

JEAN FRESNEL

Fonctions zêta p -adique des corps de nombres abéliens réels

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. n° 15, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969____A15_0>

© Université Bordeaux 1, 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS ZETA p -ADIQUE DES CORPS DE NOMBRES ABELIENS REELS

par

Jean FRESNEL

-:-:-:-

0. - INTRODUCTION

Soit $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ le corps des rationnels, $\mathbb{Q}_p$ le corps p -adique élémentaire, $\mathbb{Z}_p$ son anneau de valuation, Ω_p un complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, A son anneau de valuation, $\mathfrak{M}$ son idéal de valuation.

Soit K une extension, abélienne, réelle, finie du corps $\mathbb{Q}$. La fonction Zêta du corps K est définie par

$$Z(s, K) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_q \frac{1}{(1 - N(q)^{-s})} \quad \text{si } \operatorname{Re}(s) > 1$$

où la somme est étendue à tous les idéaux entiers de K non nuls et où le produit est étendu à tous les idéaux premiers de K .

Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des caractères primitifs (c'est-à-dire des caractères de Dirichlet) du corps K , à chaque $\chi \in \mathfrak{X}$ on associe la fonction $L(., \chi)$ définie par

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_q \frac{1}{(1 - \chi(q)q^{-s})}$$

où le produit est étendu à tous les nombres premiers. On peut alors factoriser la fonction Zêta sous la forme

$$Z(s, K) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}} L(s, \chi) .$$

D'autre part, χ étant toujours un caractère primitif du corps K de conducteur f , la fonction L p -adique $L_p(\cdot, \chi)$ définie par Kubota et Leopoldt [8] est l'application continue de $\mathbb{Z}_p$ dans

$$\mathbb{Q}_p(\chi) = \mathbb{Q}_p[\chi(1), \chi(2), \dots, \chi(f)],$$

telle que pour m entier positif et $m \equiv 0 \pmod{p-1}$ si $p \neq 2$ (resp. $m \equiv 0 \pmod{2}$ si $p = 2$) on ait

$$(1) \quad L_p(1-m, \chi) = (1-\chi(p)p^{m-1}) L(1-m, \chi)$$

ceci a bien un sens puisque

$$L(1-m, \chi) = - \frac{B^m(\chi)}{m}$$

où $B^m(\chi)$ est le $m^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli [10], [4] relatif au caractère χ , ce nombre est algébrique et appartient au corps $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\chi(1), \dots, \chi(f))$.

Afin d'expliciter ces définitions, rappelons la signification du caractère θ_p [4], [8].

Soient p un nombre premier distinct de 2 et θ_p l'application de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ définie par

$$\theta_p(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{p^n} \quad (\text{limite } p\text{-adique})$$

(c'est-à-dire $\theta_p(a) \equiv a \pmod{p}$ et $(\theta_p(a))^p = \theta_p(a)$).

Si $p = 2$, θ_2 est l'application de $\mathbb{Z}_2$ dans $\mathbb{Z}_2$ définie par

$$\theta_2(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \in 2\mathbb{Z}_2 \\ 1 & \text{si } a \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{si } a \equiv -1 \pmod{4} \end{cases} \mathbb{Z}_2.$$

Si n est un entier rationnel θ_p^n est l'application de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ satisfaisant :

$$\theta_p^n(a) = \begin{cases} \theta_p(a)^n & \text{si } a \in \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p \\ 0 & \text{si } a \in p\mathbb{Z}_p \end{cases}.$$

Si p est un nombre premier, ε_p est l'application de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ satisfaisant :

$$\varepsilon_p(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p \\ 0 & \text{si } a \in p\mathbb{Z}_p \end{cases}$$

On a donc $\theta_p^0 = \varepsilon_p$.

On voit alors que la relation (1) s'écrit

$$L_p(1-m, \chi) = L(1-m, \chi \varepsilon_p).$$

Pour construire les fonctions L p -adique, il existe jusqu'ici trois méthodes [8], [4], [6] que nous allons rappeler brièvement. La première de ces méthodes, celle de Kubota et Leopoldt, utilise la remarque suivante : pour $m > 0$ et $m \equiv 0 \pmod{p-1}$ si $p \neq 2$ (resp. $m \equiv 0 \pmod{2}$ si $p = 2$)

$$L_p(1-m, \chi) = L(1-m, \chi \varepsilon_p) = - \frac{B^m(\chi \varepsilon_p)}{m}$$

d'autre part

$$(2) \quad B^m(\chi \varepsilon_p) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r f_1} \sum_{a=1}^{p^r f_1} \chi \varepsilon_p(a) a^m \quad (\text{limite } p\text{-adique})$$

où $f_1 = \text{ppcm}(f, p)$. Posons, selon [8]

$$\langle a \rangle = \begin{cases} \theta_p(a)/a & \text{si } a \in \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p \\ 0 & \text{si } a \in p\mathbb{Z}_p \end{cases}$$

La relation (2) s'écrit donc

$$B^m(\chi \varepsilon_p) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r f_1} \sum_{a=1}^{p^r f_1} \chi(a) \langle a \rangle^m \quad (\text{limite } p\text{-adique}).$$

