

SÉMINAIRE SUR LES SINGULARITÉS DES SURFACES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. DEMAZURE

Surfaces de Del Pezzo : V - Modèles anticanoniques

Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 7, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A8_0

© Séminaire sur les singularités des surfaces
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire sur les singularités des surfaces implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E S U R L E S S I N G U L A R I T E S

D E S S U R F A C E S

SURFACES DE DEL PEZZO :

V - MODELES ANTICANONIQUES

M. DEMAZURE

ar 10

23 Novembre 1976

Comme dans l'exposé IV, on note Z une surface rationnelle lisse telle que $\omega_Z \cdot \omega_Z > 0$ et $\omega_Z \cdot E \leq 0$ pour tout diviseur effectif E ; on pose $r = \text{rg Pic}(Z) - 1 \leq 8$, et $\omega = \omega_Z$.

Pour tout entier i tel que $i(9-r) \geq 2$ (c'est-à-dire $i \geq 1$ si $r \leq 7$, $i \geq 2$ si $r = 8$), on note

$$\varphi_i : Z \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(Z, -i\omega))$$

le morphisme défini par le système linéaire complet sans points fixes $|-i\omega|$ (théorème IV.1.a). On note $\bar{Z}^{(i)}$ l'image de φ_i , $\bar{C}^{(i)}$ le cône projetant de $\bar{Z}^{(i)}$, et $\bar{\varphi}_i : Z \rightarrow \bar{Z}^{(i)}$ le morphisme surjectif déduit de φ_i . Avec ces notations, le théorème IV.1 et son corollaire peuvent se traduire en :

Proposition 1 : a) Pour $i(9-r) \geq 3$ (i.e. $i \geq 1$ si $r \leq 6$, $i \geq 2$ si $r = 7$, $i \geq 3$ si $r = 8$), les fibres schématiques de $\bar{\varphi}_i$ sont les points de l'ouvert U et les cycles fondamentaux, et $\bar{\varphi}_i$ est birationnel.

b) Pour $i(9-r) = 2$ (i.e. $i = 1$, $r = 7$ ou $i = 2$, $r = 8$), le morphisme $\bar{\varphi}_i$ est de degré 2.

Pour $i(9-r) \geq 3$, on dit que $\bar{Z}^{(i)}$ est le i -ième modèle anticanonique de Z et $\bar{C}^{(i)}$ le i -ième cône anticanonique de Z .

Par ailleurs, on pose

$$\bar{Z} = \text{Proj}(\oplus_n H^0(Z, -n\omega)) \quad ,$$

$$\bar{C} = \text{Spec}(\oplus_n H^0(Z, -n\omega)) \quad ,$$

et on les appelle respectivement le modèle et le cône anticanonique de Z . On note $f : Z \rightarrow \bar{Z}$ le morphisme canonique. L'anneau de $\bar{C}^{(i)}$ (c'est-à-dire l'anneau gradué de $\bar{Z}^{(i)}$) s'identifie naturellement au sous-anneau de $\oplus H^0(Z, -n\omega)$ engendré par $H^0(Z, -i\omega)$. On a par conséquent des morphismes canoniques $\bar{C} \rightarrow \bar{C}^{(i)}$ et chaque $\bar{\varphi}_i$ se factorise par un morphisme

$$\tilde{\varphi}_i : \bar{Z} \longrightarrow \bar{Z}^{(i)}$$

(nous verrons ci-dessous que $\tilde{\varphi}_i$ est un isomorphisme pour $i(9-r) \geq 3$ et est fini de degré 2 pour $i(9-r) = 2$).

1. NORMALITE PROJECTIVE DES MODELES ANTICANONIQUE

Lemme 1 : Soient $\Gamma_1 \in |-w|$, $\Gamma_2 \in |-w|$, $\Gamma_3 \in |-p\omega|$, $p > 0$. Supposons Γ_1 et Γ_2 irréductibles et distincts et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \emptyset$. Soient $x_1, x_2 \in H^0(Z, -\omega)$, $x_3 \in H^0(Z, -p\omega)$ des équations de $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Alors

- a) (x_1, x_2, x_3) est une suite régulière dans l'anneau $\oplus H^0(Z, -n\omega)$;
- b) l'idéal engendré par (x_1, x_2, x_3) contient tous les éléments homogènes de degré $\geq p+2$. Si $r \leq 6$ et $p = 1$, il contient tous les éléments homogènes de degré ≥ 2 .

