(x)$  est une suite de fractions rationnelles sans pôles dans  $A$  convergeant vers  $f$  uniformément sur  $A$ , en un point  $r$  de  $\text{Pr}(A)$  ou  $\|R_n(r)\| \rightarrow +\infty$  ou  $\|R_n(r)\|$  reste constant après un certain rang. On appellera donc fonction de valuation de  $f$  :  $\|f\|(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n\|(r)$ ; cette fonction est définie sur  $\text{Pr}(A)$  et d'après ce qu'on a vu, sa définition ne dépend pas de la suite approximante choisie. Le graphe de  $\|f\|$  est appelé le polygône de valuation de  $f$ . C'est bien un polygône puisque au-dessous de la droite d'ordonnée  $M$ , le graphe de  $\|f\|$  coïncide avec le graphe de toute fraction rationnelle  $R$  telle que  $\|f(x) - R(x)\| > M$  sur  $A$ .

Comme dans le cas des fractions rationnelles on définit l'image  $\|A\|_{x_0}$  de  $A$  relative au point  $x_0$  (c'est l'image de  $A$  dans l'application  $x \rightarrow \|x - x_0\|$ ), la projection  $\text{Pr}_{x_0}(A)$  de  $A$  relative au point  $x_0$  (ensemble des points d'accumulation sur  $\mathbb{R}$  de  $\|A\|_{x_0}$ ) et la fonction de valuation  $\|f\|_{x_0}(r)$  de  $f$  relative au point  $x_0$  définie sur  $\text{Pr}_{x_0}(A)$ .

On vérifie sous peine que si  $f(x) \equiv 0$  dans le disque  $\|x - x_0\| > \rho$ , on a  $\|f\|_{x_0}(r) = +\infty$  pour  $r > \rho$ .

Nous n'étudierons pas les rapports entre la fonction  $\|f\|(r)$  et  $\|f(x)\|$ . Cette étude est faite dans [2].

Dans le cas où  $f$  est somme d'une série de Laurent dans la couronne  $\rho_0 < \|x\| < \rho_1$ , (ce qui est d'ailleurs le cas pour tout élément analytique défini dans une telle couronne) le polygône de valuation de  $f$  est concave, c'est alors le polygône dual du polygône de Newton de la série de Laurent [3].

L'idée essentielle du polygone de valuation a été introduite par M. Krasner [4].

Vu l'absence d'exposé systématique de ses propriétés et son importance dans les techniques utilisées pour l'étude des fonctions analytiques en analyse p-adique, nous avons préféré faire un exposé détaillé des propriétés les plus élémentaires.

Le lecteur se convaincra qu'il n'y a aucune difficulté à ce stade à définir le polygône de valuation d'une fonction analytique.

Comme application triviale démontrons la propriété annoncée dans l'introduction.

Proposition 3 : L'image du disque  $D: |x-x_0| > \rho$  par la fraction rationnelle  $R(x)$  sans pôles dans  $D$  est un disque.

Posons  $Q(x) = R(x) - R(x_0)$ .

$Q(x)$  n'ayant pas de pôle dans  $D$ , son polygône relatif à  $x_0$  est concave, on a donc

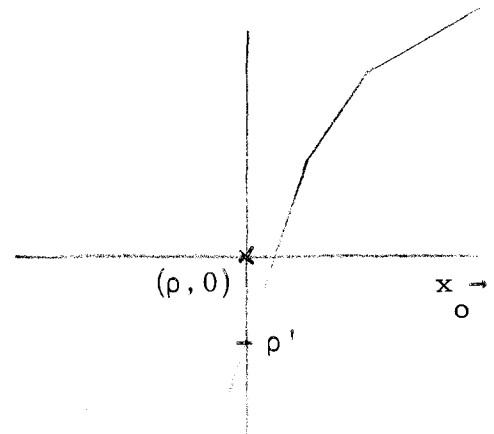
$$|Q|_{x_0}(r) > |Q|_{x_0}(\rho) \text{ pour } r > \rho. (*)$$

$|Q(x)| \geq |Q|_{x_0}(r)$  pour  $r = |x-x_0| > \rho$ , on a donc

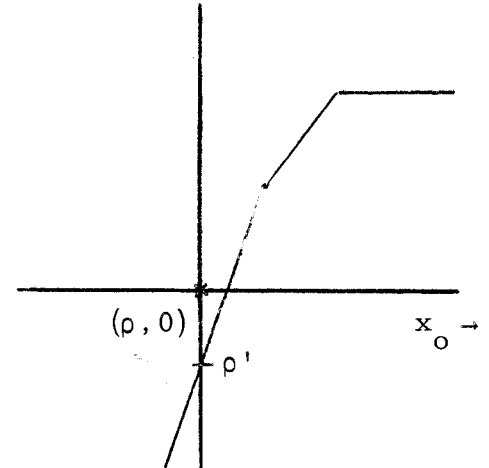
$$|R(x) - R(x_0)| > |Q|_{x_0}(\rho) = \rho', \text{ ce qui prouve que}$$

$R(D)$  est contenu dans le disque  $D': |x-R(x_0)| > \rho'$ .

Montrons que  $R(D)$  coïncide avec  $D'$ . Soit  $y \in D'$ , le polygône de valuation de  $R(x)-y$  relatif à  $x_0$  est le même que celui de  $R(x) - R(x_0) + R(x_0) - y$ , c'est donc l'enveloppe inférieure du polygône de  $Q(x)$  et du polygône de  $R(x_0) - y$  qui est la droite d'ordonnée  $R(x_0) - y$  comme  $R(x_0) - y > \rho'$ , au voisinage du point d'abscisse  $\rho$  les polygônes de  $R(x)-y$  et de  $Q(x)$  coïncident, donc ont une pente positive, ce qui prouve que  $R(x)-y$  s'annule dans  $D$  donc,  $y \in R(D)$ .



polygone de  $Q(x)$



polygone de  $R(x)-y$

On pourrait même prouver que l'image par un élément analytique d'un disque ouvert ou fermé est un disque ouvert ou fermé [5] ainsi que des résultats analogues sur les couronnes.

(\*) Comme  $Q$  a des zéros dans  $D$ , la pente au voisinage du point  $\rho$  est positive.

§ 4. - Condition suffisante d'analyticité

Soit  $A$  un sous-ensemble ouvert de  $K$ .

On dira que le disque  $D$  contenu dans  $A$  est maximal si tout disque  $\Delta$  contenant  $D$  et contenu dans  $A$  coïncide avec  $D$ .

Etant donné un point  $x_0$  de  $A$ , on dira que la suite de disques disjoints maximaux  $D_{n_j} : |x - a_{n_j}| > \rho_{n_j}$ ,  $n \in \mathbb{N}$   $1 \leq j \leq J_n$ , contenus dans  $A$ , est "convenable" si on a  $|a_{n_j} - x_0| = r_n$  pour  $1 \leq j \leq J_n$ ,  $|a_{n_j} - a_{m_k}| = \inf(r_n, r_m)$  pour  $n \neq m$  et  $|a_{n_j} - a_{n_k}| > r_n$  pour  $j \neq k$ , si la suite  $r_n$  forme une suite monotone convergente vers une limite  $r$  et si de plus  $\{x \mid |x - x_0| \leq r\} \cap A \neq \emptyset$  et  $\{x \mid |x - x_0| \leq r_n\} \cap A \neq \emptyset$  pour tout  $n$ .

Nous pouvons alors énoncer le :

Théorème 1. Pour que l'ensemble ouvert  $A$  soit analytique il suffit que la condition suivante soit réalisée.

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout point } x_0 \text{ de } A, \text{ pour toute suite "convenable" de disques } D_{n_j} \\ \text{et pour toute suite d'entiers } \geq 0 \text{ } p_{n_j}, \text{ la suite} \\ \inf_{1 \leq j \leq J_n} -p_{n_j} (\rho_{n_j} - r_n) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{J_n} p_{n_k} (|a_{n_k} - a_{n_j}| - r_n) + \sum_{m=1}^{n-1} p_m |r_n - r_m| \\ \text{où } p_m = \sum_{j=1}^{J_m} p_{mj}, \text{ ne tend pas vers } +\infty \text{ quand } m \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

Ce que nous démontrerons c'est qu'une condition nécessaire pour que  $A$  ne soit pas analytique est que l'on ait non  $(*)$ . La démonstration est reportée au paragraphe 6 ?

Donnons d'abord quelques

Exemples. 1) Les deux disques  $D : |x - a| > \rho$  et  $\Delta : |x - b| > r$  sont dits indiscernables si l'on a  $r = \rho = a - b$ .

Soit alors la condition :

(\*) { Pour tout point  $x_0$  de  $A$ , pour toute suite de disques disjoints maximaux discernables  $D_n : |x-a_n| > \rho_n$ , contenus dans  $A$ , tels que la suite  $|x_0 - a_n|$  forme une suite monotone convergeant vers une limite  $r$  et que  $\{x \mid |x-x_0| \leq r\} \cap A \neq \emptyset$ , et  $\{x \mid |x-x_0| \leq |x_0 - a_n|\} \cap A \neq \emptyset$  pour tout  $n$ , la série

$$\sum_N \frac{r - |x_0 - a_n|}{\rho_n - |x_0 - a_n|}$$

converge pour  $N$  assez grand.

Cette condition appelle quelques remarques car le dénominateur  $\rho_n - |x_0 - a_n|$  peut être nul. Si le numérateur est nul aussi, on pose que la fraction est nulle (la série n'a alors qu'un nombre fini de termes non nuls). Si aucun numérateur n'est nul, en disant que la série converge pour  $N$  grand on exprime en particulier qu'il n'y a qu'un nombre fini de dénominateurs nuls.

On montre alors que :

Proposition 4 ( $\tilde{*}$ ) entraîne (\*).

La démonstration de cette proposition sera faite au paragraphe 7.

## 2) Les ensembles quasi-connexes sont analytiques.

Ce résultat n'est évidemment pas nouveau (cf. introduction). Nous allons montrer que les quasi-connexes vérifient la condition ( $\tilde{*}$ ).

Nous utilisons les notations de ( $\tilde{*}$ ). Dire que  $A$  est quasi-connexe c'est dire que si  $a$  appartient à  $A$  et si  $\{x \mid |x-x_0| \leq |x_0 - a|\} \cap A \neq \emptyset$  les valeurs  $|x_0 - a|$  ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Si donc la suite  $|x_0 - a_n|$  est monotone, à partir d'un certain rang  $N$  on a pour  $n > N$   $|x_0 - a_n| = r$  et la série considérée converge bien puisque tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang.

3) Soit  $A$  un ouvert tel que ( $A$  soit la réunion d'une suite de disques  $D_n : \|x - a_n\| > \rho_n$ , où  $\|a_n\|$  est une suite monotone convergeant vers  $r$ , telle que la série

$$\sum_N \frac{r - \|a_n\|}{\rho_n - \|a_n\|}$$

converge pour  $N$  grand.

Alors  $A$  est analytique.

C'est une application directe de ( $\tilde{x}$ ). (Si on veut que les  $D_n$  soient disjoints, il faut supposer  $\rho_n > \|a_n\|$ ).

Si tous les  $\|a_n\|$  sont distincts, l'ensemble  $A$  n'est pas quasi-connexe.

4) Soit  $A$  un ouvert tel que ( $A$  soit la réunion d'une suite de disques  $D_n : \|x - a_n\| > \rho_n$ , où  $\|a_n\|$  est une suite monotone convergeant vers  $r$ , tels que

$$\rho_n \geq \|a_n\| + \sum_{k=1}^{n-1} \|\|a_k\| - r\| - c$$

$c$  constante arbitraire vérifiant :  $c < \sum_{k=1}^{\infty} \|\|a_k\| - r\|$

Alors  $A$  est analytique.

La démonstration sera donnée au paragraphe 7.

Notons toutefois que si  $\sum_{k=1}^{\infty} \|\|a_k\| - r\| < +\infty$ , ceci entraîne que l'on a  $\rho_n - \|a_n\| > \alpha > 0$  et donc la série  $\sum_{k=1}^{\infty}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r - \|a_n\|}{\rho_n - \|a_n\|}$$

converge. La condition donnée est donc plus faible dans ce cas que la condition donnée à l'exemple 3. On verra d'ailleurs au § 5, exemple 2, que la condition donnée à l'exemple 3 est dans ce cas nécessaire et suffisante.