Kubota et Leopoldt considèrent alors une forme linéaire $\mathfrak{M}_\chi$ définie sur un certain espace de fonction par

$$\mathfrak{M}_\chi(\varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r f_1} \sum_{a=1}^{p^r f_1} \chi(a) \varphi(\langle a \rangle).$$

Ils montrent alors que cette forme linéaire est continue et on voit par suite que la fonction $L_p(\cdot, \chi)$ est définie par

$$L_p(1-s, \chi) = - \frac{1}{s} \mathfrak{M}_\chi(x \mapsto x^s).$$

La seconde méthode revient à considérer la fonction

$$(1-m) \mapsto - \frac{B^m(\chi \theta_p^{-m})}{m}$$

et à montrer en utilisant un théorème d'interpolation p -adique [1] que cette fonction définie sur les entiers négatifs se prolonge à $\mathbb{Z}_p$ en une fonction continue. Ceci revient à démontrer que les nombres de Bernoulli satisfont des congruences du type Kummer.

Iwasawa construit ces fonctions par une méthode différente. Il les obtient à partir d'un quotient de séries entières en T en remplaçant cette indéterminée par $(1+q)^S - 1$, q étant un entier déterminé par le caractère χ . Cette définition lui permet de mettre en évidence une relation entre les fonctions L p -adiques et la p -composante du groupe des classes d'idéaux de la Γ -extension fondamentale au-dessus du corps K .

Ces trois méthodes présentent l'inconvénient de faire oublier l'analogie avec les fonctions L définies comme séries

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Nous proposons ici de donner une méthode qui sera plus proche de cet aspect. De façon simple, considérant la série de Taylor

$$G(s, \chi, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\theta_p^{-1}}(n) \left(\frac{\theta_p(n)}{n} \right)^s T^n$$

on est tenté d'écrire l'égalité

$$L_p(1-s, \chi) = G(1-s, \chi, 1).$$

Il est à peu près clair que tout le problème consiste à donner un sens à $G(s, \chi, 1)$, en effet la série de Taylor $G(s, \chi, T)$ a pour rayon de convergence 1^- et par conséquent $G(s, \chi, 1)$ n'a pas de sens à priori. Pour lui en donner un, on montre que la fonction $G(s, \chi, \cdot)$ est prolongeable analytiquement (au sens de Krasner) [7] à un domaine quasi-connexe contenant 0 et 1.

Dans un premier paragraphe nous énonçons quelques résultats sur le prolongement analytique en analyse p -adique. Au paragraphe 2 nous démontrons que l'on peut définir les fonctions L p -adiques par la méthode indiquée précédemment et en montrer l'analyticité. Au paragraphe 3 nous montrons comment l'on peut obtenir une formule p -adique des résidus pour le nombre de classes d'idéaux.

1. - PROLONGEMENT ANALYTIQUE

Dans ce paragraphe nous allons énoncer deux théorèmes sur les fonctions analytiques.

THEOREME 1. [2],[3] - Soit $\varphi(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ une série entière à coefficients dans Ω_p . Pour qu'elle soit la série de Taylor à l'origine d'une fonction analytique Φ dans le domaine $D = \{x \in \Omega_p \mid |x-1| \geq 1\}$ et nulle à l'infini, il faut et il suffit que la fonction $n \rightarrow a_n$, notée a soit prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$. Si

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{(1-x)^k} \quad \text{où} \quad \lambda_k \rightarrow 0 \quad \text{et}$$

$$\sup_{x \in D} |\Phi(x)| = \|\Phi\|_D = \sup_k |\lambda_k|, \quad \text{on a}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \binom{n+k-1}{n-1}, \quad \lambda_k = \sum_{i=1}^k (i)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} a(-i) \quad \text{et}$$

$$\|\Phi\|_D = \sup_n |a_n|.$$

Ce théorème permet de montrer que la suite (λ_n) tend vers zéro. Le théorème qui va suivre montre que la façon dont (λ_n) tend vers zéro dépend du module de continuité de la fonction a . Rappelons tout d'abord que si (u_n) est une suite très bien répartie [1] le $n^{\text{ième}}$ polynôme d'interpolation est

$$Q_n(x) = \frac{(x-u_0)(x-u_1)\dots(x-u_{n-1})}{(u_n-u_0)(u_n-u_1)\dots(u_n-u_{n-1})}.$$

Ainsi $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base normale du $\mathbb{Q}_p$ -espace de Banach $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Q}_p$ muni de la norme de la convergence uniforme [1].

THEOREME 2. - Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ telle que

$$(i) \quad \|f\| \leq 1,$$

(ii) il existe un entier u tel que, quel que soit k entier positif, quels que soient x et y dans $\mathbb{Z}_p$ satisfaisant $|x-y| \leq |p|^k$, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq |p|^{k-u}.$$

Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n$ la série d'interpolation de f sur la suite (u_n) , alors pour $n \geq p^{k+u}$ on a $|a_n| \leq |p|^k$.

Ce théorème admet en quelque sorte une réciproque [5].

II. - CONSTRUCTION DES FONCTIONS $L_p(\cdot, \chi)$

Dans ce paragraphe nous introduirons deux fonctions, $(s, X) \rightarrow h(s, X)$ et $(s, X) \rightarrow k(s, X)$ dont nous étudierons les propriétés d'analyticité et qui nous permettront de définir les fonctions $L_p(\cdot, \chi)$.