Posons $A_n = H^0(Z, -n\omega)$; de la suite exacte

$$0 \longrightarrow -(n-1)\omega \xrightarrow{x_1} -n\omega \longrightarrow -n\omega|_{\Gamma_1} \longrightarrow 0$$

on tire, puisque $H^1(Z, -(n-1)\omega) = 0$, une suite exacte

$$0 \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{x_1} A_n \longrightarrow B_n \longrightarrow 0 ,$$

où $B_n = H^0(\Gamma_1, -n\omega)$. Il s'ensuit que x_1 est non diviseur de zéro et que $A_n/x_1 A_{n-1}$ s'identifie à B_n .

Recommençons à l'aide de la suite exacte

$$0 \longrightarrow -(n-1)\omega|_{\Gamma_1} \xrightarrow{x_2} -n\omega|_{\Gamma_1} \longrightarrow -n\omega|_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \longrightarrow 0 ;$$

on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow B_{n-1} \xrightarrow{x_2} B_n \xrightarrow{q_n} C_n ,$$

où $C_n = H^0(\Gamma_1 \cap \Gamma_2, -n\omega)$; de plus, pour $n \geq 2$, q_n est surjectif, puisqu'alors $H^1(\Gamma_1, -(n-1)\omega) = 0$ car $-(n-1)\omega \cdot (-\omega) = (n-1)\omega \cdot \omega > 0$. Il s'ensuit que x_2 est non diviseur de zéro dans l'anneau $\oplus B_n$ et que $B_n/x_2 B_{n-1} = C'_n$ s'injecte dans C_n , bijectivement pour $n \geq 2$.

Notons maintenant que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ est fini et que, par hypothèse l'élément $\bar{x}_3 \in C'_p \subset H^0(\Gamma_1 \cap \Gamma_2, -p\omega)$ ne s'annule en aucun point de $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$, donc que la multiplication par \bar{x}_3 induit des isomorphismes $C'_n \xrightarrow{\bar{x}_3} C'_{n+p}$, $n \geq 0$. Il en résulte que \bar{x}_3 est non diviseur de zéro dans l'anneau $\oplus C'_n \subset \oplus C_n$, et que $x_3 C'_n = C'_{n+p}$ dès que $n \geq 2$. Cela implique a) et la première assertion de b).

Supposons alors $p = 1$ et $r \leq 6$, et prouvons que $C'_1 \otimes C'_1 \rightarrow C_2$ est surjec-

tif, ce qui impliquera la dernière assertion de b). Comme $\dim C'_1 \geq \dim C_1 - 1 = 8-r \geq 2$, C'_1 contient un élément y non multiple de x_3 . Alors $y^2 \in C_2$ n'est pas multiple de x_3 , donc engendre $C_2/x_3 C'_1$ qui est de dimension ≤ 1 ; par conséquent $yC'_1 + x_3 C'_1 = C_2$, ce qu'on voulait démontrer.

Proposition 2 : Soit $i > 0$; considérons l'anneau gradué $\bigoplus_n H^0(Z, -n\omega)$.

a) Il est de Cohen-Macaulay en l'idéal $\bigoplus_{n>0} H^0(-n\omega)$.

b) Il est engendré par ses éléments homogènes de degré ≤ 1 si $i(9-r) \geq 3$, de degré ≤ 2 si $i(9-r) = 2$, de degré ≤ 3 si $i(9-r) = 1$.

En effet (théorème III.1), on peut trouver deux diviseurs $\Gamma_1, \Gamma_2 \in |- \omega|$ irréductibles et distincts, et puisque $|-p\omega|$ est sans points fixes pour $p(9-r) \geq 2$, un diviseur $\Gamma_3 \in |-p\omega|$ avec $p(9-r) \geq 2$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \emptyset$. D'après le lemme 1, la suite (x_1, x_2, x_3) est régulière dans $\bigoplus_n H^0(Z, -n\omega)$, donc la suite (x_1^i, x_2^i, x_3^i) est régulière dans l'anneau proposé. De plus l'anneau $\bigoplus H^0(Z, -n\omega)$ est engendré par ses éléments de degré $\geq p+2$, et même de degré ≥ 2 lorsque $r \leq 6$; cela démontre b) pour $i = 1$. Le cas général s'en déduit aussitôt.