Toutefois si  $\sum_{k=1}^{\infty} | \|a_k\| - r | = +\infty$ , il n'y a d'implication dans aucun sens, et si  $A$  vérifie la condition 4, il peut ne pas vérifier la condition  $(\tilde{*})$ . Considérons en effet l'exemple suivant

$$r - \|a_n\| = \frac{1}{n} \quad \rho_n = \|a_n\| + \text{Log } n$$

(Il peut arriver que  $\frac{1}{n}$  n'appartiennent pas au groupe de valuation de  $K$ . Il suffit alors de choisir  $\|a_n\|$  tel que  $\frac{1}{n+1} < r - \|a_n\| \leq \frac{1}{n}$ ).

La série  $\sum \frac{1}{n \log n}$  diverge, mais les conditions de 4 sont vérifiées.

5) Donnons des formes affaiblies des conditions 3 et 4. On considère des ensembles du même type. Alors si

$$\rho_n \geq \mu_n \quad \text{où } \mu \text{ est une constante } > 0 \text{ arbitraire}$$

l'ensemble  $A$  est analytique.

Ce résultat est une conséquence immédiate de l'exemple 4. (La démonstration est laissée au lecteur).

On considère toujours des ensembles du même type. Alors si la série  $\sum_{k=1}^{\infty} |r - \|a_k\||$  converge et si  $\rho_n \geq c > r$  l'ensemble  $A$  est analytique. En effet, pour  $n$  grand, on a alors  $\rho_n - \|a_n\| > \frac{c-r}{2}$  et le résultat découle alors directement du critère 3.

Nous verrons par contre que si la série  $\sum_{k=1}^{\infty} |r - \|a_k\||$  diverge et si  $\rho_n \leq c$   $A$  n'est pas analytique (§. 5, exemple 3).

6) Donnons enfin un exemple plus sophistiqué. Soit  $A$  un ensemble ouvert dont le complémentaire est la réunion d'une famille de disques disjoints  $D_n$ ,  $\|x - a_n\| > \rho_n$ ; si  $\rho_n > 0$  pour  $n > N$  ( $N$  arbitraire) et si la série  $\sum_N^{\infty} \frac{1}{\rho_n}$  converge, alors  $A$  est analytique.



Pour prouver cette assertion, on démontre d'abord que si un disque  $D$ ,  $\|x-a\| > \rho$ , est contenu dans le complémentaire de  $A$ , il est nécessairement contenu dans un des  $D_n$ , ce qui prouve que les  $D_n$  ont les seuls disques maximaux. Admettant provisoirement ce résultat, on applique alors la proposition 4 : en effet, soit  $\Delta_n : \|x-a_n\| > r_n$  une suite de disques maximaux contenus dans  $\complement A$  avec  $\|x_0 - a_n\|$  convergeant vers  $r$ ; comme la suite  $\{\Delta_n\}$  est une sous-suite de la suite  $\{D_n\}$   $r_n \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n}$  converge, donc pour  $n$  assez grand, on a

$$\|x_0 - a_n\| \leq \frac{r_n}{2} \text{ et } |r - \|x_0 - a_n\|| \leq c, \text{ donc } \left| \frac{r - \|x_0 - a_n\|}{r_n - \|x_0 - a_n\|} \right| \leq \frac{2c}{r_n} \text{ et la série}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r - \|x_0 - a_n\|}{r_n - \|x_0 - a_n\|} \text{ converge.}$$

Prouvons maintenant que les  $D_n$  sont les seuls disques maximaux. Soit donc  $D : \|x-a\| > \rho$ , un disque qui ne soit contenu dans aucun des  $D_n$ . Il faut prouver que  $D$  intersecte  $A$ .

Comme  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} < +\infty$ ,  $\rho_n > 0$ , on voit que  $\rho_n \rightarrow +\infty$ . Soit  $r_k$  la suite croissante des valeurs prises par les  $\rho_n$ . On notera que chaque valeur  $r_k$  ne peut être prise qu'un nombre fini de fois. Soit  $r_1$  le plus petit des  $r_k$  supérieur ou égal à  $\rho$ . Prenons  $i = 1$  pour simplifier. Si  $\rho = r_1$  et si  $D$  est le disque circonferencié  $\|x-a\| \geq \rho$ , comme il n'y a qu'un nombre fini de disques  $D_n$  de rayon  $e^{-r_1}$  contenu dans  $D$ , il existe un disque non circonferencié  $\Delta_1$ , contenu dans  $D$ , de rayon  $e^{-r_1}$  qui ne rencontre aucun des disques  $D_n$  de rayon  $e^{-r_1}$  et  $D$  n'est pas circonferencié, on peut prendre  $\Delta_1 = D$ . Si enfin  $\rho \neq r_1$ , on peut encore trouver un disque  $\Delta_1$ , contenu dans  $D$ , de rayon  $e^{-r_1}$  qui ne rencontre aucun des disques  $D_n$  de rayon  $e^{-r_1}$ . De même on voit qu'il existe dans  $\Delta_1$  un disque  $\Delta_2$  de rayon  $e^{-r_2}$  qui ne rencontre aucun des disques de rayon  $e^{-r_2}$ . En continuant de même, on construit ainsi une suite de disques emboîtés  $\Delta_n$ , de rayons tendant vers 0 et tels que le disque  $\Delta_k$  n'intersecte aucun des disques  $D_n$  de rayon  $e^{-r_i}$   $i \leq k$ . Puisque l'espace  $K$  est complet, l'intersection  $\bigcap_n \Delta_n$  est non vide (et réduite

à un point) on voit de plus que  $\bigcap_n \Delta_n$  n'intersecte aucun des  $D_n$ , donc est contenue dans  $A$ . Ce qui prouve que  $D \cap A \neq \emptyset$ .

Montrons sur cet exemple combien la classe des ensembles analytiques se distingue de la classe des ensembles quasi-connexes.

Choisissons une suite de points  $a_n$  tels que  $\|a_n\| \neq \|a_m\|$  pour  $m \neq n$  et tels que la suite  $\|a_n\|$  soit dense dans l'intervalle  $[-\infty, 0]$ . Choisissons alors une suite  $\rho_n$  avec  $\rho_n \geq \|a_n\|$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} < +\infty$ . Soit  $D_n$  le disque  $\|x - a_n\| > \rho_n$ .  $A = \bigcup_n D_n$  est donc analytique. On voit pourtant qu'étant donné un point quelconque  $x$  de  $A$  on peut toujours trouver un point  $y$  de  $A$  tel qu'il y ait une infinité de cercles centrés en  $x$  et de rayons moindres que  $|x-y|$  qui intersectent  $A$ , alors que pour un quasi-connexe il ne pourrait exister qu'un nombre fini de tels cercles.

Remarque 1: La condition (\*) n'est pas stable par intersection. Autrement dit, si  $A$  et  $B$  sont deux ouverts vérifiant (\*)  $A \cap B$  peut ne pas vérifier (\*). Nous allons le montrer sur un exemple. [En fait, nous prouverons même (proposition 6) que la classe des ensembles analytiques n'est pas stable par intersection].

Soit  $a_n$  une suite de points de  $K$  tels que  $\frac{1}{n} < \|a_n\| \leq \frac{1}{n-1}$ . Soit  $b_n$  une suite de points de  $K$  tels que  $\|b_n\| = \|b_n - a_n\| = \|a_n\|$ . Posons  $\rho_n = \|a_n\| + \text{Log } n$ . Soient  $D_n$  et  $\Delta_n$  respectivement les disques  $\|x - a_n\| > \rho_n$ ,  $\|x - b_n\| > \rho_n$ .  $A = \bigcup_n D_n$  et  $B = \bigcup_n \Delta_n$  vérifient (\*) ainsi qu'il résulte de l'exemple 4. Dans  $A \cap B$  considérons la suite de disques  $D_k : \|x - c_k\| > r_k$  avec  $c_{2n} = a_n$ ,  $c_{2n-1} = b_n$ ,  $r_{2n} = r_{2n-1} = \rho_n$ .

Choisissons  $p_k = 1$  et  $x_0 = 0$ . On obtient :

$$-p_{2n}(r_{2n} - \|c_{2n}\|) + \sum_{k=1}^{2n-1} p_k (\|c_k\| - \|c_{2n}\|) = -\text{Log } n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \|a_k\| - 2(n-1) \|a_n\|$$

$$-p_{2n-1}(r_{2n-1} - \|c_{2n-1}\|) + \sum_{k=1}^{2(n-1)} p_k (\|c_k\| - \|c_{2n-1}\|) = -\text{Log } n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \|a_k\| - 2(n-1) \|a_n\|$$

$$\text{or } 2 \sum_{k=1}^{n-1} \|a_k\| - (2n-1) \|a_n\| > 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - 2 \frac{n-1}{n-1} > 2 \log n - 2$$

et donc lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $-p_n(r_n - \|c_n\|) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k(\|c_k\| - \|c_n\|)$  tend vers  $+\infty$ , ce qui montre que  $A \cap B$  ne vérifie pas la condition  $(*)$ .

### § 5. - Condition nécessaire d'analyticité

Nous noterons  $(\hat{*})$  la condition  $(*)$  où l'on suppose de plus que  $p_{nj}$  est de la forme  $p_{nj} = p^{\alpha_{nj}}$  où  $p$  est la caractéristique des classes résiduelles,  $\alpha_{nj}$  est entier et de plus  $\alpha_{nj} \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

La condition  $(\hat{*})$  s'énonce donc :

$$(\hat{*}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout point } x_0 \text{ de } A, \text{ pour toute suite "convenable" de disques } D_{nj} \\ \text{pour toute suite d'entiers } \geq 0 \text{ de la forme } p_{nj} = p^{\alpha_{nj}} \text{ avec } \inf_{1 \leq j \leq J_n} \alpha_{nj} \text{ ten-} \\ \text{dant vers l'infini avec } n, \text{ la suite} \\ \inf_{\substack{1 \leq m \leq J_m \\ k \neq j}} -p_{nj}(p_{nj} - r_n) - \sum_{k=1}^{J_n} p_{nk}(\|a_{nk} - a_{nj}\| - r_n) + \sum_{n=1}^{n-1} p_m |r_n - r_m| \\ \text{où } p_m = \sum_{j=1}^{J_m} p_{mj}, \text{ ne tend pas vers } +\infty \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

on a alors le :

Théorème 2 : Pour que l'ensemble ouvert  $A$  soit analytique, il faut que la condition  $(\hat{*})$  soit réalisée.

Nous montrerons que si non  $(\hat{*})$  a lieu, on peut construire explicitement un élément analytique sur  $A$ , nul sur un ouvert de  $A$  et non identiquement nul.

La démonstration est reportée au paragraphe 8.

Un exemple trivial d'ensemble non analytique est le complémentaire d'une couronne  $A = \{ \Gamma \}$  avec  $\Gamma; r < |x-a| < R$ .

Nous allons donner des exemples moins triviaux.

Exemples : 1) une forme affaiblie du théorème 2 est la suivante :

Proposition 5 : Soit  $A$  un ensemble ouvert. S'il existe un point  $x_0$  de  $A$  et une suite de disques  $D_n, |x-a_n| > \rho_n$ , contenus dans  $\mathbb{C} \setminus A$  tels que l'on ait  $|a_n - a_m| = \inf(|x_0 - a_n|, |x_0 - a_m|)$  pour  $m \neq n$ , que  $|x_0 - a_n|$  forme une suite monotone convergent vers  $r$ , que  $\{x \mid |x-x_0| \leq r\} \cap A \neq \emptyset$  et  $\{x \mid |x-x_0| \leq |x_0 - a_n|\} \cap A \neq \emptyset$  pour tout  $n$ , que  $\rho_n - |a_n - x_0|$  tende vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, et enfin que la série  $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{r - |a_n - x_0|}{\rho_n - |a_n - x_0|}$  diverge pour tout  $N$ , alors  $A$  n'est pas analytique.

En effet, on voit d'abord que la suite  $D_n$  forme une suite "convenable" (on a  $J_n = 1$  pour tout  $n$ ).