Etant donnée la définition du caractère θ_p (introduction), on voit que l'expression $\frac{1}{p}(\frac{x}{\theta_p(x)} - 1)$ appartient à $\mathbb{Z}_p$ si $x \in \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p$. On définit ainsi une application ψ_p pour $p \neq 2$ de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ par

$$\psi_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}(\frac{x}{\theta_p(x)} - 1) & \text{si } x \in \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p \\ 0 & \text{si } x \in p\mathbb{Z}_p \end{cases}$$

et de même pour $p = 2$ on définit ψ_2 comme étant une application de $\mathbb{Z}_2$ dans $\mathbb{Z}_2$ satisfaisant

$$\psi_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\frac{x}{\theta_2(x)} - 1) & \text{si } x \in \mathbb{Z}_2 - 2\mathbb{Z}_2 \\ 0 & \text{si } x \in 2\mathbb{Z}_2 \end{cases}.$$

Soit $x \in \mathbb{Z}_p$, alors la série

$$(3) \quad \epsilon_p(x) + \sum_{k=1}^{\infty} p^k \binom{s}{k} \psi_p^k(x)$$

converge uniformément sur tout sous-disque circonferenci  du disque D_1 non circonferenci  de centre 0 et de rayon $|p|^{-1+1/p-1}$ si $p \neq 2$ (resp. $|2|^{-1}$ si $p = 2$). Si $x \in \mathbb{Z}_p$ et si $s \in D_1$ nous noterons $(\frac{x}{\theta_p(x)})^s$ la somme de la série (3). Il est clair que la fonction $s \mapsto (\frac{x}{\theta_p(x)})^s$ est analytique et bornée sur D_1 . De façon plus précise nous avons si $x \in p\mathbb{Z}_p$

$$|(\frac{x}{\theta_p(x)})^s| = 1 \quad \text{quel que soit } s \in D_1, \quad \text{et}$$

$$|(\frac{x}{\theta_p(x)})^s - 1| < |p|^{1/p-1} \quad \text{si } s \in D_1.$$

Ces notations étant précisées, nous allons définir les fonctions $L_p(\cdot, \chi)$ par l'introduction successive de deux fonctions $(s, X) \mapsto k(s, X)$ et $(s, X) \mapsto h(s, X)$.

La série de Taylor

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_p^{(n)} \left(\frac{n}{\theta_p(n)} \right)^s \frac{X^n}{n}$$

est convergente pour $s \in D_1$ et $|X| < 1$.

Si $s \in D_1$ et $|X| < 1$, nous posons

$$(4) \quad h(s, X) = - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_p^{(n)} \left(\frac{n}{\theta_p(n)} \right)^s \frac{X^n}{n}.$$

Soit D_2 le domaine défini de la façon suivante :

$$D_2 = \{ X \in \Omega_p \mid |1-X| \geq 1 \}.$$

PROPOSITION 1.- Soit $s_0 \in D_1$, alors la fonction $X \mapsto h(s_0, X)$ est analytique sur D_2 .

Preuve. La fonction $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ $x \mapsto \varepsilon_p(x) \left(\frac{x}{\theta_p(x)} \right)^s \times \frac{1}{x}$ est continue, ainsi le théorème 1 montre que la fonction $X \mapsto h(s, X)$ est développable en série de Laurent sur D_2 sous la forme :

$$h(s_0, X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(s_0)}{(1-X)^n}$$

Désormais la fonction $X \mapsto h(s_0, X)$ désignera le prolongement analytique à D_2 de la fonction $X \mapsto h(s_0, X)$ définie sur D_1 par (4).

PROPOSITION 2. - Soit $X_0 \in D_2$, alors la fonction $s \mapsto h(s, X_0)$ est analytique et bornée sur D_1 .

Preuve. Posons $u_i = -(i+1)$, nous avons

$$\varepsilon_p(x) \left(\frac{x}{\theta_p(x)} \right)^s \times \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(s) Q_n(x).$$

Posons

$$\frac{1}{x} \psi_p^k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k Q_n(x),$$

ainsi

$$\lambda_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n^k p^k \left(\frac{s}{p} \right).$$

D'autre part la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} \psi^k(x)$ satisfait l'hypothèse du théorème 2 avec $u = 1$, il s'ensuit que la relation $\{n \geq p^{k+1}\}$ implique la relation $\{|\lambda_n(s)| \leq |p^k|\}$. En conclusion la suite de fonctions (λ_n) converge vers 0 uniformément sur D_1 et la série

$$h(s, X_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(s)}{(1-X_0)^n}$$

converge uniformément sur D_1 . D'autre part, nous avons $|\lambda_n(s)| \leq 1$ quel que soit $s \in D_1$, on peut conclure que

$$|h(s, X)| \leq 1 \quad \text{quels que soient } s \in D_1 \text{ et } X \in D_2.$$

Ce qui démontre la proposition.

Si $|X| < 1$ et si $s \in D_1$ nous avons

$$\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) h(s, Z_f^a X) = - \sum_{n=1}^{\infty} \chi \varepsilon_p(n) \left(\frac{n}{\theta_p(n)} \right)^s \frac{X^n}{n}.$$

On cherche donc à savoir si l'on peut faire $X = 1$, c'est-à-dire si l'on peut donner un sens à $h(s, Z_f^a)$ pour montrer que la fonction

$$(1-s) \mapsto - \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) h(s, Z_f^a)$$

est la fonction $L_p(\cdot, \chi)$.