Théorème 1 : a) La surface \bar{Z} est normale; le cône \bar{C} est normal et de Cohen-Macaulay.

b) Pour $i(9-r) \geq 3$, la variété projective $\bar{Z}^{(i)}$ est projectivement de Cohen-Macaulay (i.e. $\bar{C}^{(i)}$ est normal et de Cohen-Macaulay) et le morphisme $\tilde{\varphi}_i : \bar{Z} \rightarrow \bar{Z}^{(i)}$ est un isomorphisme.

D'après la proposition 2b) l'anneau du cône $\bar{C}^{(i)}$ ($i(9-r) \geq 3$) est $\bigoplus_n H^0(Z, -n\omega)$, et il est de Cohen-Macaulay au sommet du cône d'après a). Comme $\bar{Z}^{(i)}$ est non singulière en codimension 1 (proposition 1), il en est de même de $\bar{C}^{(i)}$ qui est donc normal (critère de Serre) et de Cohen-Macaulay. Cela implique b). La partie a) résulte aussitôt de b) et de la proposition 2.

Remarques : 1) Pour $r \leq 6$, le morphisme $\bar{C} \rightarrow \bar{C}^{(1)}$ est un isomorphisme.

2) Les cônes $\bar{C}^{(1)}$ ($r = 7$ ou 8) et $\bar{C}^{(2)}$ ($r = 8$) sont aussi normaux et de Cohen-Macaulay (cf. ci-dessous).

3) En fait \bar{Z} et \bar{C} sont de Gorenstein (cf. ci-dessous).

2. LE MORPHISME $f: Z \rightarrow \bar{Z}$

Théorème 2 : a) f est birationnel, ses fibres schématiques sont les points de U et les cycles fondamentaux ; on a $f_*(\mathcal{O}_Z) = \mathcal{O}_{\bar{Z}}$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $i > 0$, on a $R^i f_*(\omega_Z^{\otimes n}) = 0$.
c) Les points singuliers de \bar{Z} sont les images des cycles fondamentaux ; ils sont rationnels et de multiplicité 2.
d) Posons $\omega_{\bar{Z}} = f_*(\omega_Z)$. Alors $\omega_{\bar{Z}}$ est localement libre de rang 1, et on a pour tout n des isomorphismes canoniques

$$f_*(\omega_Z^{\otimes n}) = \omega_{\bar{Z}}^{\otimes n} \quad , \quad f^*(\omega_{\bar{Z}}^{\otimes n}) = \omega_Z^{\otimes n} \quad .$$

a) Puisque $f: Z \rightarrow \bar{Z}$ est isomorphe à $\varphi_i: Z \rightarrow \bar{Z}^{(i)}$, pour $i(9-r) \geq 3$, la première partie résulte de la prop. 1. La seconde s'en déduit puisque \bar{Z} est normal.

b) Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $i > 0$. Le faisceau $R^i f_*(\omega_Z^{\otimes n})$ est concentré aux points de \bar{Z} images des cycles fondamentaux. Soit Γ un cycle fondamental de Z et $y = f(\Gamma) \in \bar{Z}$. D'après le théorème des fonctions holomorphes de Grothendieck, $R^i f_*(\omega_Z^{\otimes n})_y$ s'identifie à la limite projective des $H^i(m\Gamma, n\omega)$, $m > 0$; mais ceux-ci sont nuls (prop. IV.3).