Si  $\rho_n = |a_n - x_0|$  avec  $r \neq |a_n - x_0|$  pour une infinité d'indices, alors, en nous restreignant éventuellement à une sous-suite, on peut supposer que ceci a lieu pour tout  $n$ . On choisit l'entier  $\alpha_n$  tel que

$$p^{\alpha_n - 1} < \frac{1}{|r - |a_n - x_0||} \leq p^{\alpha_n}$$

$\alpha_n$  tend bien vers l'infini puisque  $r - |a_n - x_0| \rightarrow 0$ :

Si  $\rho_n = |a_n - x_0|$  avec  $r \neq |a_n - x_0|$  seulement pour un nombre fini d'indices, en négligeant ces termes on peut toujours supposer que l'on a  $\rho_n - |a_n - x_0| \neq 0$ .

On choisit alors  $\alpha_n$  tel que :

$$p^{\alpha_n - 1} < \frac{1}{\rho_n - |a_n - x_0|} \leq p^{\alpha_n}$$

$\alpha_n$  tend bien vers l'infini puisque  $\rho_n - |a_n - x_0| \rightarrow 0$ .

On vérifie alors que dans les deux cas, avec  $p_n = p^{\alpha_n}$

$$c_n = -p_n (\rho_n - \|a_n - x_0\|) + \sum_{m=1}^{n-1} p_m \| \|a_n - x_0\| - \|a_m - x_0\| \|$$

tend vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

En effet,  $p_n (\rho_n - \|a_n - x_0\|) = 0$  dans le premier cas

et  $p_n (\rho_n - \|a_n - x_0\|) < p$  dans le deuxième cas. De plus, d'après

le lemme 1, § 7:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{n-1} p_m \| \|a_n - x_0\| - \|a_m - x_0\| \| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{n-1} p_m |r - \|a_m - x_0\||$

et dans les deux cas, cette dernière série diverge.

La proposition résulte donc du théorème 2.

2) De cette proposition on déduit le :

Corollaire 2 : Soit  $A$  un ouvert tel que  $A$  soit la réunion d'une suite de disques disjoints  $D_n$ ,  $\|x - a_n\| > \rho_n$ , ( $\rho_n > \|a_n\|$ ) avec  $\|a_n - a_m\| = \inf(\|a_n\|, \|a_m\|)$  où  $\|a_n\|$  est une suite monotone convergeant vers  $r$  et telle que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} r - \|a_n\|$  soit convergente. Alors pour que  $A$  soit analytique il faut et il suffit que la série  $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{r - \|a_n\|}{\rho_n - \|a_n\|}$  converge pour  $N$  grand.

On a déjà vu que cette condition était suffisante au paragraphe 4, exemple 3.

Montrons qu'elle est nécessaire.

Il faut montrer que si  $\sum_N^{\infty} \frac{r - \|a_n\|}{\rho_n - \|a_n\|}$  diverge pour tout  $N$ ,  $A$  n'est pas analytique. S'il y a une infinité de  $n$  tels que  $\rho_n - \|a_n\| = 0$  et  $r - \|a_n\| \neq 0$ , on sait déjà que  $A$  n'est pas analytique. Supposons donc que ce n'est pas le cas, on peut même supposer que  $\rho_n - \|a_n\| \neq 0$  pour tout  $n$ . Nous allons alors montrer qu'on peut extraire une sous-suite  $n_k$  telle que  $\rho_{n_k} - \|a_{n_k}\| \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ , et que  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r - \|a_{n_k}\|}{\rho_{n_k} - \|a_{n_k}\|}$  diverge, il résultera alors de la proposition 5 que  $A$  n'est pas analytique.

Puisque  $\sum r - \|a_n\|$  converge et que  $\sum \frac{r - \|a_n\|}{\rho_n - \|a_n\|}$  diverge, on voit que la série  $\sum_{\rho_n - \|a_n\| < 1} \frac{r - \|a_n\|}{\rho_n - \|a_n\|}$  diverge aussi. Choisissons alors les indices  $n_1 \dots n_{k_1}$  tels que  $\rho_{n_i} - \|a_{n_i}\| < 1$  pour  $1 \leq i \leq k_1$  et  $\sum_{1 \leq i \leq k_1} \frac{r - \|a_{n_i}\|}{\rho_{n_i} - \|a_{n_i}\|} > 1$ . Mais alors la série  $\sum_{n > n_{k_1}} \frac{r - \|a_n\|}{\rho_n - \|a_n\|}$  diverge aussi. On peut donc choisir des indices  $n_{k_1+1} \dots n_{k_2}$  tels que  $\rho_{n_i} - \|a_{n_i}\| < \frac{1}{2}$  pour  $k_1 < i < k_2$  et  $\sum_{k_1 < i < k_2} \frac{r - \|a_{n_i}\|}{\rho_{n_i} - \|a_{n_i}\|} > 1$ .

De proche en proche on peut donc choisir la suite croissante d'indices  $n_k$  telle que  $\rho_{n_i} - \|a_{n_i}\| < \frac{1}{m}$  pour  $k_{m-1} < i \leq k_m$  et  $\sum_{k_{m-1} < i \leq k_m} \frac{r - \|a_{n_i}\|}{\rho_{n_i} - \|a_{n_i}\|} > 1$ . Cette suite  $n_k$  est donc la suite cherchée.

3) Soit  $A$  un ouvert tel que  $A$  soit la réunion d'une suite de disques disjoints  $D_n$ ,  $\|x - a_n\| > \rho_n$ , ( $\rho_n > \|a_n\|$ ) avec  $\|a_n - a_m\| = \inf(\|a_n\|, \|a_m\|)$  où  $\|a_n\|$  est une suite monotone convergent vers  $r$  et telle que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} r - \|a_n\|$  soit divergente. Alors, s'il existe  $N$  tel que pour tout  $n > N$ , on ait

$$(1) \quad \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \|a_n\| - \|a_k\|}{\rho_n - \|a_n\|} \geq c \geq p$$

$A$  n'est pas analytique. En particulier si  $\rho_n \leq R$  à partir d'un certain rang,  $A$  n'est pas analytique.

Fixons nous une constante  $h : \frac{p}{c} < h < 1$ .

Nous allons montrer qu'il existe une suite croissante d'entiers  $\alpha_n$  tendant vers l'infini telle que (on pose  $p_n = p^{\alpha_n}$ ) pour  $n$  assez grand, on ait :

$$(2) \quad \frac{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|a_n\| - \|a_k\|}{p_n \sum_{k=1}^{n-1} \|a_n\| - \|a_k\|} \geq \frac{h}{p}$$

On construit cette suite par récurrence. Soit  $M$  tel que

$\|a_1\| = \|a_2\| = \dots = \|a_{M-1}\| \neq \|a_M\|$  : on choisit  $\alpha_1 = \dots = \alpha_M = 0$  ; pour  $n > M$   
 si  $\frac{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|a_n\| - \|a_k\|}{p_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \|a_n\| - \|a_k\|} < h$  , on prend  $\alpha_n = \alpha_{n-1}$  , si  $\frac{\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|a_n\| - \|a_k\|}{p_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \|a_n\| - \|a_k\|} \geq h$   
 on prend  $\alpha_n = \alpha_{n-1} + 1$  .

Montrons que cette suite satisfait aux conditions indiquées. On voit sans peine que c'est une suite croissante au sens large. Il en résulte que l'on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k \|a_n\| - \|a_k\| \leq p_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \|a_n\| - \|a_k\| .$$

Pour démontrer l'inégalité (2) nous utiliserons deux remarques (dont les démonstrations, faciles, sont laissées au lecteur).

i) Soient  $a_1, b_1, a_2, b_2, c$  et  $d$  des nombres réels  $\geq 0$  . Les inégalités  $\frac{c}{d} \leq \frac{a_1}{b_1}$  ,  $\frac{c}{d} \leq \frac{a_2}{b_2}$  entraînent l'inégalité  $\frac{c}{d} \leq \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$  .

ii) Soit  $p_1, \dots, p_n$  une suite croissante de  $n$  nombres réels  $> 0$  et  $u_1, \dots, u_n$  une suite décroissante de  $n$  nombres réels  $\geq 0$  tels que  $\sum_{i=1}^n u_i = 1$  .  
 On a alors :

$$\sum_{i=1}^n p_i u_i \leq \sum_{i=1}^n p_i$$

Prouvons alors que l'inégalité (2) entraîne l'inégalité

$$(3) \quad \frac{\sum_{k=1}^n p_k \|a_{n+1}\| - \|a_k\|}{p_n \sum_{k=1}^n \|a_{n+1}\| - \|a_k\|} \geq \frac{h}{p}$$

En effet, d'après la remarque ii on voit que

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{\|a_n\| - \|a_k\|}{\sum_{k=1}^{n-1} \|a_n\| - \|a_k\|} \leq \sum_{k=1}^{n-1} p_k$$

Donc

$$(4) \quad \frac{\sum_1^{n-1} p_k}{p_n} \geq \frac{\sum_1^{n-1} p_k \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right|}{p_n \sum_1^{n-1} \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right|} \geq \frac{h}{p}$$

Comme

$$\frac{\sum_1^{n-1} p_k \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|}{p_n \sum_1^{n-1} \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|} = \frac{\sum_1^{n-1} p_k \left( \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right| + \left| \|a_{n+1}\| - \|a_n\| \right| \right) \sum_1^{n-1} p_k}{p_n \sum_1^{n-1} \left( \left| \|a_n\| - \|a_k\| \right| + \left| \|a_{n+1}\| - \|a_n\| \right| \right) p_n}$$

Il résulte de (2), (4) et de la remarque i que l'on a :

$$(5) \quad \frac{\sum_1^{n-1} p_k \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|}{p_n \sum_1^{n-1} \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|} \geq \frac{h}{p}$$

Comme d'autre part :

$$(6) \quad \frac{p_n \left| \|a_{n+1}\| - \|a_n\| \right|}{p_n \left| \|a_{n+1}\| - \|a_n\| \right|} = 1 \geq \frac{h}{p}$$

On déduit (3) de (5), (6) et de la remarque i.

Démontrons alors (2) par récurrence. Si la formule est vraie pour  $n$  on a alors (3):

$$\text{Si } \frac{\sum_1^n p_k \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|}{p_n \sum_1^{n-1} \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|} < h \quad \text{on a } p_{n+1} = p_n \text{ et (3) n'est autre que la}$$

formule (2) pour  $n+1$ .

$$\text{Si } \frac{\sum_1^n p_k \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|}{p_n \sum_1^{n-1} \left| \|a_{n+1}\| - \|a_k\| \right|} \geq h \quad \text{on a } p_{n+1} = p \cdot p_n \text{ et on a donc trivialement}$$

la formule (2) pour  $n+1$ .



Enfin l'inégalité (2) est vraie pour  $n = M$  car alors  $p_1 = \dots = p_{M-1} = p$   
 et  $p_M = p^2$  ce qui donne 
$$\frac{\sum_1^{M-1} p_k | |a_n| - |a_k| |}{p_M \sum_1^{n-1} | |a_n| - |a_k| |} = \frac{1}{p} > \frac{h}{p}$$

Il reste enfin à prouver que  $\alpha_n$  tend vers l'infini. Or si ce n'était pas le cas cela voudrait dire qu'il existe  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$  on a  $\alpha_n = \alpha_{n_0}$ , soit  $p_n = p_{n_0}$  et de plus

$$\frac{\sum_1^{n-1} p_k | |a_n| - |a_k| |}{p_{n-1} \sum_1^{n-1} | |a_n| - |a_k| |} = \frac{p_{n_0} \sum_1^{n-1} | |a_n| - |a_k| | + \sum_1^{n_0-1} p_k | |a_n| - |a_k| |}{p_{n_0} \sum_1^{n-1} | |a_n| - |a_k| | + p_{n_0} \sum_1^{n_0-1} | |a_n| - |a_k| |} < h$$

or on a :

$$\sum_1^{n_0} p_k | |a_n| - |a_k| | \leq p_{n_0} \sum_1^{n-1} | |a_n| - |a_k| | \leq p_{n_0} \sum_1^{n_0-1} | r - |a_k| |$$

Et puisque la série  $\sum_1^{\infty} r - |a_k|$  diverge, il résulte du lemme 1 (§ 7) que la suite  $\sum_{n_0}^{n-1} | |a_n| - |a_k| |$  tend vers l'infini quand  $n \rightarrow \infty$ ; par conséquent la fraction considérée tend vers 1 quand  $n \rightarrow \infty$ , ce qui contredit l'hypothèse  $h < 1$ . Donc  $\alpha_n$  tend vers l'infini avec  $n$ .

Pour prouver que  $A$  n'est pas analytique, nous allons appliquer le théorème 2 avec  $x_0 = 0$ , la suite "convenable" de disques  $D_n$ , et la suite  $p_n = p^{\alpha_n}$  construite ci-dessus.

