

BERNARD ROUSSEAU

**Théorème de Baker-Brumer sur les unités d'un corps
de nombres algébriques**

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969), exp. n° 11, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=STNB_1968-1969__A11_0

© Université Bordeaux 1, 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THEOREME DE BAKER-BRUMER SUR LES UNITES
 D'UN CORPS DE NOMBRES ALGEBRIQUES

par

Bernard ROUSSEAU

-:-:-:-

Soit p un nombre premier, $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p -adiques, Ω_p un complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Soit $x \rightarrow |x|$ la valeur absolue de Ω_p normalisée par $|p| = 1/p$. Soient A_p l'anneau de valuation de Ω_p , $\mathfrak{m}_p$ son idéal de valuation, U_p le groupe des unités de A_p . Alors la fonction logarithme p -adique définie sur $1 + \mathfrak{m}_p$ par

$$\log v = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-v)^k}{k}$$

se prolonge fonctionnellement sur U_p selon [12].

THEOREME. [3] - Soit $\alpha_1 \dots \alpha_n$ éléments de U_p algébriques sur $\mathbb{Q}$ dont les logarithmes p -adiques sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors ces logarithmes sont linéairement indépendants sur la clôture algébrique de $\mathbb{A}$ de $\mathbb{Q}$ dans Ω_p .

Soit donc $\alpha_1 \dots \alpha_n$ éléments de U_p liés sur A , il existe $a_1 \dots a_n$ non tous nuls $\in A$ tels que

$$\sum a_i \log \alpha_i = 0.$$

On peut supposer que les α_i sont des unités principales puisque $\log \alpha_i = \log \alpha_i / \theta(\alpha_i)$ où $\alpha_i / \theta(\alpha_i)$ est une unité principale.

On peut de plus supposer, quitte à multiplier l'expression précédente par un rationnel convenable que chacun des α_i est suffisamment voisin de 1 plus précisément que

$$|\alpha_i - 1| < \frac{1}{p^{1/p-1}}.$$

On peut donc trouver des entiers de Ω_p algébriques sur $\mathbb{Q}$ tels que

$$\alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_{n-1}^{\beta_{n-1}} = \alpha_n.$$

Pour démontrer ce théorème, on va montrer qu'il existe

des entiers q et L ,

un système de $(L+1)^n$ entiers rationnels non tous nuls,

$p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ pour $0 \leq \lambda_i \leq L$ $i = 1, \dots, n$,

tels que

$$\sum_{\lambda_1=0}^L \dots \sum_{\lambda_n=0}^L p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) [\alpha_1^{q^{\lambda_1}} \dots \alpha_n^{q^{\lambda_n}}]^\ell = 0,$$

pour tout entier ℓ compris entre 1 et $(L+1)^n$.

Le déterminant de ce système est un déterminant de V. d. M. nul, il existe deux systèmes d'entiers distincts tels que

$$\alpha_1^{q^{\lambda_1}} \dots \alpha_n^{q^{\lambda_n}} = \alpha_1^{q^{\lambda'_1}} \dots \alpha_n^{q^{\lambda'_n}},$$

ce qui est la relation de dépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ des logarithmes des α_i ce qui termine le théorème.

Notations

Si $m_1 \dots m_{n-1}$ sont des entiers, on écrit

$$m = (m_1 \dots m_{n-1})$$

$$|m| = m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}$$

$$\Delta^m F(z_1 \dots z_{n-1}) = (m_1! \dots m_{n-1}!) \partial^{|m|} F / \partial z_1^{m_1} \dots \partial z_{n-1}^{m_{n-1}}.$$

d est le degré du corps engendré par les α_i et β_i sur $\mathbb{Q}$,

$q = p^a$ où a est un entier tel que $q > e^{8d}$. Si h est un entier, on pose

$$L = L(h), \quad L(h) = [h^{2 - \frac{1}{2n}}].$$

LEMME 1. Il existe une constante c_1 tel que pour $h > c_1$ on puisse trouver des entiers rationnels $p(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ $0 \leq \lambda_i \leq L$ de valeur absolue au plus égale à e^{2h^3} non tous nuls simultanément et qui vérifient la condition suivante. Si

$$F(z_1, \dots, z_{n-1}) = \sum_{\lambda_1=0}^L \dots \sum_{\lambda_n=0}^L p(\lambda_1 \dots \lambda_n) \alpha_1^{\gamma_1 z_1} \dots \alpha_{n-1}^{\gamma_{n-1} z_{n-1}},$$

où

$$\gamma_i = \lambda_i + \beta_i \lambda_n.$$

Alors

$$\Delta^{(m)} F(q\ell, q\ell, \dots, q\ell) = 0,$$

pour tous les entiers ℓ , $m_1 \dots m_{n-1}$ tel que

$$1 \leq \ell \leq h \quad \text{et} \quad |m| \leq h^2.$$

Démonstration du lemme 1.