c) Puisque $R^i f_*(\mathcal{O}_Z) = R^i f_*(\omega_Z) = 0$ pour $i > 0$, les points singuliers de Z sont rationnels par définition. Soient Γ et y comme ci-dessus. Alors, d'après le théorème cité, $\lim_n H^0(m\Gamma, \mathcal{O}_{m\Gamma})$ est le complété de $\mathcal{O}_{\bar{Z}, y}$ pour une filtration m_y -bonne ; d'après la prop. IV.3, on a $\dim H^0(m\Gamma, \mathcal{O}_{m\Gamma}) = m^2 = 2(m^2/2)$; donc $\mathcal{O}_{\bar{Z}, y}$ est de multiplicité 2, et par conséquent y est singulier. Par ailleurs les points de $f(U) = \bar{U}$ ne sont évidemment pas singuliers.

d) Soit C une courbe irréductible de $|- \omega|$; alors $C \subset U$; posons $V = Z - C$; alors Z est réunion des ouverts U et V , \bar{Z} réunion des ouverts $\bar{U} = f(U)$ et $\bar{V} = f(V)$, et on a $U = f^{-1}(\bar{U})$, $V = f^{-1}(\bar{V})$. De plus, f induit un isomorphisme de U sur \bar{U} et $\omega|_V = \mathcal{O}_Z|_V$. Sur chacun des ouverts \bar{U} et \bar{V} de \bar{Z} les assertions de d) sont triviales, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1 : Le morphisme $Z \rightarrow \bar{Z}$ a la propriété universelle suivante : pour qu'un morphisme de Z dans un schéma (ou espace annelé) T se factorise par Z (et alors de manière unique), il faut et il suffit qu'il contracte les cycles fondamentaux.

En effet, un tel morphisme définit une application continue de \bar{Z} dans T , et celle-ci est un morphisme puisqu'elle "applique" \mathcal{O}_T dans $f_*\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_{\bar{Z}}$.

Corollaire 2 : Soit F un faisceau localement libre sur Z . Alors
 $H^i(\bar{Z}, F) = H^i(Z, f^*F)$; de plus $H^i(\bar{Z}, F)$ et $H^{2-i}(\bar{Z}, \underline{\text{Hom}}(F, \omega_{\bar{Z}}))$ sont en dualité.

Comme $R^i f_*(f^*F) = F \otimes R^i f_*(f^*F) = 0$ pour $i > 0$, la première assertion résulte de la suite spectrale de Leray. Comme $f^* \underline{\text{Hom}}(F, \omega_{\bar{Z}}) = \underline{\text{Hom}}(f^*F, f^* \omega_{\bar{Z}}) = \underline{\text{Hom}}(f^*F, \omega_Z)$, la seconde en résulte, via la dualité de Serre sur Z .

On retrouve ainsi le fait que \bar{Z} est de Gorenstein, son module dualisant $\omega_{\bar{Z}}$ étant localement libre.

Corollaire 3 : a) On a $H^1(\bar{Z}, \omega_{\bar{Z}}^{\otimes i}) = 0$ pour tout i ; on a $H^0(\bar{Z}, \omega_{\bar{Z}}^{\otimes i}) \neq 0 \Leftrightarrow i \leq 0$, $H^2(\bar{Z}, \omega_{\bar{Z}}^{\otimes i}) \neq 0 \Leftrightarrow i > 0$.

b) Le faisceau $\omega_{\bar{Z}}^{\otimes -i}$ est engendré par ses sections si et seulement si $i(9-r) \geq 2$; il est très ample si et seulement si $i(9-r) \geq 3$. On a $\dim H^0(\bar{Z}, \omega_{\bar{Z}}^{\otimes -i}) = \frac{i(i+1)}{2} (9-r) + 1$ pour $i \geq 0$.

Cela résulte du corollaire 2 ci-dessus, du théorème 1, et des énoncés analogues pour Z .

En particulier, les morphismes $\tilde{\varphi}_i : \bar{Z} \rightarrow \bar{Z}^{(i)}$ définis ci-dessus, sont simplement les morphismes associés aux systèmes linéaires $|-i\omega_{\bar{Z}}|$.