Or il résulte des inégalités (1) et (2) que pour  $n > \max(N, M)$  on a

$$\frac{\sum_1^{n-1} p_k | |a_n| - |a_k| |}{p_n (\rho_n - |a_n|)} = \frac{\sum_1^{n-1} p_k | |a_n| - |a_k| |}{p_n \sum_1^{n-1} | |a_n| - |a_k| |} \frac{\sum_1^{n-1} | |a_n| - |a_k| |}{\rho_n - |a_n|} \geq h \frac{c}{p} > 1$$

(car  $\frac{p}{c} < h$ ).

Par suite :

$$-p_n(\rho_n - a_n) + \sum_1^{n-1} p_k \|a_n - a_k\| \geq (1 - \frac{hc}{p}) \sum_1^{n-1} p_k \|a_n - a_k\| \geq (1 - \frac{hc}{p}) \sum_1^{n-1} \|a_n - a_k\|$$

et ainsi qu'on l'a vu ce dernier terme tend vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Ce qui prouve que  $A_n$  n'est pas analytique.

Notons enfin que comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^{n-1} (\|a_n - a_k\|) = +\infty$ , si  $\rho_n \leq R$ , on a  $\rho_n - |a_n| \leq T - r - \varepsilon$  à partir d'un certain rang et donc l'inégalité (1) est vérifiée pour  $n$  grand.

Application. Nous avons surtout tenu à exposer l'exemple 3 car il va nous servir à construire le contre exemple prouvant la :

Proposition 6 : La classe des ensembles analytiques n'est pas stable par intersection finie.

Soient  $(a_n^1) \dots (a_n^{p+1})$   $p+1$  suites de points de  $K$  telles que  $\|a_n^i\| = r_n$  pour  $1 \leq i \leq p+1$ ,  $\|a_n^i - a_n^j\| = r_n$  pour  $i \neq j$ , avec  $\frac{1}{n} < r_n \leq \frac{1}{n-1}$ . Posons  $\rho_n = r_n + \text{Log } n$ . Soient  $D_n^i$ ,  $1 \leq i \leq p+1$  les disques  $\|x - a_n^i\| > \rho_n$ . On considère  $A_i = \bigcup_n D_n^i$  (on reconnaît les ensembles considérés au paragraphe 4, remarque 1).

Alors les  $A_i$  sont analytiques ainsi qu'il résulte de l'exemple 4, § 4. Par contre  $B = \bigcap_{1 \leq i \leq p+1} A_i$  n'est pas analytique car il vérifie les hypothèses de l'exemple 3. En effet,  $B = \bigcup_n \Delta_n$  où  $\Delta_n$  est le disque  $\|x - b_n\| > R_n$  avec pour  $n = (k-1)(p+1) + i$  ( $1 \leq i \leq p+1$ )  $b_n = r_k^i$ ,  $R_n = \rho_k$ .

Pour  $n = (k-1)(p+1) + i$ ,  $1 \leq i \leq p+1$ , on trouve

$$\frac{\sum_{j=1}^{n-1} \|b_j\| - \|b_n\|}{R_n - \|b_n\|} = \frac{(p+1) \sum_{j=1}^{k-1} \|a_j\| - \|a_k\|}{\text{Log } k} \geq \frac{(p+1) [\text{Log } k - 1]}{\text{Log } k}$$

et ce dernier terme est supérieur à  $p + \frac{1}{2}$  pour  $k > e^{2(p+1)}$ .

Remarque 2 : Non seulement la condition  $(\tilde{*})$  n'est pas stable par intersection, mais on peut construire deux ensembles vérifiant  $(\tilde{*})$  dont l'intersection n'est pas analytique.

Exemple :

Soit  $\rho_n$  une suite strictement croissante de nombres  $> 0$  appartenant au groupe additif des valeurs et telle que  $\sum \frac{1}{\rho_n} < +\infty$ .

Soit  $c_n$  une suite (dénombrable) de points de  $K$  dense dans  $-\text{Log } 2 \leq \|x\| \leq 0$  (c'est-à-dire la couronne de rayons 1 et 2).

On construit par récurrence les suites de disques  $D_n : \|x - a_n\| > \rho_n$ ,  $\Delta_n : \|x - b_n\| > \rho_n$ ,  $a_n$  est le  $c_k$  de plus petit indice qui n'appartient pas à  $D_1 \cup \dots \cup D_{n-1} \cup \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_{n-1}$ .  $b_n$  est un point quelconque de  $K$  tel que  $\|a_n - b_n\| = \rho_n$  ( $b_n$  existe car  $\rho_n$  appartient au groupe des valeurs).

Il résulte facilement des hypothèses que les disques  $D_n$  et  $\Delta_n$  sont tous disjoints (car  $\rho_n > 0$  et  $(\rho_n)$  strictement croissante).

On pose  $D_o : \|x\| > 0$ ,  $D_\infty : \|x\| < -\text{Log } 2$ .

Nos deux ensembles sont  $A = D_o \cup D_\infty \cup (\cup_n D_n)$ ,  $B = D_o \cup D_\infty \cup (\cup_n \Delta_n)$ .

Il est trivial que  $A$  et  $B$  sont ouverts et que  $A \cap B = D_o \cup D_\infty$  est non analytique.

Prouvons que  $A$  et  $B$  sont analytiques. Il suffit de le prouver pour  $A$ , la preuve est identique pour  $B$ . Soit donc  $\Delta$  un disque maximal de  $A$ . Montrons que  $\Delta$  est soit un point (cas sans intérêt) soit un  $\Delta_n$ .

En effet, si  $\Delta$  n'est pas réduit à un point, c'est un ouvert contenu dans  $-\text{Log } 2 \leq \|x\| \leq 0$ .  $\Delta$  contient donc un  $c_k$ . Comme  $c_k \notin A$ ,  $c_k \in B$  (en effet,  $\cup c_k \subset A \cup B$ ). Soit  $\Delta_n$  ( $n \leq k$ ) le disque auquel appartient  $c_k$ . Montrons que  $\Delta = \Delta_n$ . Si on avait  $\Delta \neq \Delta_n$ , on aurait  $\Delta \supset \|x - b_n\| \geq \rho_n$  et donc  $a_n \in \Delta$  ce qui n'est pas possible puisque  $a_n \in A$ .

On vérifie alors trivialement qu'on a  $(\tilde{*})$ .

§ 6. - Démonstration du théorème 1

Remarquons d'abord que si la projection de  $A$  relativement à un point  $x_0$  de  $A$  a une adhérence qui n'est pas réduite à un seul intervalle,  $A$  ne vérifie pas la condition (\*). (Et dans ce cas  $A$  n'est pas analytique). En effet, il existe alors une suite de points  $a_n$  de  $\mathcal{C}A$ , tels que  $\|a_n - x_0\|$  forme une suite décroissante stricte convergeant vers  $r$  avec  $\{x \mid \|x - x_0\| \leq r\} \cap A \neq \emptyset$  et telle que  $\{x \mid \|x - x_0\| = \|x_0 - a_n\|\} \cap A = \emptyset$ . On considère alors la suite de disques  $D_n$   $\|x - a_n\| > \|x_0 - a_n\| = \rho_n$  et une suite  $p_n$  telle que  $p_n \geq \frac{1}{\|a_n\| - r}$ . Alors :

$$-p_n(\rho_n - \|x_0 - a_n\|) + \sum_1^{n-1} p_k (\|a_k\| - \|a_n\|) \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow +\infty .$$

[ On voit que  $\sum_1^{n-1} p_k (\|a_k\| - \|a_n\|) \rightarrow +\infty$  en notant que  $\sum_1^{\infty} p_n (\|a_n\| - r) = +\infty$  et en appliquant le lemme 1 (§ 7)].

Nous supposons désormais que l'adhérence de la projection de  $A$  relativement à un point quelconque  $x_0$  de  $A$  est un intervalle  $(m, +\infty)$ . Alors le polygone de valuation d'un élément analytique  $f$  sur  $A$  est bien défini sur tout cet intervalle.

Supposons que  $A$  ne soit pas analytique. Cela signifie qu'il existe un élément analytique  $f$  sur  $A$  nul au voisinage du point  $x_1$  de  $A$  et non nul au point  $x_2$  de  $A$ .

Considérons le polygone de valuation de  $f$  relatif au point  $x_1$ .

Alors comme au voisinage de  $x_1$ , soit pour  $\|x - x_1\| > M$ , la fonction  $f(x)$  est nulle, pour  $r > M$  le polygone de valuation de  $f$  relatif à  $x_0$  se confond avec la droite d'ordonnée  $+\infty$ . Alors de deux choses l'une :

i) ou bien sur tout l'intervalle  $I$   $\|f\|_x(r) = +\infty$

ii) ou bien il existe un point  $r \in I$  tel que  $\|f\|_x(r) \neq +\infty$  auquel cas le polygone a un nombre infini de sommets pour pouvoir atteindre l'ordonnée  $+\infty$  (fig. 1)

Voyons ce qui se passe alors dans le cas i).

Considérons le polygone de valuation de  $f$  relatif au point  $x_2$ . Comme on a  $f(x_2) \neq 0$  dans un voisinage de  $x_2$ , soit pour  $\|x-x_2\| > M'$ ,  $\|f(x)\|$  reste constant (car ceci est vrai pour les fractions rationnelles) donc pour  $r > M'$  le polygone se confond avec la droite d'ordonnée  $\|f(x_2)\|$ .

Si  $\|x_2-x_1\| > m$ , pour  $r < \|x_2-x_1\|$  le polygone relatif à  $x_2$  et le polygone relatif à  $x_1$  coïncident.

Donc le polygone a un nombre infini de sommets pour pouvoir atteindre l'ordonnée  $+\infty$  (fig. 2).

Si  $\|x_2-x_1\| = m$  on ne sait rien du polygone de valuation de  $f$  relatif à  $x_2$ . Nous allons voir pourtant qu'il doit atteindre l'ordonnée  $+\infty$  au point  $m$  ce qui lui donnera un aspect analogue au cas précédent (fig. 3).

En effet, soit  $R_n$  la suite de fractions rationnelles approximant  $f$ . Quel que soit  $M$  (aussi grand qu'on le veut), il existe un indice  $n_M$  tel que  $\|f(x) - R_{n_M}(x)\| \geq M$  sur  $A$ .

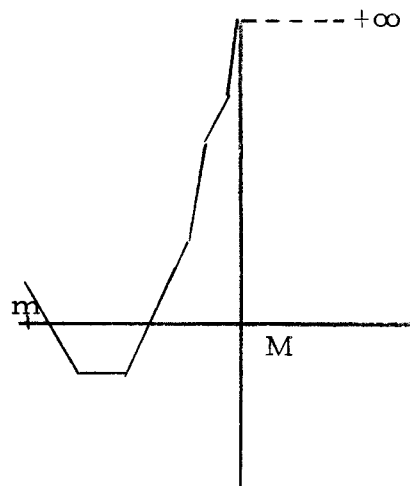


fig. 1

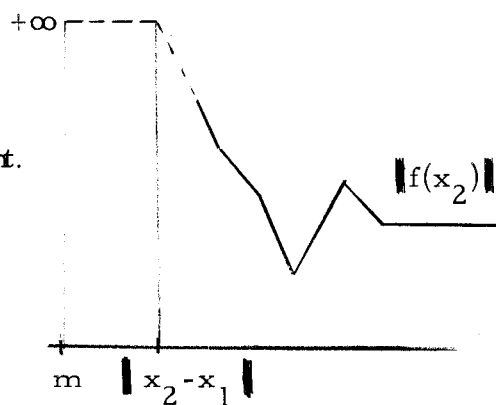


fig. 2

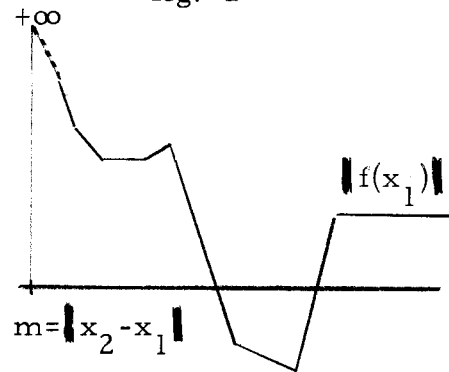


fig. 3

Comme le polygone de  $f$  relativement au point  $x_0$  est la droite  $+\infty$ , ceci signifie que le polygone de  $R_{nM}$  est situé au-dessus de la droite d'ordonnée  $M$ , c'est-à-dire que pour  $r \geq m$  on a  $\|R_{nM}\|_{x_1}(r) \geq M$ . Mais  $R_{nM}$  est défini partout dans  $K$ , son polygone est donc défini aussi pour  $r < m$ . Son polygone relatif au point  $x_1$  et son polygone relatif au point  $x_2$  coïncident pour  $r \leq m$ . On aura donc  $\|R_{nM}\|_{x_2}(r) \geq M$ . Mais comme la partie du polygone de  $f$  et la partie du polygone de  $R_{nM}$  situées en dessous de la droite d'ordonnée  $M$  coïncident (puisque  $R_{nM}$  approxime  $f$  à  $M$  près) on doit avoir aussi  $\|f\|_{x_2}(m) \geq M$ . Ceci étant vrai pour tout  $M$ , on a donc  $\|f\|_{x_2}(m) = +\infty$ .