Dans [2], Baker a montré que sous les hypothèses du lemme, il existe des entiers $p(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ non tous nuls, tel que

$$Q((m), \ell) = \sum_{\lambda_1=0}^L \dots \sum_{\lambda_n=0}^L p(\lambda_1 \dots \lambda_n) \alpha_1^{q\ell \lambda_1} \dots \alpha_n^{q\ell \lambda_n} \gamma_1^{m_1} \dots \gamma_{n-1}^{m_{n-1}} = 0 ,$$

les hypothèses sur α_i et β_i impliquent que

$$\alpha_i^{y_i z_i} = \exp(y_i z_i \log \alpha_i) ,$$

est une fonction analytique sur $\hat{\Omega}_p$ qui converge ainsi que ses dérivées pour $|z_i| \leq 1$.

On remarque enfin que

$$\Delta^{(m)} F(q\ell, q\ell, \dots, q\ell) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{(\log \alpha_i)^{m_i}}{m_i!} \right) Q((m), \ell) .$$

Fixons pour chaque $h > c_1$ une fonction F qui vérifie les conditions du lemme .

Notation

Si E est un corps de nombres et si $x \in E$ on appelle dénominateur de x le plus petit entier rationnel > 0 tel que $D.x$ soit entier algébrique.

On appelle taille de x le nombre $s(x) = \sup (D, |\sigma(x)|_\infty)$ ou σ parcourt l'ensemble des isomorphismes de E dans $\mathbb{C}$.

Soit M un nombre + grand que la taille des α_i et des β_i ; le dénominateur D de $Q((m), \ell)$ est plus petit que

$$M^{q\ell L n + n |m|} .$$

D'autre part

$$|\sigma(Q)|_{\infty} \leq (L+1)^n e^{2h^3} M^{nq\ell L} (M+1)^{|m|_L} |m| ,$$

quand h est assez grand $|Q| > D^{-d} s(Q)^{-d}$ si $Q \neq 0$.

Nous obtenons donc le lemme suivant.

LEMME 2. Si ℓ est un entier positif arbitraire et $|m| \leq h^2$, on a soit

$$\Delta^{(m)} F(q\ell, \dots, q\ell) = 0 ,$$

soit

$$\Delta^m F(q\ell, \dots, q\ell) \geq (c_2^{|m|+q\ell L} e^{2dh^3} L^{d(n+|m|)})^{-1} ,$$

ou c_2 ne dépend que de M, n, d .

LEMME 3. Il existe c_3 tel que pour tout $h > c_3$ la fonction F du lemme 1 possède la propriété suivante :

si $\epsilon = 1/4n$ et J un entier, $0 \leq J \leq 12n^2$.

Alors

$$\Delta^{(m)} F(q\ell, \dots, q\ell) = 0 ,$$

pour tout entier ℓ , $1 \leq \ell \leq h^{1+\epsilon J}$ et tout système $(m_1 \dots m_{n-1})$ positif avec $|m| \leq h^2/2J$.

La démonstration se fait par récurrence sur J le cas $J = 0$ correspond à la fonction du lemme 1.

Supposons le lemme vérifié pour $J \leq K$,

$$R_J = [h^{1+\epsilon J}] \quad S_J = \frac{h^2}{2^J} ,$$

soit $|m| \leq S_{K+1}$ et soit $f(z) = \Delta^m F(z, \dots, z)$.

$f(z)$ est une fonction analytique pour $|z| \leq 1$ qui vérifie

$$|f(z)| = \left| \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(\text{Log } \alpha_i)^{m_i}}{(m_i)!} \sum_{\lambda_1=0}^L \dots \sum_{\lambda_n=0}^L p(\lambda_1 \dots \lambda_n) \alpha_1^{\lambda_1} \dots \alpha_n^{\lambda_n} \gamma_1^{m_1} \dots \gamma_{n-1}^{m_{n-1}} \right| \leq 1$$

$$(\Delta^{(s)} f)(z) = \sum_{\substack{0 \leq j_i \leq s \\ |j| = s}} \binom{m_1+j_1}{m_1} \dots \binom{m_{n-1}+j_{n-1}}{m_{n-1}} \Delta^{(m)+(j)} F(z, \dots, z) \quad ,$$

l'hypothèse de récurrence implique que $\Delta^s f(qr) = 0$ si

$$0 \leq s \leq S_{K+1} \quad ,$$

$$1 \leq r \leq R_K \quad , \quad \text{en effet} \quad 2S_{K+1} \leq S_K \quad ,$$

en particulier f possède au moins $R_K(S_{K+1})$ zéros dans le cercle $|z| \leq q^{-1}$.