Tout d'abord, remarquons que si $(a, f) \neq 1$ nous avons $\bar{\chi}(a) = 0$, par suite le fait de savoir si $h(s, Z_f^a)$ a un sens ne se pose que pour $(a, f) = 1$. Il est alors clair que $Z_f^a \in D_2$ si et seulement si $f \neq p^e$. Ainsi pour satisfaire le cas où $f = p^e$ nous avons recours à un artifice. Nous remplaçons la fonction $h(\cdot, \cdot)$ par une fonction $k(\cdot, \cdot)$ et la fonction $X \mapsto k(s, X)$ sera analytique sur un domaine contenant les Z_f^a même pour $f = p^e$.

Soit c un entier tel que $(c, p) = 1$, $c \neq 1$ et soit $k(s, X)$ la série de Taylor en X définie par

$$(5) \quad k(s, X) = h(s, X) - \left(\frac{c}{\theta_p(c)} \right)^s h(s, X^c).$$

LEMME 1. - Soit ξ une racine primitive $c^{\text{ième}}$ de l'unité. Si $s \in D_1$ et si $|X| < 1$ nous avons l'égalité

$$k(s, X) = - \sum_{i=1}^{c-1} h(s, \xi^i X) .$$

Preuve. Il suffit de remarquer que

$$\sum_{i=1}^{c-1} \xi^{in} = -1 \quad \text{si} \quad c \nmid n$$

$$\sum_{i=1}^{c-1} \xi^{in} = c-1 \quad \text{si} \quad c \mid n$$

et que $\varepsilon_p(c) = 1$.

Soit D_3 le domaine suivant de Ω_p :

$$D_3 = \{ X \in \Omega_p \mid \left| \frac{X^c - 1}{X - 1} \right| \geq 1 \} .$$

PROPOSITION 3. - Soit $s_o \in D_1$, alors la fonction $X \mapsto k(s_o, X)$ est prolongeable analytiquement sur D_3 .

Preuve. D'après la proposition de la fonction $X \mapsto h(s_o, \xi^i X)$ est développable en série de Laurent sous la forme

$$h(s_o, \xi^i X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(s_o)}{(1 - \xi^i X)^n} \quad \text{si} \quad |1 - \xi^i X| \geq 1 .$$

En utilisant la décomposition du lemme 1 nous avons

$$k(s_o, X) = - \sum_{i=1}^{c-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(s_o)}{(1 - \xi^i X)^n} \quad \text{si} \quad X \in D_3 .$$

Cette égalité montre bien que la fonction $X \mapsto k(s_o, X)$ est analytiquement prolongeable à D_3 .

Comme pour la fonction $X \mapsto h(s_o, X)$ désormais la fonction $X \mapsto k(s_o, X)$ désignera le prolongement analytique à D_3 de la fonction $X \mapsto k(s_o, X)$ définie sur D_1 par (5).

PROPOSITION 4. - Soit $X_o \in D_3$, alors la fonction $s \mapsto k(s, X)$ est analytique et bornée sur D_1 .

Preuve. Si $X_0 \in D_3$, l'élément $\xi^i X_0 \in D_2$ pour $1 \leq i < c$ et la proposition 2 dit que la fonction $s \mapsto h(s, \xi^i X_0)$ est analytique et bornée sur D_1 .

Rappelons que si χ est un caractère primitif de conducteur $f(\chi)$, si Z_f est une racine primitive $f(\chi)$ ième de l'unité (si $\chi = \varepsilon$ le caractère trivial, nous posons $f(\varepsilon) = 1$ et $Z_f = 1$) la somme de Gauss associée à χ et Z_f est définie par

$$\tau(\chi) = \sum_{a=1}^{f(\chi)} \chi(a) Z_f^a.$$

Remarquons que dans la notation de la somme de Gauss nous ne faisons figurer que le caractère χ afin de ne pas alourdir les notations.

Donnons une convention et rappelons quelques relations classiques. Soit χ un caractère primitif de conducteur f , φ une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou seulement sur les éléments de $\mathbb{N}$ premier à f) à valeur dans une extension de $\mathbb{Q}$.

Par convention dans une sommation de la forme

$$\sum_{a=1}^f \chi(a) \varphi(a)$$

l'expression $\chi(a) \varphi(a)$ est nulle si $(a, f) \neq 1$ (que $\varphi(a)$ soit définie ou non).

Soient $c \in \mathbb{N}$, $(c, f) = 1$, φ une fonction périodique de période f , on a

$$(6) \quad \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \varphi(ac) = \chi(c) \sum_{a=1}^f \chi(a) \varphi(a).$$

Rappelons que $\bar{\chi}$ est le caractère défini par $\bar{\chi}(a) = 0$ si $\chi(a) = 0$ et $\bar{\chi}(a) = \chi(a)^{-1}$ si $\chi(a) \neq 0$.