En conclusion si  $A$  n'est pas analytique, on peut trouver un élément analytique  $f$  sur  $A$  et un point  $x_0$  de  $A$  tel que le polygone de valuation de  $f$  relatif à ce point atteigne l'infini en un point  $r$  image de  $A$  mais ne soit pas confondu avec la droite  $+\infty$ . Pour ce faire, ce polygone doit avoir une infinité de changements de pente en des points  $r_1, \dots, r_n, \dots$  formant une suite strictement monotone convergant vers  $r$ .

Désormais, pour simplifier les notations nous supposerons que  $x_0 = 0$ , et nous noterons  $\|f\|_{x_0}$  simplement  $\|f\|$ . Nous supposerons de plus que la suite  $r_n$  est croissante. Le cas d'une suite décroissante s'en déduit sans peine moyennant un changement de signe.

Soient  $p_2, \dots, p_n, \dots$  les changements de pente du polygone aux points d'abscisses  $r_2, \dots, r_n, \dots$ . Soit  $p_1$  la pente du côté du polygone situé à droite du point d'abscisse  $r_1$  ( $p_1, \dots, p_n$  sont des entiers  $\geq 0$ ). On a alors :

$$\|f\|(r_n) = \|f\|(r_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{k=1}^i p_k \right) (r_{i+1} - r_i) = \|f\|(r_1) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k (r_n - r_k)$$

Si nous nous restreignons à la sous-suite des sommets pour lesquels le changement de pente est positif (on notera encore cette sous-suite  $r_1, \dots, r_n, \dots$  avec les changements de pente  $> 0$ ,  $p_1, \dots, p_n, \dots$ )

$$\|f\|(r_n) \leq \|f\|(r_1) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k (r_n - r_k)$$

Comme  $\|f\|(r_n) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ , à fonction  $\sum_{k=1}^{n-1} p_k (r_n - r_k) \rightarrow +\infty$ .

Etudions alors comment se comporte la fonction  $f$  dans le cercle  $\|x\| = r_n$ .

Pour cela approximations  $f$  par une fraction rationnelle  $R$  de telle sorte que l'on ait sur  $A$   $\|f(x) - R(x)\| > \|f\|(r_n) + 1$ .

Comme les polygones de  $f$  et de  $R$  coïncident en dessous de la droite d'ordonnée  $\|f\|(r_n) + 1$ , il coïncident en particulier au voisinage du point  $r_n$ , donc le polygone a un changement de pente  $p_n$ , ce qui prouve que sur le cercle  $\|x\| = r_n$ ,  $R$  a  $p_n$  pôles de plus que de zéros. Comme  $R$  a un nombre fini de pôles (et de zéros), il existe un nombre fini  $I_n$  de disques intérieurs du cercle  $\|x\| = r_n$  où  $R$  a plus de pôles que de zéros. Soient  $p_n^i$  les différences entre les nombres de pôles et de zéros dans ces disques  $\Delta_n^i$ . On a :

$$\sum_{i=1}^{I_n} p_n^i \geq p_n.$$

Si  $\Delta_n^i$  intersecte  $A$ , soit  $y$  un point appartenant à cette intersection.

Considérons les polygones de valuation de  $f$  et  $R$  relativement à ce point. Alors  $p_n^i$  est la pente du côté du polygone de  $R$  situé à droite du sommet d'abscisse  $r_n$ . Comme d'autre part  $\|f\|_y(r_n) = \|f\|(r_n)$ , les polygones de  $f$  et  $R$  coïncident au voisinage de ce point; ce qui prouve que  $p_n^i$  ne dépend pas de la fraction rationnelle  $R$  telle que  $\|f(x) - R(x)\| > \|f\|(r_n) + 1$ .

S'il existe des disques intérieurs du cercle  $\|x\| = r_n$  contenus dans  $\{A$ , la différence entre le nombre de pôles et le nombre de zéros d'une fraction rationnelle approximante peut varier avec la fraction approximante, mais la somme de ces différences pour tous ces disques reste constante. (Les disques sont indiscernables d'après la définition de l'exemple 1, § 4). Nous pourrions répartir arbitrairement ces différences dans ces différents disques. Cette répartition n'influera pas sur les formules que nous établirons comme le lecteur pourra le vérifier.

On renumérote la suite  $(r_n)$  en comptant  $I_n$  fois chaque valeur  $r_n$ , et en lui associant successivement chacun des  $p_n^i$ . On obtient ainsi une suite croissante (et non plus strictement croissante) de nombres que nous noterons

encore  $r_n$ , auxquels sont associés des nombres entiers  $> 0$   $p_n$ . Ce sont les suites qui interviennent dans l'énoncé de la condition (\*). On a bien  $\{x \mid |x| \leq r\} \cap A \neq \emptyset$  et  $\{x \mid |x| \leq r_n\} \cap A \neq \emptyset$ .

$$\text{Enfin } \|f\|(r_n) \leq \|f\|(r_1) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k (r_n - r_k) \quad (1)$$

Soit alors  $\Delta_n$  le disque ouvert de rayon  $r_n$ , contenu dans le cercle  $|x| = r_n$  où  $R$  a  $p_n$  pôles de plus que de zéros. Nous allons faire une répartition convenable de ces  $p_n$  pôles dans des disques maximaux disjoints  $D_{n_j}$  de  $\mathbb{C}A$  contenus dans  $\Delta_n$ .

Si  $\Delta_n \subset \mathbb{C}A$ , c'est un disque maximal de  $\mathbb{C}A$ , on prend  $J_n = 1$ ,  $D_n = D_n^1 = \Delta_n$  et  $p_n = p_n^1$ .

Si  $\Delta_n$  n'est pas contenu dans  $A$ , soit  $\Delta$  le plus petit disque fermé qui contient tous les pôles de  $R$  situés dans  $\Delta_n$ .

Si  $\Delta \subset \mathbb{C}A$ , on prend  $J_n = 1$ ,  $p_n = p_n^1$  et  $D_n = D_n^1$  sera le disque maximal de  $\mathbb{C}A$  contenant  $\Delta$ .

Sinon, il existe un nombre fini  $\Delta^1, \Delta^2, \dots, \Delta^k$  de disques intérieurs de  $\Delta$  dans lesquels  $R$  a  $q_1, \dots, q_k$  pôles de plus que de zéros ( $q_j > 0$ ) et l'on a  $q_1 + q_2 + \dots + q_k \geq p_n$ . Choisissons alors des nombres  $q'_j$  tels que  $0 \leq q'_j \leq q_j$  et  $q'_1 + \dots + q'_k = p_n$ , et supposons que tous les  $q'_j$  sont  $> 0$ , ce qu'on peut toujours obtenir en restreignant le nombre d'indices.

Si  $\Delta^j \subset \mathbb{C}A$ , c'est un disque maximal de  $\mathbb{C}A$  auquel on associe alors l'entier  $q'_j$ .

Si  $\Delta^j$  n'est pas contenu dans  $\mathbb{C}A$ , on recommence le raisonnement qu'on vient de faire pour  $\Delta_n$ . A savoir : si tous les pôles de  $R$  situés dans  $\Delta^j$  se trouvent tous dans un disque maximal, on choisit ce disque maximal auquel on adjoint l'entier  $q'_j$ , sinon on considère le plus petit disque fermé contenant ces pôles et les disques intérieurs de celui-ci contenant plus de pôles de  $R$  que de zéros auxquels on peut associer des nombres  $q''_k$  tels que  $\sum q''_k = q'_j \dots$



De proche en proche on obtient ainsi  $J_n$  disques maximaux de  $\mathcal{A}$ ,  $D_{nj}$  ( $1 \leq j \leq J_n$ ), auxquels sont associés les entiers  $> 0$   $p_{nj}$  ( $1 \leq j \leq J_n$ ) avec  $\sum_{j=1}^{J_n} p_{nj} = p_n$ .

Soit  $D_{nj}$ ,  $\|x - a_{nj}\| > p_{nj}$  un de ces disques. Il a été obtenu en considérant la suite de disques emboîtés  $\Delta_n^0 = \Delta_n : \|x - a_{nj}\| > r_n$ ,  $\Delta_n^1 : \|x - a_{nj}\| \geq r_n^1$ , ...

...  $\Delta_n^{k-1} : \|x - a_{nj}\| \geq r_n^{k-1}$ ,  $\Delta_n^k = D_{nj}$ . Nous noterons  $\Delta_n^{k-1}$  le disque  $\|x - a_{nj}\| > r_n^{k-1}$ .

$\Delta_n^k$  est le plus grand disque fermé qui contient les pôles de  $R$  contenus dans  $\Delta_n^{k-1}$ .

A  $\Delta_n^{k-1}$  on a associé le nombre entier  $> 0$ ,  $q'_k$  qui est plus petit que la différence entre le nombre de pôles et le nombre de zéros de  $R$  situés dans  $\Delta_n^{k-1}$

( $q'_0 = p_n$ ,  $q'_k = p_{nj}$ ).

Considérons le polygone de valuation de  $R$  relatif au point  $a_{nj}$ .

Pour  $r_n^{k-1} < r < r_n^k$  il résulte de ce qu'on a dit sur  $q'_k$  que la pente du polygone de  $R$  est inférieure à  $-q'_k$ .

Notons que l'on a :

$$q'_k = \sum_{\|a_{ni} - a_{nj}\| > r_n^k} p_{ni}$$

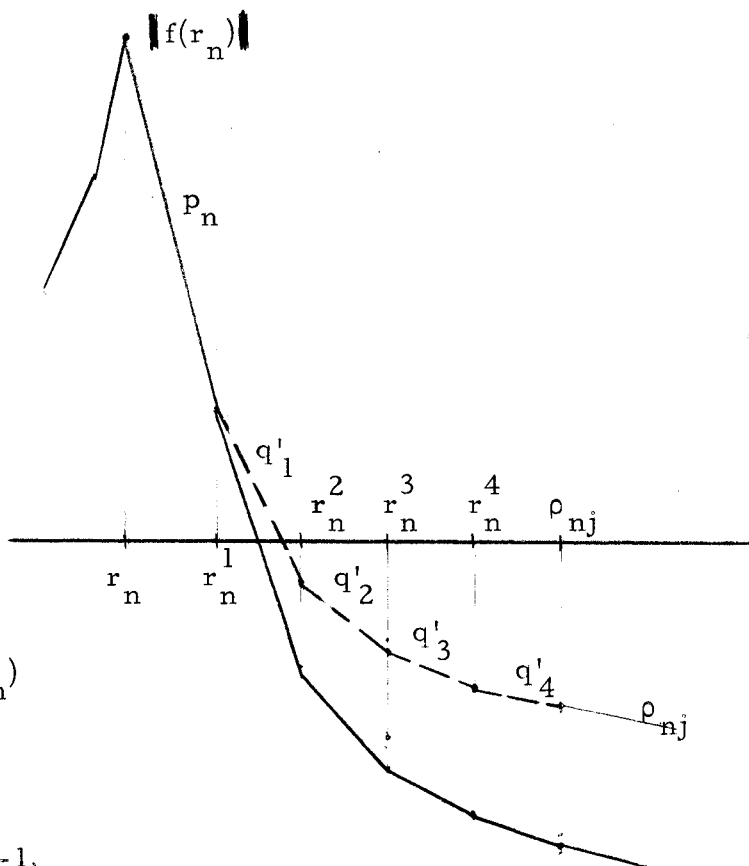
Comme d'autre part

$$\|R\|_{a_{nj}}(r_n) = \|R\|_{x_0}(r_n) = \|f\|_{x_0}(r_n)$$

On a

$$\|R\|_{a_{nj}}(\rho_{nj}) \leq \|f\|_{x_0}(r_n) - \sum_{k=1}^K p'_k (r_n^k - r_n^{k-1})$$

Mais



$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^K p'_k (r_n^k - r_n^{k-1}) &= \sum_{k=1}^K \sum_{\|a_{ni} - a_{nj}\| > r_n^k} p_{ni} (r_n^k - r_n^{k-1}) \\
&= p_{nj} \rho_{nj} + \sum_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i \leq J_n}} p_{ni} \|a_{ni} - a_{nj}\| - \sum_{i=1}^{J_n} p_{ni} r_n \\
&= p_{nj} (\rho_{nj} - r_n) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{J_n} p_{nk} (\|a_{nk} - a_{nj}\| - r_n)
\end{aligned}$$

L'image de  $A \cap \Delta_n$  relative à  $a_{nj}$  contient un ensemble de point dense dans l'intervalle  $(r_n, \rho_{nj})$  puisque  $D_{nj}$  est maximal. Le polygone de valuation de  $f$  relatif à  $a_{nj}$  est donc bien défini dans cet intervalle. Puisque dans cet intervalle, on a :  $\|R\|_{a_{nj}}(r) \leq \|f\|_{x_0}(r_n)$ , le polygone de  $f$  et celui de  $R$  coïncident.