Si D est un diviseur sur Z , notons $f(D)$ le diviseur (de Weil) image sur \bar{Z} , que l'on peut aussi définir comme "l'adhérence" du diviseur $f(D \cap U)$ de $\bar{U} \subset \bar{Z}$. Par passage aux classes, on obtient l'homomorphisme composé

$$cl(Z) = \text{Pic}(Z) \longrightarrow \text{Pic}(U) \simeq \text{Pic}(\bar{U}) = cl(\bar{U}) \simeq cl(\bar{Z}) \quad .$$

On appellera courbes exceptionnelles de \bar{Z} les diviseurs $f(D)$, où D est un diviseur exceptionnel irréductible sur Z . Notons que, si Δ est un diviseur (de Weil) sur \bar{Z} , on peut toujours définir sans difficulté $\Delta \cdot \omega_{\bar{Z}}$ soit parce que $\omega_{\bar{Z}}$ est un diviseur de Cartier, soit simplement en se restreignant à \bar{U} . Si Δ est effectif et $\neq 0$, on a $\Delta \cdot \omega_{\bar{Z}} < 0$.

Proposition 3 : Soit Σ une courbe irréductible sur \bar{Z} .

a) Si $r \leq 7$, Σ est exceptionnelle si et seulement si $\Sigma \cdot \omega_{\bar{Z}} = -1$.

b) Supposons $r = 8$. Alors Σ est exceptionnelle si et seulement si, soit

$\Sigma \cdot \omega_{\bar{Z}} = -1$ et $\text{cl}(\Sigma) \neq -\omega_{\bar{Z}}$, soit $\text{cl}(\Sigma) = -\omega_{\bar{Z}}$ et Σ passé par un des points singuliers de \bar{Z} ; ce second cas est celui où Σ est l'image par f d'un diviseur exceptionnel spécial de Z .

En effet, écrivons $\Sigma = f(D)$, où D est un diviseur irréductible sur Z . D'après le lemme III.9, on a pour $r \neq 8$, " D exceptionnel" \Leftrightarrow " $D \cdot \omega_Z = -1$ ", et pour $r = 8$, " D exceptionnel" \Leftrightarrow " $D \cdot \omega_Z = -1$ et $\text{cl}(D) \neq -\omega_Z$ ". Le seul point à démontrer est donc le suivant : supposons $r = 8$, soit $\tilde{\Sigma}$ l'élément de $|\omega_Z|$ associé canoniquement à $\Sigma \in |\omega_{\bar{Z}}|$; alors $\tilde{\Sigma} \neq D$ si et seulement si Σ passe par un point singulier de \bar{Z} . Or, si Σ ne passe par aucun point singulier de \bar{Z} , on a $\tilde{\Sigma} = D$; inversement, si Σ passe par un point singulier de \bar{Z} , alors D rencontre un cycle fondamental Γ , et d'après la discussion faite à l'exposé précédent, $\tilde{\Sigma}$ est la somme de Γ et d'un diviseur exceptionnel spécial \tilde{D} . Donc $\tilde{D} = D$, et $\Sigma = f(\tilde{D})$ est exceptionnel.

3. LES MODELES $\bar{Z}^{(1)}$, $\bar{Z}^{(2)}$, $\bar{Z}^{(3)}$

Supposons $r \leq 6$. Alors $\omega_Z^{\otimes -1}$ est très ample et correspond au plongement projectif $\varphi_1: \bar{Z} \xrightarrow{\sim} \bar{Z}^{(1)} \subset \mathbb{P}(H^0, \omega_Z^{\otimes -1})$. Notons que $\bar{Z}^{(1)}$ est de degré $d = \omega \cdot \omega = 9 - r$ dans un espace projectif de dimension d ; on a $3 \leq d \leq 9$. Par exemple pour $r = 6$, $\bar{Z}^{(1)}$ est une surface cubique dans \mathbb{P}^3 .

Les courbes exceptionnelles de $\bar{Z}^{(1)}$ sont les droites contenues dans $\bar{Z}^{(1)}$ (proposition 3) ; par exemple pour $r = 6$, il y en a au plus 27 ; pour qu'il y en ait 27, il faut et il suffit que $\bar{Z}^{(1)}$ soit lisse (théorème II.1).