Soient φ une fonction périodique de période f_1 avec $f_1 | f$ et $f_1 \neq f$, on a

$$(7) \quad \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \varphi(a) = 0.$$

Nous nous proposons dans la suite de montrer que la fonction

$$(1-s) \mapsto -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f(\chi)} \bar{\chi}(a) k(s, Z_f^a) \frac{1}{1 - \chi(c) \left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}$$

est la fonction $L_p(\cdot, \chi)$. Pour ce faire il nous faudra donc démontrer que cette fonction prend sur les entiers négatifs congrus à 1 mod $(p-1)$ (si $p \neq 2$)

les mêmes valeurs que la fonction $L_p(\cdot, \chi)$ c'est-à-dire

$$L_p(1-m, \chi) = - \frac{B_p^m(\chi \varepsilon_p)}{m}$$

si $m \equiv 0 \pmod{p-1}$ et $m > 0$.

Désormais l'entier c choisi précédemment sera astreint aux conditions supplémentaires suivantes :

Si $\chi \neq \varepsilon$, $0 < c < p f(\chi)$, $\chi(c) \neq 1$ et $(c, p f(\chi)) = 1$.

Si $\chi = \varepsilon$, $0 < c < p^2$ et $c \neq 1$.

Ici encore il faut remarquer que l'entier c ainsi choisi dépend du caractère χ et du nombre premier p .

PROPOSITION 5. - Soit χ un caractère primitif, Z_f une racine primitive $f(\chi)$ ième de l'unité et $\tau(\chi)$ la somme de Gauss associée au caractère χ et à la racine Z_f . Alors pour tout entier positif r divisible par $p-1$ si $p \neq 2$ (resp. divisible par 2 si $p = 2$) nous avons

$$- \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f(\chi)} \bar{\chi}(a) k(r, Z_f^a) = -(1 - \chi(c) c^r) \frac{B_p^r(\chi \varepsilon_p)}{r},$$

où $B_p^r(\chi \varepsilon_p)$ est le r ième nombre de Bernoulli relatif au caractère $\chi \varepsilon_p$.

Preuve. Nous savons que les nombres de Bernoulli [4], [10] $B_p^r(\chi \varepsilon_p)$ vérifient la relation de récurrence

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} B_i(\chi \varepsilon_p) (cf')^{n+1-i} = (n+1) \sum_{k=1}^{cf'} \chi \varepsilon_p(k) k^n$$

où $f' = \text{ppcm}(p, f(\chi))$. Posons

$$B_1^r(\chi \varepsilon_p) = (1 - \chi(c) c^r) B_p^r(\chi \varepsilon_p).$$

Il est facile de voir que les nombres $B_1^r(\chi \varepsilon_p)$ vérifient la relation de récurrence

$$(8) \quad \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} B_1^i(\chi \varepsilon_p) (cf')^{n+1-i} = (n+1) \sum_{k=1}^{cf'} \chi \varepsilon_p(k) k^n - (n+1) c^{n+1} \chi(c) \sum_{k=1}^{f'} \chi \varepsilon_p(k) k^n.$$

Nous allons maintenant montrer que les nombres

$$- \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) k(r, Z_f^a) \times r$$

ou plus exactement des expressions analogues satisfont la relation de récurrence.

Soit la série de Taylor

$$g_i(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_p(n) n^{i-1} X^n \quad i \geq 1 .$$

Si $i \equiv 0 \pmod{p-1}$ lorsque $p \neq 2$ (resp. $i \equiv 0 \pmod{2}$, lorsque $p = 2$) on a

$$h(i, X) = g_i(X) .$$

Soit K l'opérateur $X \frac{d}{dX}$, on a

$$g_i(X) = H^{i-1} g_1(X) ,$$

de plus $g_1(X)$ se décompose sous la forme

$$g_1(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_p(n) X^n = \sum_{a=1}^{p-1} \frac{1}{1 - Z_p^a X} .$$

Par suite $g_1(X)$ est une fraction rationnelle dont les pôles sont les racines primitives $p^{\text{ième}}$ de l'unité. De même si $i \equiv 0 \pmod{p-1}$ lorsque $p \neq 2$ (resp. $i \equiv 0 \pmod{2}$ lorsque $p = 2$) nous avons

$$k(i, X) = g_i(X) - c^i g_1(X^C) .$$

Il est aisé de voir que $g_1(X) - c g_1(X^C)$ est une fraction rationnelle dont les pôles sont les racines $cp^{\text{ième}}$ de l'unité qui ne sont pas racines $p^{\text{ième}}$. Il en est donc de même de

$$g_i(X) - c^i g_1(X^C) = H^{i-1} (g_1(X) - c g_1(X^C)) .$$

Les fractions rationnelles $g_i(X)$ satisfont la relation de récurrence suivante

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} g_i(X) (\lambda f')^{n+1-i} = (n+1) \left\{ \left(\frac{1}{X^{\lambda f'}} - 1 \right) g_{n+1}(X) - \frac{1}{X^{\lambda f'}} \sum_{k=1}^{\lambda f'} \varepsilon_p(k) k^n X^k \right\}$$

où λ est un entier positif. Cette relation permet d'obtenir successivement

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} i g_i(X) (c f')^{n+1-i} &= (n+1) \left\{ \left(\frac{1}{X^{cf'}} - 1 \right) g_{n+1}(X) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{X^{cf'}} \sum_{k=1}^{cf'} \varepsilon_p(k) k^n X^k \right\} \\
\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} (i c^i g_i(X^c)) (c f')^{n+1-i} &= c^{n+1} (n+1) \left\{ \left(\frac{1}{X^{cf'}} - 1 \right) g_{n+1}(X) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{X^{cf'}} \sum_{k=1}^f \varepsilon_p(k) k^n X^{ck} \right\} .
\end{aligned}$$