Puisque sauf pour un nombre fini de valeurs de  $r$ ,  $\|R\|_{a_{nj}}(r) = \|R(x)\|$  pour  $\|x - a_{nj}\| = r$ , on a donc :

$$\inf_{x \in A \cap \Delta_n} \|R(x)\| \leq \|R\|_{a_{nj}}(\rho_{nj}) \leq \|f\|_{x_0}(r_n) - p_{nj}(\rho_{nj} - r_n) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{J_n} \rho_{nk} (\|a_{nk} - a_{nj}\| - r_n)$$

Ceci étant vrai pour tout  $j$ , on a

$$\inf_{x \in A \cap \Delta_n} \|R(x)\| \leq \inf_{1 \leq j \leq J_n} [\|f\|_{x_0}(r_n) - p_{nj}(\rho_{nj} - r_n) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{J_n} \rho_{nk} (\|a_{nk} - a_{nj}\| - r_n)]$$

Enfin, comme pour  $\|R(x)\| \leq \|f\|_{x_0}(r_n) + 1$ ,  $\|R(x)\|$  et  $\|f(x)\|$  coïncident. On a finalement, en tenant compte de (1) :

$$\inf_{x \in A \cap \Delta_n} \|f(x)\| \leq \|f\|_{x_0}(r_n) + \sum_{n=1}^{n-1} p_n (r_n - r_m) + \inf_{1 \leq j \leq J_n} [-p_{nj}(\rho_{nj} - r_n) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{J_n} \rho_{nk} (\|a_{nk} - a_{nj}\| - r_n)]$$

Montrons alors que  $\inf_{x \in A \cap \Delta_n} \|f(x)\|$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers l'infini, ce qui, associé à l'inégalité ci-dessus, montrera que, si  $A$  n'est pas analytique, on a la contion non (\*).

Donnons  $M$  arbitraire. Il existe  $N$  tel que pour  $n \geq N$  on ait  $\|f\|(r_n) > M$ . Soit  $R$  une fraction rationnelle tel que pour  $x \in A$  on ait  $\|f(x) - R(x)\| > M$ . Alors on a  $\|R\|(r_n) > M$  pour  $n > N$ . Mais alors, sauf pour un nombre fini de valeurs  $r_n$ , on a  $\|R(x)\| > M$  pour  $\|x\| = r_n$ , c'est-à-dire qu'il existe  $N'$  tel que pour  $n \geq N'$  et  $\|x\| = r_n$  on ait  $\|R(x)\| > M$ . Alors pour  $n \geq N'$  et  $x \in A \cap \Delta_n$ , on a  $\|f(x)\| > M$ , ce qui prouve que  $\inf_{x \in A \cap \Delta_n} \|f(x)\|$  tend vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

### § 7. - Démonstration des différentes propositions du paragraphe 4.

Nous utiliserons constamment le :

Lemme 1 : Soient  $(p_n)$  une suite de nombres  $\geq 0$ ,  $(r_n)$  une suite monotone de réels convergeant vers une limite  $r$ . On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p_k |r_k - r_n| = \sum_{k=1}^{\infty} p_k |r_k - r|$$

En particulier, les deux termes de cette égalité sont simultanément finis ou infinis.

En effet, la suite étant monotone, on a :  $|r_k - r_n| \leq |r_k - r|$  et donc

$$\sum_{k=1}^n p_k |r_k - r_n| \leq \sum_{k=1}^n p_k |r_k - r|$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p_k |r_k - r_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} p_k |r_k - r|$$

Notons que puisque  $|r_k - r_{n-1}| < |r_k - r_n|$  pour  $k < n-1$ , la suite  $\sum_{k=1}^n p_k |r_k - r_n|$  est croissante. On a donc pour  $m < n$

$$\sum_{k=1}^n p_k |r_k - r_n| \leq \sum_{k=1}^n p_k |r_k - r_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p_k |r_k - r_n|$$

Si l'on fait tendre  $n$  vers l'infini dans le premier terme, on obtient pour tout  $m$ ,

$$\sum_{k=1}^m p_k |r_k - r| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p_k |r_k - r_n|$$

Enfin, en faisant tendre  $m$  vers l'infini, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k |r_k - r| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p_k |r_k - r_n|$$

#### Démonstration de la proposition 4

Montrons d'abord que la condition (\*) reste inchangée si on suppose que la suite "convenable" de disques  $D_{n_j}$  est formée de disques discernables.

Supposons par exemple que  $D_{n_{j_1}}, \dots, D_{n_{j_\ell}}$  soient indiscernables mais discernables des disques  $D_{n_j}$  pour  $j \neq j_1, \dots, j_\ell$ . Posons  $p'_{n_{j_1}} = p_{n_{j_1}} + \dots + p_{n_{j_\ell}}$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} p_{n_{j_1}} (\rho_{n_{j_1}} - r_n) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j_1}}^{J_n} p_{nk} (\|a_{nk} - a_{n_{j_1}}\| - r_n) &= \dots \\ &= p_{n_{j_\ell}} (\rho_{n_{j_\ell}} - r_n) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j_\ell}}^{J_n} p_{nk} (\|a_{nk} - a_{n_{j_\ell}}\| - r_n) \\ &= p'_{n_{j_1}} (\rho_{n_{j_1}} - r_n) + \sum_{k \neq j_1, \dots, j_\ell} p_{nk} (\|a_{nk} - a_{n_{j_1}}\| - r_n) \end{aligned}$$

et pour  $j \neq j_1, \dots, j_\ell$

$$\begin{aligned} p_{n_j} (\rho_{n_j} - r_n) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{J_n} p_{nk} (\|a_{nk} - a_{n_j}\| - r_n) &= \\ &= p_{n_j} (\rho_{n_j} - r_n) + \sum_{k \neq j, j_1, \dots, j_\ell} p_{nk} (\|a_{nk} - a_{n_j}\| - r_n) \\ &\quad + p'_{n_{j_1}} (\|a_{n_{j_1}} - a_{n_j}\| - r_n) \end{aligned}$$

On voit donc que si on supprime les disques  $D_{nj_2} \dots D_{nj_\ell}$ , et si on remplace  $p_{nj_1}$  par  $p'_{nj_1}$  la condition (\*) reste inchangée (on notera que  $p_n$  ne change pas).

On peut voir qu'il en est de même si ce sont des disques  $D_n (\rho_n = r_n)$  qui sont indiscernables.

Soit alors la condition :

(\*) Pour tout point  $x_0$  de  $A$ , pour toute suite de disques disjoints maximaux discernables  $D_n$ ,  $\|x - a_n\| > \rho_n$ , contenus dans  $\{A\}$  tels que la suite  $\|x_0 - a_n\|$  forme une suite monotone convergeant vers une limite  $r$  et que  $\{x \mid \|x - x_0\| \leq r\} \cap A \neq \emptyset$  et  $\{x \mid \|x - x_0\| \leq \|x_0 - a_n\|\} \cap A \neq \emptyset$  pour tout  $n$ , la suite

$$-p_n(\rho_n - r_n) + \sum_{m=1}^{J_m} p_m |r_n - r_m|,$$

où  $r_n = \|x_0 - a_n\|$ , ne tend pas vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Montrons que (\*) entraîne (\*), c'est-à-dire que si (\*) est vérifié alors (\*) l'est aussi.

Soit donc  $D_{ni}$  une suite "convenable" de disques discernables.

Remarquons que dans la formule donnée dans (\*), on a :

$$p_m |r_n - r_m| = \sum_{j=1}^{J_m} p_{mj} \left| \|a_{ni} - x_0\| - \|a_{mj} - x_0\| \right| \quad 1 \leq i \leq J_n$$

et remarquons d'autre par que pour  $1 \leq i \leq J_n$ ,  $1 \leq j \leq J_n$ , on a :

$$p_{mj} \left| \|a_{ni} - x_0\| - \|a_{nj} - x_0\| \right| = 0$$

Posons pour  $m = \sum_{k=1}^{n-1} J_k + j - 1$ ,  $\Delta_m = D_{nj}$ ; et  $q_m = p_{nj}$ . La suite de

disques  $\Delta_m$  est conforme aux prémices de la condition  $(\ast')$ . Si  $(\ast')$  est vérifiée, on en déduit que

$$-p_{nj}(\rho_{nj} - r_n) + \sum_{m=1}^{n-1} p_m |r_n - r_m|$$

ne tend pas vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$  et à fortiori

$$\inf_{1 \leq j \leq J_n} -p_{nj}(\rho_{nj} - r_n) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{J_n} p_{nk} (|a_{nk} - a_{nj}| - r_n) + \sum_{m=1}^{n-1} p_m |r_n - r_m|$$

ne tend vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ , ce qui montre que  $(\ast)$  est vérifiée.

Montrons alors que  $(\tilde{\ast})$  entraîne  $(\ast)$ .

Une suite de disques  $D_n$  satisfaisant aux prémices de  $(\ast')$  satisfait aussi aux prémices de  $(\tilde{\ast})$ . Il faut donc montrer que si pour une telle suite

$$\sum_N \frac{r - r_n}{\rho_n - r_n} < +\infty$$

pour  $N$  grand, pour toute suite d'entiers  $> 0$ ,  $p_n$ , la suite

$$-p_n(\rho_n - r_n) + \sum_{m=1}^{n-1} p_m |r_n - r_m|$$

ne tend pas vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Notons d'abord que si  $(\tilde{\ast})$  est vérifiée et si pour une infinité de  $n$   $\rho_n - r_n = 0$ , c'est qu'à partir d'un certain rang  $N$ , pour  $n > N$ ,  $r - r_n = 0$ , mais alors  $(\ast')$  est bien vérifiée pour toute suite  $p_n$ .

Nous supposons donc que pour  $n \geq N$ , on a  $\rho_n - r_n \neq 0$ , et pour simplifier nous prenons  $N = 1$ .

Soit alors une suite d'entiers  $> 0$   $(p_n)$ .

Si la suite  $p_n(\rho_n - r_n)$  est bornée, on voit que la suite

$$\sum_{m=1}^{n-1} p_m |r_n - r_m| = \sum_{m=1}^{n-1} p_m (\rho_m - r_m) \frac{|r_m - r_n|}{\rho_m - r_m}$$

est bornée car  $\sum_{m=1}^{n-1} \frac{|r_m - r_n|}{\rho_m - r_m} \leq \sum_{m=1}^{n-1} \frac{|r_m - r|}{\rho_m - r_m}$  l'est aussi.