Grâce au lemme de Schwartz et Mahler [10]

$$|f(q\ell)| \leq q^{-R_K(S_{K+1})} \sup_{|z| \leq 1} |f(z)| \leq q^{-R_K(S_{K+1})}$$

pour tout entier ℓ .

Soit ℓ tel que $R_K \leq \ell \leq R_{K+1}$ supposons que

$$f(q\ell) = \Delta^m F(q\ell, \dots, q\ell) \neq 0 \quad ,$$

grâce au lemme 2 ,

$$R_K(S_{K+1}) \text{Log } q \leq 2dh^3 + (S_{K+1} + qLR_{K+1}) \log c_2$$

$$+ d(n + S_{K+1}) \log L \quad ,$$

mais

$$\frac{1}{2} h^{1+\varepsilon J} \leq R_J \leq h^{1+\varepsilon J}$$

$$\left(\frac{h^2}{2^J}\right) - 1 \leq S_J \leq h^2$$

$$L \leq h^{2-2\varepsilon} \quad ,$$

de telle sorte que

$$\text{Log } q \cdot \frac{h^{1+\varepsilon K}}{2} \cdot \frac{h^2}{2^{K+1}} \leq 2dh^3 + 2d(n+h^2) \text{Log } h \\ + (h^2 + qh^{3+\varepsilon(K-1)}) \log c_2 ,$$

$$\text{Log } q/2^{K+2} \leq 2dh^{-\varepsilon K} + o(h) ,$$

ce qui est impossible si $K \geq 1$ et aussi pour $K = 0$ à cause du choix de q .

La démonstration du théorème devient alors si $h > 3$, $J = 12n^2$,

$$F(q\ell, \dots, q\ell) = \sum_{\lambda_1=0}^L \dots \sum_{\lambda_n=0}^L p(\lambda_1 \dots \lambda_n) (\alpha_1^{q\lambda_1} \dots \alpha_n^{q\lambda_n})^\ell = 0 ,$$

pour $1 \leq \ell \leq h^{3n+1}$, mais

$$(L+1)^n \leq (h^{2-2\varepsilon} + 1)^n < h^{2n} < h^{3n+1} ,$$

et le système précédent est valable pour $1 \leq \ell \leq (L+1)^n$.

-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AX J. - On the units of an algebraic number field. Illinois J. math. 9 (1965), 584-589.
- [2] BAKER A. - Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. I, Mathematika, 13 (1966) p. 204-216. II, id., 14, (1967) p. 102-107. III, id., 14, (1967) p. 220-228. IV, id., 15, (1968), p. 204-216.
- [3] BRUMER A. - On the units of algebraic number fields. Mathematika 14, (1967), p. 121-124.
- [4] FEL'DMAN N.I. - Estimate for a linear form of logarithms of algebraic numbers. Mat. Sbornik, T. 76, (1968) p. 291-307.

- [5] FEL'DMAN N.I. - Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers. Mat. Sbornik, T. 77, (1968) p. 393-406.
- [6] GÜNTHER A. - Über transzendente $\mathbb{P}$ -adische Zahlen. I, J. Reine Angew. Math., 192 (1953) p. 155-166. II, id., 193, (1954), p. 1-10.
- [7] LANG S. - Introduction to transcendental numbers. Addison Wesley, (1966).
- [8] MAHLER K. - Über transzendente $\mathbb{P}$ -adische Zahlen. Compositio Math. 2 (1935), p. 259-275. id., 8 (1950).
- [9] RAMACHANDRA K. - A note on Baker's method. J. Austral. Math. Soc. (1969), T. 10, 1-2, p. 197-203.
- [10] SERRE J. P. - Dépendance d'exponentielles p -adiques. Sem. Delange-Pisot-Poitou, 7^e année, exp. n° 15.
- [11] SERRE J. P. - Travaux de Baker. Sem. Bourbaki, 1969/70, n° 368 p. 01-14.
- [12] FRESNEL J. - Rang p -adique du groupe des unités d'un corps de nombres. Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1968/69, exposé n° 9.

-:-:-:-:-:-:-