En soustrayant ces deux dernières relations, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} i (g_i(X) - c^i g_i(X^c)) (c f')^{n+1-i} &= \\
(n+1) \left\{ \left(\frac{1}{X^{cf'}} - 1 \right) (g_n(X) - c^n g_n(X^c)) - \frac{1}{X^{cf'}} \sum_{k=1}^{cf'} \varepsilon_p(k) k^n X^k \right. \\
&\quad \left. + \frac{c^{n+1}}{X^{cf'}} \sum_{k=1}^{f'} \varepsilon_p(k) k^n X^{ck} \right\} .
\end{aligned}$$

Il résulte de l'étude des pôles de $g_i(X) - c^i g_i(X^c)$ que Z_f^a n'est pas un pôle de la fraction rationnelle $g_i(X) - c^i g_i(X)$ si $(a, g) = 1$. Ainsi

$$\begin{aligned}
(9) \quad \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} i (g_i(X) - c^i g_i(X^c))_{X=Z_f^a} (c f')^{n+1-i} \\
- (n+1) \left\{ \sum_{k=1}^{cf'} \varepsilon_p(k) k^n Z_f^{ak} - c^{n+1} \sum_{k=1}^{f'} \varepsilon_p(k) k^n Z_f^{caf'} \right\} .
\end{aligned}$$

Sachant que l'on a

$$\tau(\chi) \tau(\bar{\chi}) = f(\chi)$$

un calcul facile montre que

$$\begin{aligned}
(10) \quad \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \left(\sum_{k=1}^{cf'} \varepsilon_p(k) k^n Z_f^{ak} \right) &= \sum_{k=1}^{cf'} \chi \varepsilon_p(k) k^n \\
\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \left(\sum_{k=1}^{f'} \varepsilon_p(k) k^n Z_f^{ack} \right) &= \chi(c) \sum_{k=1}^{f'} \chi \varepsilon_p(k) k^n .
\end{aligned}$$

Les relations (9) et (10) indiquent alors que les quantités

$$\beta_i = \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) i (g_i(X) - c^i g_i(X^c))_{X=Z_f^a}$$

satisfont la relation de récurrence (8) des nombres $B_1(\chi)$. Comme

$$\beta_0 = B_1^0(\chi) = \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \times (0) \times (g_0(X) - g_0(X^c))_{X=Z_f^a} = 0$$

ceci prouve que

$$\beta_i = B_1^i(\chi \varepsilon_p) \quad \text{pour } i \geq 0$$

ainsi

$$\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) k(r, Z_f^a) = B_1^r(\chi \varepsilon_p) = (1 - \chi(c) c^r) B^r(\chi \varepsilon_p)$$

si $r \equiv 0 \pmod{p-1}$ lorsque $p \neq 2$ (resp. $r \equiv 0 \pmod{2}$ lorsque $p = 2$).

THEOREME 3.- Soit χ un caractère primitif non trivial. Alors la fonction

$$(1-s) \mapsto -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) k(s, Z_f^a) \frac{1}{1 - \chi(c) \left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}$$

définie sur D_1 est la fonction $L_p(\cdot, \chi)$. Elle est analytique et bornée sur D_1 .

Preuve. La fonction $s \mapsto \chi(c) \left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s$ est analytique sur D_1 . De plus, quel que soit $s \in D_1$ on a

$$\left| \left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s - 1 \right| < |p|^{1/p-1}, \quad \text{et par suite}$$

$$\left| 1 - \chi(c) \left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s \right| = |1 - \chi(c)| \quad \text{quel que soit } s \in D_1$$

ainsi $1 - \chi(c) \left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s$ ne s'annule pas sur D_1 et la fonction

$$(1-s) \mapsto \frac{1}{1 - \chi(c) \left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}$$

est analytique sur D_1 . La proposition nous montre que

$$(1-s) \mapsto -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) k(s, Z_f^a) \frac{1}{1 - \chi(c) \left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}$$

est analytique sur D_1 et bornée par $|1 - \chi(c)|^{-1}$. Finalement sur les entiers négatifs congrus à 1 mod $(p-1)$ si $p \neq 2$ (resp. congrus à 1 mod 2 si $p = 2$) cette fonction prend les mêmes valeurs que la fonction $L_p(\cdot, \chi)$ (proposition 5). Le théorème en résulte immédiatement.

THEOREME 4. - Soit c un entier associé au caractère trivial. Alors la fonction

$$(11) \quad (1-s) \mapsto -\frac{k(s, 1)}{1 - \left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}$$

est la fonction $Z_p(\cdot, \mathbb{Q}) = L_p(\cdot, \varepsilon)$. Elle est méromorphe sur D_1 , elle a un
seul pôle, il est en 1 , il est simple et a pour résidu $\frac{p-1}{p}$. De plus la fonc-
tion $s \mapsto (s-1) Z_p(s, \mathbb{Q})$ est bornée sur D_1 .