Donc  $-p_n(\rho_n - r_n) + \sum_{m=1}^{n-1} p_m |r_m - r_n|$  est bornée supérieurement et donc ne tend pas vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Si la suite  $p_n(\rho_n - r_n)$  n'est pas bornée, soit  $(n_j)$  une suite d'entiers telle que

$$p_{n_j}(\rho_{n_j} - r_{n_j}) \geq p_n(\rho_n - r_n) \quad \text{pour } n \leq n_j$$

D'autre part, puisque  $\sum_1^{\infty} \frac{|r - r_n|}{\rho_n - r_n} < +\infty$ , il existe un indice  $n_0$  tel que pour  $n > n_0$

$$\text{on ait : } \sum_{m=n_0}^{n-1} \frac{|r_m - r_n|}{\rho_m - r_m} \leq \sum_{m=n_0}^{+\infty} \frac{|r_m - r|}{\rho_m - r_m} < 1$$

Alors :

$$\begin{aligned} -p_{n_j}(\rho_{n_j} - r_{n_j}) + \sum_{m=1}^{n_j-1} p_m |r_m - r_{n_j}| &\leq p_{n_j}(\rho_{n_j} - r_{n_j}) \left[ -1 + \sum_{m=n_0}^{n_j-1} \frac{|r_m - r_{n_j}|}{\rho_m - r_m} \right] + \sum_{m=1}^{n_0-1} p_m |r_m - r_{n_j}| \\ &\leq \sum_{m=1}^{n_0-1} p_m |r_m - r| \end{aligned}$$

ce qui montre que  $-p_n(\rho_n - r_n) + \sum_{m=1}^{n-1} p_m |r_m - r_n|$  ne tend pas vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Démonstration de l'exemple 4 du paragraphe 4

On va se ramener à la condition (\*').

Remarquons que les seuls disques maximaux de  $\mathcal{C} A$  sont les disques  $D_n$ . Si l'on a une suite de disques maximaux discernables  $\Delta_m$ , auxquels sont associés les entiers  $> 0$   $p_n$  elle forme une sous-suite de la suite  $D_n$ . Le lecteur vérifiera que si on ajoute aux disques  $\Delta_n$  les disques  $D_n$  qui n'ont pas été choisis, en leur associant l'entier 0, on ne change pas la condition (\*').

Il faut donc montrer que si

$$\rho_n \geq \|a_n\| + \sum_{k=1}^{n-1} \left| \|a_k\| - r \right| - c \quad \text{avec} \quad c < \sum_1^{\infty} \left| \|a_k\| - r \right| ,$$

pour toute suite d'entiers  $\geq 0$   $p_n$ , la suite

$$-p_n (\rho_n - \|a_n\|) + \sum_{m=1}^{n-1} \left| \|a_m\| - \|a_n\| \right|$$

ne tend pas vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Puisque d'après le lemme 1 :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{n-1} \left| \|a_m\| - \|a_n\| \right| = \sum_{m=1}^{\infty} \left| \|a_m\| - r \right|$ ,

on peut trouver  $n_0$  tel que l'on ait  $\sum_{k=1}^{n_0-1} \left| \|a_k\| - \|a_{n_0}\| \right| - c \geq 0$ , alors on aura pour

$$n \geq n_0, \quad \rho_n - \|a_n\| - \sum_{k=n_0}^{n-1} \left| \|a_k\| - \|a_n\| \right| \geq \sum_{k=1}^{n_0-1} \left| \|a_k\| - \|a_n\| \right| - c \geq \sum_{k=1}^{n_0-1} \left| \|a_k\| - \|a_{n_0}\| \right| - c \geq 0$$

Soit alors une suite d'entiers  $\geq 0$  ( $p_n$ ).

Si la suite  $p_n$  est non bornée, on peut en extraire une sous-suite  $p_{n_j}$  telle que  $p_{n_j} \geq p_n$  pour  $n \leq n_j$ . Alors pour  $n_j \geq n_0$

$$\begin{aligned} & -p_{n_j} (\rho_{n_j} - \|a_{n_j}\|) + \sum_{k=1}^{n_j-1} p_k (\|a_k\| - \|a_{n_j}\|) \leq \\ & \leq -p_{n_j} \left[ \rho_{n_j} - \|a_{n_j}\| - \sum_{k=n_0}^{n_j-1} \left| \|a_k\| - \|a_{n_j}\| \right| \right] + \sum_{k=1}^{n_0} p_k \left| \|a_k\| - \|a_{n_j}\| \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{n_0} p_k \left| \|a_k\| - r \right| \end{aligned}$$



et donc  $-p_n(\rho_n - \|a_n\|) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k(\|a_k\| - \|a_n\|)$  ne tend pas vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Si la suite  $p_n$  est bornée, soit  $q = \overline{\lim} p_n$ ; comme  $p_n$  est entier, cela signifie en particulier qu'il y a une infinité de  $n$  pour lesquels  $p_n = q$ , soit donc  $(n_j)$  une sous-suite telle que  $p_{n_j} = q$ . D'autre part, il n'y a qu'un nombre fini d'indices  $n$  tels que  $p_n > q$ , soit donc  $N$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $p_n \leq q$ . Alors, pour  $n_j \geq N' = \sup(n_0, N)$

$$\begin{aligned} & -p_{n_j}(\rho_{n_j} - \|a_{n_j}\|) + \sum_{k=1}^{n_j-1} p_k(\|a_k\| - \|a_{n_j}\|) \\ & \leq -m[\rho_{n_j} - \|a_{n_j}\| - \sum_{k=N'}^{n_j-1} (\|a_k\| - \|a_{n_j}\|)] + \sum_{k=1}^{N'} p_k(\|a_k\| - \|a_{n_j}\|) \\ & \leq \sum_{k=1}^{N'} p_k(\|a_k\| - r) \end{aligned}$$

et donc la suite  $-p_n(\rho_n - \|a_n\|) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k(\|a_k\| - \|a_n\|)$  ne tend pas vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

### § 8. - Démonstration du théorème 2

Supposons que  $A$  ne vérifie pas la condition  $(\hat{*})$ . Nous allons construire un élément analytique sur  $A$  ne vérifiant pas le principe du prolongement analytique.

Soient  $D_{n_j}$  et  $p_{n_j}$  les suites de disques et d'entiers indiqués par non  $(\hat{*})$ , et pour simplifier, prenons  $x_0 = 0$ .

Si la suite  $r_n$  est croissante, l'élément analytique proposé sera la fonction

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^{J_n} \left( \frac{x}{x - a_{nj}} \right)^{P_{nj}} \right]$$

Si la suite  $r_n$  est décroissante, l'élément analytique proposé sera la fonction

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^{J_n} \left( \frac{a_{nj}}{x - a_{nj}} \right)^{P_{nj}} \right]$$

Nous ne ferons la démonstration que dans le premier cas, le deuxième cas se traitant de la même façon.

$$\text{Notons } R_n(x) = \prod_{k=1}^n \left[ \prod_{j=1}^{J_k} \left( \frac{x}{x-a_{kj}} \right)^{p_{kj}} \right]. \quad R_n \text{ est une fraction rationnelle}$$

sans pôles dans  $A$ .

Il s'agit donc de montrer d'abord que la suite  $R_n$  converge uniformément sur  $A$ , puis de prouver que  $f$  est nulle dans un ouvert contenu dans  $A$  mais non identiquement nulle dans  $A$ .

$$\text{D'après } (\ast) \quad c_n = \inf_{1 \leq j \leq J_n} -p_{nj} (\rho_{nj} - r_n) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{J_n} p_{nk} (\|a_{nk} - a_{nj}\| - r_n) + \sum_{m=1}^{n-1} p_m (r_n - r_m)$$

tend vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ , autrement dit, quel que soit  $M$  (arbitrairement grand), il existe  $N$  tel que  $n \geq N$  implique  $c_n \geq M$ , et en particulier  $\sum_{m=1}^{N-1} p_m (r_N - r_m) \geq M$

Soit  $x \in A$ .

Alors si  $\|x\| \geq r_N$ , on a pour  $k < N$   $\|x - a_{kj}\| = r_k$ , si de plus on a  $\|x - a_{kj}\| \leq \|x\|$  pour tout  $k$  et tout  $j$ , on a pour tout  $n \geq N$

$$\|R_n(x)\| \geq \sum_{k=1}^{N-1} p_k (\|x\| - r_k) \geq \sum_{k=1}^{N-1} p_k (r_N - r_k) \geq M$$

Voyons ce qui se passe si  $\|x\| \geq r_N$  et si pour un  $m$  et un  $i$  on a  $\|x - a_{mi}\| \geq \|x\|$ , alors on a  $n \geq N$ ,  $\|x - a_{mj}\| > \|x\|$  pour  $1 \leq j \leq J_m$ ,  $\|x - a_{nj}\| \leq \|x\|$  pour  $n \neq m$ . Pour  $N \leq n < m$  on voit comme précédemment que  $\|R_n(x)\| \geq M$ .

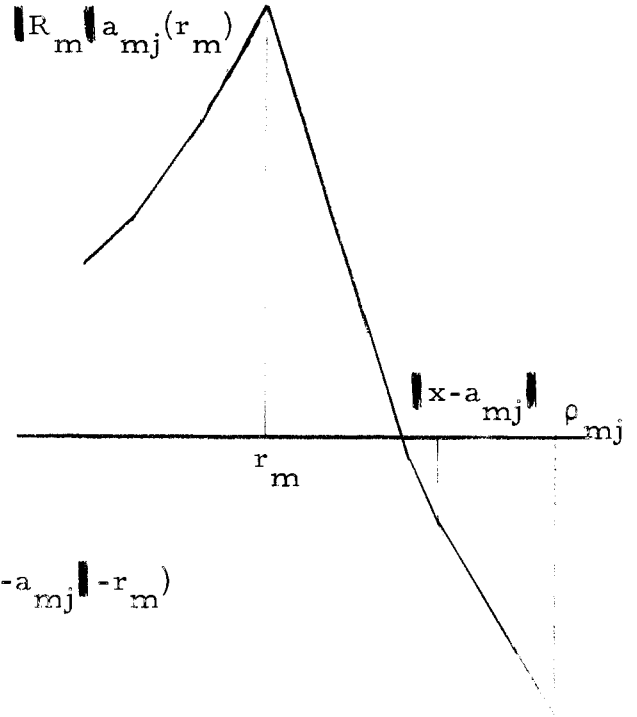
Soit alors  $j$ ,  $1 \leq j \leq J_m$ , tel que  $\|x - a_{mj}\| \geq \|x - a_{m\ell}\|$  pour  $1 \leq \ell \leq J_m$ , et considérons le polygone de valuation de  $R_m$  relatif à  $a_{mj}$ .

$$\text{On a } \|R_m\|_{a_{mj}}(r_m) = \sum_{k=1}^m p_k (r_m - r_k).$$

Au point d'abscisse  $r > r_m$ , la pente du polygone est  $-\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{J_m} p_{m\ell}$ , donc

toujours négative. Comme on a  $\|x - a_{mj}\| \leq \rho_{mj}$ , on a donc

$$\begin{aligned} \|R_m\|_{a_{mj}}(\|x - a_{mj}\|) &\geq \|R_m\|_{a_{mj}}(\rho_{mj}) = \\ &= -p_{mj}(\rho_{mj} - r_m) - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{J_m} p_{m\ell}(\|a_{m\ell} - a_{mj}\| - r_m) \\ &+ \sum_{k=1}^{m-1} p_k(r_m - r_k) \geq M \end{aligned}$$



Considérons alors le polygone de valuation de  $R_m$  relatif à  $x$ . On a

$$\|R_m\|_x(\|x - a_{mj}\|) = \|R_m\|_{a_{mj}}(\|x - a_{mj}\|)$$

mais comme  $R_m$  n'a ni pôle ni zéro dans le disque ouvert de centre  $x$  et de rayon  $\|x - a_{mj}\|$ ,  $\|R_m\|_x(r)$  est constant pour  $r \geq \|x - a_{mj}\|$ , ce qui prouve que

$$\|R_m(x)\| = \|R_m\|_x(+\infty) = \|R_m\|_x(\|x - a_{mj}\|) \geq M.$$

Enfin, pour  $n > m$  on a trivialement  $\|R_n(x)\| = \|R_m(x)\| \geq M$ .

Finalement, pour  $x \in A$ ,  $\|x\| \geq r_N$  et  $n \geq N$  on a  $\|R_n(x)\| \geq M$ .

