

ELHANAN MOTZKIN

Un invariant conforme p -adique

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. n° 1, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969____A1_0

© Université Bordeaux 1, 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN INVARIANT CONFORME p -ADIQUE

par

Elhanan MOTZKIN

Soit K un corps valué complet algébriquement clos ultramétrique.

On se propose d'associer à chaque ensemble quasi-connexe dans K une structure arborescente numérotée invariante par transformations bi-analytiques.

Soit Q un quasi-connexe et soit S son complémentaire. On suppose S borné. Soit D_0 le plus petit disque circonferencié contenant S et soit r_0 le rayon de D_0 . Soient D_0^i les disques non-circonferenciés de rayon r_0 contenus dans D_0 . Pour chaque i , soit D_1^i le plus petit disque circonferencié contenant $D_0^i \cap S$ et soit son rayon r_1^i . On démontre facilement :

LEMME. $D_0^i \cap S \neq D_0^i$ implique $r_1^i < r_0$.

On peut maintenant procéder à la construction de l'arbre. D'un point correspondant à D_0 ("la racine") on étend des arêtes à des points correspondant aux disques intérieurs D_0^i . On a les cas suivants :

Cas 1 : $D_0^i \cap S = \emptyset$. On écrit $\emptyset$ sur l'arête reliant D_0 à D_0^i .

Cas 2 : $D_0^i \cap S \neq \emptyset$. On écrit r_1^i / r_0 sur l'arête reliant D_0 à D_0^i .

Enfin on ajoute une arête reliant D_0 au "disque extérieur" $\oint D_0$ marquée 1.

On note que dans le cas 2 il est possible que r_1^i / r_0 soit égal à 1 ($D_0^i \cap S = D_0^i$), à 0 ($D_0^i \cap S$ est un point), ou à un nombre n'appartenant pas au groupe des valeurs (la circonférence de D_1^i est vide). Si aucune de ces possibilités n'intervient, on peut continuer le processus :

Pour chaque i , on relie le point correspondant à D_1^i à des points correspondants à ses disques intérieurs D_1^{ij} . Si $D_1^{ij} \cap S = \emptyset$ on écrit $\emptyset$ sur l'arête (D_1^i, D_1^{ij}) , et si $D_1^{ij} \cap S \neq \emptyset$ on écrit r_2^{ij} / r_1^i , où r_2^{ij} est le rayon du plus petit disque contenant $D_1^{ij} \cap S$.

Exception : Si $D_0^i \cap S = \emptyset$ pour tous les disques intérieurs D_0^i , sauf au plus deux (disons i_1 et i_2), on remplace le point correspondant à la racine par une arête reliant $D_0^{i_1}$ à $D_0^{i_2}$. Si le plus petit disque circonferencié contenant $D_0^{i_1} \cap S$ (resp. $D_0^{i_2} \cap S$) est noté $D_1^{i_1}$ (resp. $D_1^{i_2}$) et son rayon $r_1^{i_1}$ (resp. $r_1^{i_2}$), alors on écrit sur l'arête : $\min(r_1^{i_1} / r_1^{i_2}, r_1^{i_2} / r_1^{i_1})$.

THEOREME 1. Le disque correspondant à une chaîne infinie est nécessairement circonferencié et est contenu entièrement dans S .

La démonstration fait usage des propriétés des ensembles quasi-connexes.

THEOREME 2. Soit T une homographie, tel que $T(S)$ soit un ensemble borné.
Alors l'arbre associé à $T(Q)$ est le même que l'arbre associé à Q .

Dans la démonstration, on utilise le fait que l'image d'un disque par inversion est un disque. On rappelle à ce propos que M. Krasner a démontré que $T(Q)$ est quasi-connexe si Q l'est, ce qui donne un sens à l'arbre de $T(Q)$. D'autre part, on voit que, si les structures topologique et numérique de l'arbre sont conservées, la racine a pu être déplacée, ou même éliminée à la faveur d'une arête ; un peu comme si on relevait un fil à des points différents en laissant tomber les bouts.

Nous pouvons maintenant laisser tomber la restriction S borné, puisque par une homographie, on peut toujours se ramener à ce cas.

Le reste de la démonstration utilise intimement le polygone de valuation décrit par M. Lazard [1] et par P. Robba et moi-même [2].

On établit d'abord la forme du polygone dans le cas d'une fonction analytique bijectif sur un intervalle $r_1 < |x| < r_2$ ($<$ représente $<$ ou $\leq$). On trouve que sur l'intervalle, le polygone est de pente 1, 0 ou -1. Si on normalise de façon à ce que D_0 soit le disque unité $|x| \leq 1$ et que l'image de $|x| > 1$ soit $|x| > 1$, le polygone sur $|x| > 1$ est nécessairement de pente 1.

LEMME. L'image par une fonction analytique bijective d'un disque est un disque [3]. L'image par une fonction analytique bijective d'une couronne est une couronne avec le même rapport de rayons.

THEOREME 3. Soit f une fonction analytique bijective. Alors f conserve toutes les branches infinies, ainsi que les arêtes non-numérotées 1 .

La démonstration se fait niveau par niveau et dépend des observations suivantes :

1) le graphe de f sur $|x| > 1$ existe et sa pente égale 1. Le graphe étant continu quel que soit le point 0 , il ne peut pas avoir de pente -1 . même si $|x| \leq 1$.

2) si le polygone de $f(x-a)$ est de pente 0 sur l'intervalle $r_1 < |x| \leq 1$, le polygone de $f - a$ sera de pente 1 (si f est bijective).

Pour faire marcher l'induction, on plonge éventuellement K dans un corps dont le corps de restes est non-dénombrable [4].

Remarque. Si f est une fonction analytique bijective sur Q , f^{-1} définie sur $f(Q)$ peut ne pas être analytique. En effet, soit Q le quasi-connexe comme suit : pour chaque disque intérieur D sur $|x| = 1$ on fait correspondre l'un des deux disques intérieurs définis par $\sqrt{x}$ ($x \in D$). Soit $f = x^2$. Alors f est analytique sur Q . Mais $f^{-1} = \sqrt{x}$ n'est pas analytique sur $f(Q) = \{ |x| = 1 \}$, puisque $\sqrt{x}$ ne satisfait pas au principe du prolongement analytique.

THEOREME 4. Soit f analytique bijective sur Q . Alors f diminue le nombre d'arêtes marquées 1 .

COROLLAIRE. f conserve l'arbre si f est bi-analytique.

COROLLAIRE. L'image d'un quasi-connexe par une fonction analytique bijective est un quasi-connexe.

THEOREME 5. Si K a un corps de restes non dénombrables et si Q est régulier, f analytique bijective implique f bi-analytique.

Notons que l'arbre est extrêmement rigide.

THEOREME 6. Soit f analytique bijective. Alors f permute linéairement les arêtes à chaque sommet si et seulement si f est bi-analytique [5].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LAZARD (M.). - Publications I. H. E. S. , n° 14.
- [2] MOTZKIN (E.) et ROBBA (P.). - Ensembles satisfaisant au principe du prolongement analytique (à paraître).
- [3] Cette proposition a été trouvée indépendamment par Mme
Mme DESCOMPS-GUILLOU.
- [4] Cf. KRASNER (M.). - Colloque de Clermont-Ferrand, 1964. %
- [5] Ces deux théorèmes m'ont été signalés par P. ROBBA
(communication orale).