Pour $r = 7$, il faut prendre $\omega_Z^{\otimes -2}$; on obtient un plongement projectif $\tilde{\varphi}_2: \bar{Z} \xrightarrow{\sim} \bar{Z}^{(2)} \subset \mathbb{P}^6$. Comme $2\omega - 2\omega = 8$, $\bar{Z}^{(2)}$ est de degré 8 dans \mathbb{P}^6 . Les courbes exceptionnelles de $\bar{Z}^{(2)}$ sont les coniques irréductibles qu'elle contient (proposition 3) ; il y en a au plus 56 ; il y en a 56 si et seulement si $\bar{Z}^{(2)}$ est lisse.

Pour $r = 8$, on doit prendre $\omega_Z^{\otimes -3}$. Alors $\bar{Z}^{(3)}$ est de degré $3\omega \cdot 3\omega = 9$ dans \mathbb{P}^6 ; les courbes exceptionnelles de $\bar{Z}^{(3)}$ sont des cubiques irréductibles (nécessairement gauches ou singulières puisque de genre 0) ; il y en a au plus 240.

En fait, dans le deux derniers cas on obtient une description géométrique plus agréable de \bar{Z} par l'intermédiaire des morphismes de degré 2 $\bar{Z} \rightarrow \bar{Z}^{(1)}$ ($r = 7$), $\bar{Z} \rightarrow \bar{Z}^{(2)}$ ($r = 8$), appelés involutions de Kayser et de Bertini.

4. L'INVOLUTION DE KAYSER

Prenons $r = 7$ et considérons le morphisme de degré 2

$$\tilde{\varphi}_1: \bar{Z} \longrightarrow \bar{Z}^{(1)} = P.$$

Comme P est une surface contenue dans $\mathbb{P}(H^0(\bar{Z}, \omega_{\bar{Z}}^{\otimes 1})) \simeq \mathbb{P}^2$, c'est ce plan projectif tout entier ; par conséquent l'application canonique $S^n H^0(\bar{Z}, \omega_{\bar{Z}}^{\otimes -1}) \rightarrow H^0(\bar{Z}, \omega_{\bar{Z}}^{\otimes -n})$ est injective pour tout n . Posons $A^n = H^0(\bar{Z}, \omega_{\bar{Z}}^{\otimes -n})$; d'après la prop. 2, $A = \oplus A^n$ est engendré par A^1 et A^2 ; mais $\dim S^n A^1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ et $\dim A^n = n^2 + n + 1$, et par conséquent $\dim A^n = \dim S^n A^1 + \dim S^{n-2} A^1$. Par ailleurs, comme $\dim A^2 = 7 = \dim S^2 A^1 + 1$, il existe $\sigma \in A^2$ tel que A soit engendré par σ et A^1 ; comme $\tilde{\varphi}_1$ n'est pas birationnel, σ ne peut pas s'exprimer comme quotient d'éléments de SA^1 , donc $\sigma S^{n-2} A^1 \cap S^n A^1 = 0$ pour tout n ; par conséquent $A^n = S^n A^1 \oplus \sigma S^{n-2} A^1$, donc A est un SA^1 -module libre de base $\{1, \sigma\}$, et il existe $a \in S^2 A^1$, $b \in S^4 A^1$ tels que $A = SA^1[\sigma]/(\sigma^2 - a\sigma - b)$.

Si x, y, z est une base de A^1 , alors $A = k[x, y, z, \sigma]/(\sigma^2 - a(x, y, z)\sigma - b(x, y, z))$ et on a $\bar{C} = \text{Spec } A$, $\bar{Z} = \text{Proj } A$. De façon plus jolie, on a $S^n A^1 \simeq H^0(P, \mathcal{O}_P(n))$, donc a et b s'identifient à des sections

$$a \in H^0(P, \mathcal{O}_P(2)) \quad , \quad b \in H^0(P, \mathcal{O}_P(4)) \quad ,$$

et on a aussitôt

$$\bar{C} = \underline{\text{Spec}} \mathcal{Q} \quad , \quad \bar{Z} = \underline{\text{Proj}} \mathcal{Q} \quad ,$$

où \mathcal{Q} est le \mathcal{O}_P -module $\mathcal{O}_P \oplus \mathcal{O}_P(-2)$ muni de la structure d'algèbre associée aux morphismes $\mathcal{O}_P(-2) \otimes \mathcal{O}_P(-2) \xrightarrow{\bar{a}} \mathcal{O}_P(-2)$ et $\mathcal{O}_P(-2) \otimes \mathcal{O}_P(-2) \xrightarrow{\bar{b}} \mathcal{O}_P$ déduits de a et b . comme on dit, " \bar{Z} est un plan double".