Preuve. La quantité $\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s$ se décompose sous la forme

$$\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s = 1 + s g(s), \quad \text{où } g \text{ est une fonction analytique}$$

sur D_1 . Il est aisé de vérifier que

$$|g(s)| = \left| 1 - \frac{c}{\theta_p(c)} \right|.$$

Par suite, la fonction $(1-s) \mapsto \frac{s}{1 - \left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}$ est analytique et bornée sur

D_1 et $(1-s) \mapsto -\frac{k(s, 1)}{1 - \left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}$ est méromorphe sur D_1 admet un seul pôle

il est en 1 . Calculons sans résidu

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^s}{-s} = \log \left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right) = \frac{1}{p-1} \log(c^{p-1})$$

$$k(0, X) = h(0, X) - h(0, X^c)$$

$$\text{or} \quad h(0, X) = - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_p(n) \frac{X^n}{n} = \frac{1}{p} \log \frac{(1-X)^p}{1-X^p}$$

$$\text{d'où} \quad k(0, X) = \frac{1}{p} \log \left\{ \frac{(1-X)^p}{1-X^p} \times \frac{1-X^{cp}}{(1-X^c)^p} \right\}$$

$$k(0, 1) = -\frac{1}{p} \log(c^{p-1}),$$

ainsi le résidu cherché est $\frac{p-1}{p}$. Finalement la proposition 5 montre que la fonction (11) prend sur les entiers négatifs congrus à $1 \pmod{p-1}$ si $p \neq 2$ (resp. congrus à $1 \pmod{2}$ si $p = 2$) les mêmes valeurs que la fonction $Z_p(\cdot, \mathbb{Q})$. Ceci termine donc la preuve du théorème.

III. - FORMULE ANALYTIQUE p-ADIQUE POUR LE NOMBRE DE CLASSES D'IDEAUX

Rappelons la définition des quantités $L_p(\chi)$ qui sont des équivalents p-adiques des quantités complexes $L(1, \chi)$. Pour définir ces expressions nous considérerons trois cas, toutefois χ désignera toujours un caractère primitif, $f(\chi)$ son conducteur, Z_f une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l'unité et $\tau(\chi)$ la somme de Gauss associé à χ et Z_f .

a) Cas où $f(\chi) \neq p^e$

$$(12) \quad L_p(\chi) = - \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f(\chi)} \bar{\chi}(a) \log(1 - Z_f^a).$$

On remarque en effet que la condition $f(\chi) \neq p^e$ implique que $1 - Z_f^a$ est une unité p-adique si $(a, f(\chi)) = 1$ et que par suite le logarithme p-adique de $1 - Z_f^a$ est défini.

b) Cas où $f(\chi) = p$

$$(13) \quad L_p(\chi) = - \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \cdot \frac{1}{p-1} \cdot \sum_{a=1}^p \bar{\chi}(a) \log \frac{(1 - Z_f^a)^{p-1}}{p}.$$

c) Cas où $f(\chi) = p^e \quad e > 1$

$$(14) \quad L_p(\chi) = - \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \cdot \frac{1}{p} \cdot \sum_{a=1}^{f(\chi)} \bar{\chi}(a) \log \left\{ \frac{(1 - Z_f^a)^p}{(1 - Z_f^{ap})} \right\}.$$

Nous pouvons montrer maintenant que les quantités $L_p(\chi)$ sont à un facteur simple près les valeurs au point 1 des fonctions $L_p(\cdot, \chi)$.

THEOREME 5. - Quels que soient le caractère $\chi \neq \varepsilon$ et le nombre premier p, nous avons

$$L_p(1, \chi) = \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) L_p(\chi).$$

Preuve. Calculons l'expression $\left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) L_p(\chi)$. Supposons $f(\chi) \neq p^e$.

Si de plus $p \nmid f$, d'après (6)

$$\chi(p) \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \log(1 - Z_f^a) = \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \log(1 - Z_f^{ap})$$

et ainsi

$$(15) \quad \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \frac{1}{p} \log \left\{ \frac{(1-Z_f^a)^p}{1-Z_f^{ap}} \right\}.$$

Si $p \mid f$, d'après (7)

$$\sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \log (1-Z_f^{ap}) = 0$$

et ainsi

$$\left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \frac{1}{p} \log \left\{ \frac{(1-Z_f^a)^p}{1-Z_f^{ap}} \right\}.$$

Supposons $f(\chi) = p^e$ $e > 1$, nous avons en utilisant (14)

$$(16) \quad \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) L_p(\chi) = L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \frac{1}{p} \log \left\{ \frac{(1-Z_f^a)^p}{1-Z_f^{ap}} \right\}.$$

Supposons $f(\chi) = p$, on a

$$(17) \quad \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) L_p(\chi) = L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \frac{1}{p-1} \log \frac{(1-Z_f^a)^{p-1}}{-p}.$$

Calculons l'expression $L_p(1, \chi)$. D'après le théorème 3

$$L_p(1, \chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) k(0, Z_f^a) \frac{1}{1-\chi(c)}$$

$$k(0, X) = h(0, X) - h(0, X^c) = \frac{1}{p} \log \left\{ \frac{(1-X)^p}{1-X^p} \times \frac{1-X^{cp}}{(1-X^c)^p} \right\}.$$