Soit  $p$  le nombre premier servant à définir la valeur absolue  $p$ -adique. On a alors pour  $\|a\| > 0$

$$\|(1+a)^p - 1\| = \|pa + \frac{p(p-1)}{2}a^2 + \dots + a^p\| \geq \inf(p\|a\|, \|a\| + \text{Log } p).$$

$$\text{Soit } \|(1+a)^p - 1\| \geq \begin{cases} p\|a\| & \text{si } \|a\| < \frac{\text{Log } p}{p-1} \\ \|a\| + \text{Log } p & \text{si } \|a\| \geq \frac{\text{Log } p}{p-1} \end{cases}$$

Notons de plus que pour  $\|b\| \geq \|a\| > 0$  on a  $\|(1+b)^p - 1\| \geq \|(1+a)^p - 1\|$   
 et que pour  $\|a\| > 0$  et  $\|b\| > 0$

$$\|(1+a)(1+b) - 1\| = \|a+ab+b\| \geq \inf(\|a\|, \|b\|).$$

Choisissons alors  $N' > N$  tel que  $r_{N'} > r_N$  ( $N'$  existe bien puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} p_k (r_n - r_k) = +\infty$ ), soit  $\alpha$  l'entier tel que :

$$p^{\alpha-1} (r_{N'} - r_N) < \frac{\text{Log } p}{p-1} \leq p^\alpha (r_{N'} - r_N)$$

et soit enfin  $N'' > N'$  tel que  $\inf_{n \geq N''} \alpha_n \geq \alpha$  pour  $n \geq N''$ .

Alors pour  $x \in A$ ,  $\|x\| \leq r_N$ ,  $m > n \geq N'$ , on a :

$$\|R_m(x) - R_n(x)\| = \|R_{N-1}(x)\| + \left\| \prod_{k=N}^n \prod_{j=1}^{J_k} \left( \frac{x}{x-a_{kj}} \right)^{p_{kj}} \right\| + \left\| \prod_{k=n+1}^m \prod_{j=1}^{J_k} \left( \frac{x}{x-a_{kj}} \right)^{p_{kj}} - 1 \right\|$$

Comme  $\frac{x}{x-a_{kj}} = 1 + \frac{a_{kj}}{x-a_{kj}}$  et que  $\left\| \frac{a_{kj}}{x-a_{kj}} \right\| = r_k - \|x\| \geq r_{N'} - r_N > 0$

pour  $k \geq N'$ , en vertu de ce qu'on vient de voir on a :

$$\left\| \prod_{k=n+1}^m \prod_{j=1}^{J_k} \left( \frac{x}{x-a_{kj}} \right)^{p_{kj}} - 1 \right\| \geq \inf_{n+1 \leq k \leq m} \inf_{1 \leq j \leq J_k} p^\alpha (r_{N'} - r_N) + (\alpha_{kj} - \alpha) \text{Log } p$$

d'autre part

$$\left\| \prod_{k=N}^n \prod_{j=1}^{J_k} \left( \frac{x}{x-a_{kj}} \right)^{p_{kj}} \right\| = 0$$

et  $\|R_{N-1}(x)\| = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{J_k} p_{kj} (\|x\| - \|x-a_{kj}\|) \geq \inf_{1 \leq k \leq N-1} \sum_{j=1}^{J_k} p_{kj} (\|a_{kj}\| - p_{kj})$ ,

car si pour un  $\ell$  et un  $i$  on a  $\|x-a_{\ell i}\| > \|x\|$ , on a alors  $\|x\| = \|a_{\ell i}\| = r_\ell$ ,  
 $p_{\ell j} \geq \|x-a_{\ell j}\|$  pour  $1 \leq j \leq J_\ell$ , et  $\|x-a_{kj}\| \leq \|x\|$  pour  $k \neq \ell$ .

Comme  $\inf_{1 \leq j \leq J_k} \alpha_{kj}$  tend vers  $+\infty$  quand  $k \rightarrow \infty$ , on peut trouver  $N'''$  tel que

pour  $k \geq N'''$  on ait :

$$\inf_{1 \leq j \leq J_k} \alpha_{kj} \geq \alpha - \frac{p^\alpha (r_{N'} - r_N)}{\text{Log } p} - \frac{1}{\text{Log } p} \inf_{1 \leq k \leq N-1} \sum_{j=1}^{J_k} p_{kj} (\|a_{kj}\| - p_{kj}) + \frac{M}{\text{Log } p} .$$

Alors, pour  $m > n \geq N'''$ ,  $x \in A$ ,  $|x| \leq r_N$ , on aura :

$$\|R_m(x) - R_n(x)\| \geq M .$$

Finalement, on a vu que quel que soit  $M$  il existe  $N'''$  tel que pour  $m > n \geq N'''$  et  $x \in A$ , on ait :

$$\|R_m(x) - R_n(x)\| \geq M .$$

Ce qui montre que la suite  $R_n(x)$  converge uniformément sur  $A$  vers un élément analytique  $f$ .

D'autre part, on a vu que quel que soit  $M$ , il existait  $N$  tel que  $|x| > r_N$  et  $n \geq N$  on ait  $\|R_n(x)\| \geq M$ , ce qui montre que  $R_n(x)$  converge vers 0 pour  $|x| \geq r$ .

Enfin, pour  $\|x\| \leq r_1$  et pour tout  $n$ , on a :  $\|R_n(x)\| \leq 0$ ; comme  $A \cap \{x \mid \|x\| \leq r_1\} \neq \emptyset$ , il en résulte que sur cet ensemble  $f$  n'est pas nulle.

Ce qui achève la démonstration.

Notons que dans le cas de la suite décroissante  $r_n$ , on aurait trouvé que  $f$  était identiquement nulle sur l'ouvert non vide  $A \cap \{x \mid \|x\| \leq r\}$  et non nulle à l'origine, la convergence uniforme se démontrant comme ci-dessus.

§ 9. - Fonctions analytiques

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de prouver que la classe des fonctions analytiques ainsi définie sur les ensembles analytiques est plus vaste que la classe des fonctions analytiques définie sur les quasi-connexes. Précisément :

Théorème 3 : Soit  $A$  un ensemble analytique. Si l'intérieur de l'adhérence de  $A$  est un quasi-connexe, tout élément analytique sur  $A$  se prolonge en un élément analytique sur un quasi-connexe contenant  $A$  (et dépendant de l'élément analytique considéré) ; si l'intérieur de l'adhérence de  $A$  n'est pas un quasi-connexe, il existe un élément analytique sur  $A$  qui ne peut pas être prolongé en une fonction analytique sur un quasi-connexe contenant  $A$ .

Soit  $A$  un ouvert et supposons que l'intérieur  $A'$  de l'adhérence de  $A$  soit un quasi-connexe. Soit  $f$  un élément analytique  $A$  et soit  $R$  une fraction rationnelle approximant  $f$  sur  $A$  :  $\|R(x)-f(x)\| \geq M$  pour  $x \in A$ . Soient  $a_1, \dots, a_k$  les pôles de  $R$  situés dans  $A'$  et posons  $B = A' \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ .  $B$  est un quasi-connexe. Alors toute fraction rationnelle approximant  $f$  sur  $A$  n'a pas de pôle dans  $B$ . En effet, si  $\|Q(x)-f(x)\| \geq M'$  pour  $x \in A$ , on a  $\|R(x)-Q(x)\| \geq \inf(M, M')$  pour  $x \in A$  et par continuité cette inégalité se prolonge sur  $B$  ce qui prouve que  $Q$  n'a pas de pôle sur  $B$  puisque  $R$  n'en a pas.

Alors, si  $R_n(x)$  est une suite de fractions rationnelles, convergeant vers  $f$  sur  $A$ ,  $R_n$  n'a pas de pôles dans  $B$  ; comme c'est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme sur  $A$  on voit comme ci-dessus que c'est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme sur  $B$  et donc  $R_n$  converge sur  $B$  vers un élément analytique qui prolonge  $f$ . Ceci prouve en particulier que  $A$  est un ensemble analytique, mais on pourrait le voir directement à partir du critère  $(\tilde{*})$ .

Si l'intérieur de l'adhérence de  $A$  n'est pas un quasi-connexe, c'est qu'il existe un point  $x_0$  de  $A$  et une suite de disque  $D_n$ ,  $\|x-a_n\| < \rho_n$ , contenus dans  $A$  avec  $\rho_n < +\infty$ ,  $\|x_0-a_n\|$  formant une suite monotone stricte convergeant vers  $r$ , et de plus,  $\{x \mid \|x-x_0\| \leq \|x_0-a_n\|\} \cap A \neq \emptyset$   $\{x \mid \|x-x_0\| \leq r\} \cap A \neq \emptyset$ .

Pour simplifier, prenons  $x_0 = 0$ .

Soit alors  $b_n$  une suite de points de  $K$  telle que l'on ait  $b_n \neq a_n$  pour tout  $n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|b_n - a_n\| = +\infty$  et  $\|b_n - a_n\| > \rho_n$  pour tout  $n$ .

Alors le contre-exemple cherché est fourni par le produit infini

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{x - b_n}{x - a_n}$$

Montrons que ce produit converge uniformément sur  $A$ .

Notons que

$$\frac{x - b_n}{x - a_n} = 1 + \frac{a_n - b_n}{x - a_n}$$

et que pour  $x \in A$ , on aura  $\|x - a_n\| \leq \rho_n < \|a_n - b_n\|$ .

Rappelons qu'on a vu au § 7 que pour  $\|c_i\| > 0$  on a :

$$\left\| \prod_{i=1}^k (1 + c_i) - 1 \right\| \geq \inf_{1 \leq i \leq k} \|c_i\|$$

Alors, pour  $m > n \geq N$  et  $x \in A$ , on a :

$$\left\| \prod_{k=1}^m \frac{x - b_k}{x - a_k} - \prod_{k=1}^n \frac{x - b_k}{x - a_k} \right\| = \left\| \prod_{k=1}^n \frac{x - b_k}{x - a_k} \right\| + \left\| \prod_{k=n+1}^m \frac{x - b_k}{x - a_k} - 1 \right\|$$

Mais on a

$$\left\| \prod_{k=1}^n \frac{x - b_k}{x - a_k} \right\| = 0$$

$$\left\| \prod_{k=n+1}^m \left( 1 + \frac{a_k - b_k}{x - a_k} \right) - 1 \right\| \geq \inf_{n < k \leq m} (\|a_k - b_k\| - \|x - a_k\|) \geq \inf_{n < k \leq m} (\|a_k - b_k\| - \rho_k)$$

Etant donné  $M$ , choisissons  $N$  tel que  $k \geq N$  implique  $\|a_k - b_k\| - \rho_k \geq M$ , on aura alors pour  $m > n \geq N$  et  $x \in A$

$$\left\| \prod_{k=1}^m \frac{x - b_k}{x - a_k} - \prod_{k=1}^n \frac{x - b_k}{x - a_k} \right\| \geq M$$

ce qui prouve que le produit infini converge uniformément sur  $A$ .

Montrons alors que  $f$  ne se prolonge pas sur un quasi-connexe  $B$  contenant  $A$ . Pour simplifier, supposons la suite  $\|a_n\|$  décroissante. Alors  $f$  se prolonge en une fonction analytique sur la quasi-connexe  $Q = \{x \mid \|x\| > r, \forall n \quad x \neq a_n\}$  et  $f$  n'est pas bornée au voisinage des points  $a_n$  ( $f$  y a des pôles). Si  $f$  se prolongeait sur le quasi-connexe  $B$ ,  $f$  se prolongerait sur le quasi-connexe  $B \cup Q$  qui contiendrait tous les points  $a_n$ , sauf un nombre fini,  $f$  devrait donc être bornée en ces points, ce qui contredit ce que nous venons de voir.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] MOTZKIN Elhanan et ROBBA Philippe. - Ensembles satisfaisant au principe du prolongement analytique en analyse p-adique. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t 269, p. 126-129, (1969).
  - [2] MOTZKIN Elhanan. - Une condition nécessaire pour l'équivalence conforme des domaines d'analyticité en analyse p-adique. (à paraître).
  - [3] LAZARD Michel. - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. Publications Mathématiques, n° 14 de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1962).
  - [4] KRASNER Marc. - Comptes rendus, t. 238, p. 2385 (1954), t. 235 p. 468-745 (1955).
- KRASNER Marc. - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, dans Les Tendances géométriques en algèbre et en théorie des nombres (Colloque de Clermont-Ferrand, 1964), Editions du C. N. R. S. (1966).
- [5] DESCOMPS-GUILLOUX Annette et MOTZKIN Elhanan. - Fonctions analytiques univalentes dans un corps ultramétrique complet algébriquement clos. Comptes rendus, t. 268, p. 1531 (1969).

-----