Supposons maintenant la caractéristique $\neq 2$. Alors, remplaçant σ par $\sigma - a/2$, on peut supposer $a = 0$. Posons alors $\text{div}(\sigma) = \Gamma \in |-2\omega_{\bar{Z}}|$, $\text{div}(b) = \Delta \in |\mathcal{O}_P(4)|$; alors Δ est une quartique de P , on a $\tilde{\varphi}_1^{-1}(\Delta) = 2\Gamma$ et $\tilde{\varphi}_1$ est ramifié exactement aux points de Γ (" \bar{Z} est un plan double ramifié le long d'une quartique"). On vérifie aussitôt que la projection $\Gamma \rightarrow \Delta$ est un isomorphisme, que les points singuliers de \bar{Z} sont exactement les points de Γ au-dessus des points singuliers de Δ et par conséquent que, ni Γ , ni Δ , n'ont de composantes multiples.

Par construction, les courbes de $|-w_Z|$ sont les images réciproques des droites de P. Pour toute courbe exceptionnelle Σ sur \bar{Z} , $\tilde{\varphi}_1(\Sigma)$ est une droite D de P (proposition 3), et la projection $\Sigma \rightarrow D$ est un isomorphisme. Inversement, si D est une droite de P, alors $\tilde{\varphi}_1^{-1}(D) \cdot w_Z = -w_Z \cdot w_Z = -2$, donc, ou bien $\tilde{\varphi}_1^{-1}(D)$ est irréductible, ou bien $\tilde{\varphi}_1^{-1}(D) = \Sigma + \Sigma'$ où Σ et Σ' sont des courbes exceptionnelles (prop. 3). Notons que l'on peut avoir $\Sigma = \Sigma'$, auquel cas Σ est une composante de Γ , et D une composante de Δ . Pour que $\tilde{\varphi}_1^{-1}(D)$ soit réductible, il faut et il suffit que $b|_D$ ait deux zéros doubles, c'est-à-dire que D soit bitangente à la courbe Δ ; les points de contact de D avec Δ correspondent alors aux points d'intersection de Σ et Σ' . Par exemple, si \bar{Z} est lisse, i.e. si Δ est lisse, alors on trouve 56/2 bitangentes à la quartique Δ .

Supposons maintenant être en caractéristique 2, avec $a \neq 0$; alors si $\Delta' = \text{div}_P(a)$ et $\Gamma = \text{div}_{\bar{Z}}(a)$, on a $\tilde{\varphi}_1^{-1}(\Delta') = \Gamma$, le morphisme $\Gamma \rightarrow \Delta'$ est totalement ramifié de degré 2, et les points de Γ sont les points de ramification de $\tilde{\varphi}_1$. Si, toujours en caractéristique 2, on a de plus $a = 0$, alors le morphisme $\bar{Z} \rightarrow P$ est partout ramifié ; les points singuliers de \bar{Z} correspondent aux zéros de la forme différentielle db.

5. L'INVOLUTION DE BERTINI

Prenons $r = 8$, et considérons le morphisme de degré 2

$$\tilde{\varphi}_2 : \bar{Z} \rightarrow \bar{Z}^{(2)} = \Lambda \subset \mathbb{P}(H^0(\bar{Z}, w_Z^{\otimes -2})) = P.$$