Si $f \neq p$ et si $(a, f) = 1$

$$k(0, Z_f^a) = \frac{1}{p} \log \left\{ \frac{(1-Z_f^a)^p}{1-Z_f^{ap}} \times \frac{1-Z_f^{acp}}{(1-Z_f^{ac})^p} \right\}, \quad \text{soit}$$

$$k(0, Z_f^a) = \frac{1}{p} \log \frac{(1-Z_f^a)^p}{1-Z_f^{ap}} - \frac{1}{p} \log \frac{(1-Z_f^{ac})^p}{1-Z_f^{acp}}.$$

Par suite en utilisant (6) on obtient

$$(18) \quad \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) k(0, Z_f^a) = (1-\chi(c)) \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \frac{1}{p} \log \frac{(1-Z_f^a)^p}{1-Z_f^{ap}}.$$

Si $f = p$ et si $(a, p) = 1$

$$k(0, Z_p^a) = \frac{1}{p} \log \left\{ \frac{(1-Z_p^a)^p}{(1-Z_p^{ac})^p} \times c \right\}, \quad \text{soit}$$

$$k(0, Z_p^a) = \log \frac{1-Z_p^a}{1-Z_p^{ac}} + \frac{1}{p} \log c, \quad \text{soit}$$

$$k(0, Z_p^a) = \frac{1}{p-1} \log \frac{(1-Z_p^a)^{p-1}}{-p} - \frac{1}{p-1} \log \frac{(1-Z_p^{ac})^{p-1}}{-p} + \frac{1}{p} \log c.$$

Par suite en utilisant (6) on obtient

$$(19) \quad \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) k(0, Z_f^a) = (1-\chi(c)) \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \frac{1}{p-1} \log \left\{ \frac{(1-Z_p^a)^{p-1}}{-p} \right\}.$$

Finalement les relations (15), (16), (17), (18) et (19) montrent que

$$L_p(1, \chi) = \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) L_p(\chi).$$

Il nous est maintenant possible de déterminer une expression analytique p -adique du nombre de classes d'idéaux d'un corps de nombres abélien réel avec le résidu au point 1 de la fonction Zêta p -adique.

THEOREME 6. - Soit K un corps de nombres abélien réel de degré n, de discriminant d, de régulateur p-adique R_p, dont h est le nombre de classes d'idéaux et dont Z_p(., K) est la fonction Zêta p-adique, alors

$$\frac{2^{n-1} h R_p}{\sqrt{d}} = \prod_{\mathfrak{P}|p} (1 - N(\mathfrak{P})^{-1})^{-1} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) Z_p(s, K)$$

Preuve. On sait [4], [8] que, par définition

$$Z_p(., K) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}} L_p(., \chi)$$

où $\mathfrak{X}$ désigne l'ensemble des caractères de l'extension abélienne K.

D'autre part, d'après Leopoldt [11] on a

$$\frac{2^{n-1} h R_p}{\sqrt{d}} = \prod_{\chi \neq \epsilon} L_p(\chi).$$

Le théorème 4 montre que

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1) Z_p(s, \mathbb{Q}) = 1 - \frac{1}{p}.$$

D'après le théorème 5 on déduit que

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1) Z_p(s, K) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) \prod_{\chi \neq \varepsilon} L_p(\chi).$$

La relation

$$\prod_{\chi \in \mathfrak{X}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) = \prod_{\mathfrak{p} | p} (1 - N(\mathfrak{p})^{-1})$$

est classique et on en déduit la formule cherchée.

-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE Yvette. - Interpolation p-adique. Bull. Soc. Math. France, t. 92, 1964, pp. 117-160.
- [2] AMICE Yvette. - Fonctions analytiques dans le complémentaire d'une famille de disques, exposé n° 8, Séminaire de théorie des nombres, Bordeaux, 1968/69.
- [3] AMICE Yvette et FRESNEL Jean. - Fonctions Zêta des corps de nombres abéliens réels. Acta Arithmetica (à paraître)
- [4] FRESNEL Jean. - Nombres de Bernoulli et fonctions L p-adiques. Annales de l'Institut Fourier, tome XVII, fasc. 2, 1967, pp. 281-333.
- [5] HELSMOORTELS Eve. - Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 271, n° 12, pp. 546-548.
- [6] IWASAWA Kenkichi. - On p-adic L-functions. Annals of math. vol. 89 n° 1, january 1969, pp. 198-205.
- [7] KRASNER Marc. - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres, n° 143, Colloques internationaux du C. N. R. S.
- [8] KUBOTA T. and LEOPOLDT H. W. - Eine p-adische theorie der Zetawerte. I Einführung der p-adischer Dirichletschen L-Funktionen. Journal für die reine und ang. Math., t. 214/215, 1964, pp. 328-333.

- [9] LAZARD Michel. - Les zéros d'une fonction analytique sur un corps
valué complet . Publications de l'I. H. E. S. , n° 14.
- [10] LEOPOLDT H. W. - Eine verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen.
Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, t. 22, 1958, pp. 131-140.
- [11] LEOPOLDT H. W. - Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern. Journal
für die reine und ang. math. Band 209, Heft 1/2, 1962,
pp. 54-71.

-:-:-:-:-