Posons toujours $A^n = H^0(\bar{Z}, w_Z^{\otimes -n})$ et $A = \bigoplus A^n$. On a $\dim A^n = n(n+1)/2 + 1$, donc $\dim A^1 = 2$, $\dim A^2 = 4$, $\dim A^3 = 7$. Notons (u, v) une base de A^1 , et w un élément de A^2 qui n'est pas dans $S^2 A^1$. Alors (u, v, w) forment une suite régulière et l'anneau A' engendré par A^1 et A^2 est l'anneau des polynômes en u, v, w (lemme 1 et prop. 2). Une base de $A^2 = A'^2$ est (ℓ, m, n, w) avec $\ell = u^2$, $m = uv$, $n = v^2$. Par conséquent, $\bar{Z}^{(2)}$ est le cône quadratique Λ d'équation $m^2 = \ell n$ dans $P \simeq \mathbb{P}^3$; le sommet de Λ est l'image du point fixe de $|-w_Z|$ puisqu'il est donné par $u = v = 0$. Soit $\sigma \in A^3$, $\sigma \notin A'^3$ (noter que $\dim A^3 = 7$, $\dim A'^3 = 6$) ; comme tous les éléments de $A'^3 = A^1 \cdot A^2$ s'annulent au point $u = v = 0$, et que ce dernier n'est pas point fixe de $|-3w_Z|$, σ ne s'annule pas au point fixe de $|-w_Z|$; par ailleurs, comme $\dim A^n = \dim A'^n + \dim A'^{n-3}$, on voit comme au No précédent que A est engendré par u, v, w, σ , et qu'il existe $a \in A'^3$, $b \in A'^6$ avec

$$A = k[u, v, w, \sigma] / (\sigma^2 - a\sigma - b).$$

Rappelons que $\overline{C} = \text{Spec } A$, $\overline{Z} = \text{Proj } A$.

De façon équivalente, considérons sur $\text{Proj } k[u,v,w] = \Lambda$ les faisceaux $\mathcal{O}_\Lambda(n)$; ils sont inversibles pour n pair, non inversible pour n impair. (Par exemple $\mathcal{O}_\Lambda(1)$ est la classe des génératrices du cône Λ , qui sont des diviseurs de Weil, non principaux au sommet). Le faisceau $\mathcal{O}_\Lambda(2n)$ est la classe des diviseurs de Cartier sections de Λ par les hypersurfaces de degré n de P .

Posons alors $\mathfrak{B} = \mathcal{O}_\Lambda \oplus \mathcal{O}_\Lambda(-3)$ muni de la structure d'algèbre définie par $a \in H^0(\Lambda, \mathcal{O}_\Lambda(3))$, $b \in H^0(\Lambda, \mathcal{O}_\Lambda(6))$; on a $\overline{Z} = \text{Proj}(\mathfrak{B})$ (" \overline{Z} est un cône quadratique double, avec un point de ramification isolé au sommet").

Supposons maintenant la caractéristique $\neq 2$. Alors, remplaçant σ par $\sigma - a/2$, on peut supposer $a = 0$; posons alors $\text{div}(\sigma) = \Gamma \in |-3\omega_{\overline{Z}}|$, $\text{div}(b) = \Delta \in |\mathcal{O}_\Lambda(\sigma)|$; alors Δ est une section de Λ , intersection de Λ avec une surface cubique de P , qui ne passe pas par le sommet de Λ , on a $\tilde{\varphi}_2^{-1}(\Delta) = 2\Gamma$, et $\tilde{\varphi}_1$ est ramifié exactement au sommet de Λ et aux points de Γ . La projection $\Gamma \rightarrow \Delta$ est isomorphisme, les points singuliers de \overline{Z} sont les points de Γ au-dessus des points singuliers de Δ , et par conséquent, ni Γ , ni Δ n'ont de composantes multiples.

Les diviseurs de $|\omega_{\overline{Z}}|$ sont les images réciproques par $\tilde{\varphi}_2$ des génératrices de Λ , ceux de $|-2\omega_{\overline{Z}}|$ les images réciproques des sections planes de Λ . D'après la prop. 3, les courbes exceptionnelles de \overline{Z} ont pour image dans Λ soit des génératrices passant par les points singuliers de Δ , soit des sections planes irréductibles de Λ , dont on voit comme au No 4 qu'elles doivent être tritangentes à Δ . Inversement l'image réciproque d'une génératrice passant par un point singulier de Δ est une courbe exceptionnelle de \overline{Z} , l'image réciproque d'une conique de Λ tritangente à Δ se décompose de deux courbes exceptionnelles de \overline{Z} (éventuellement égales).

En caractéristique 2, la situation est analogue à celle du No 4. Notons enfin que, si γ est une conique irréductible de Λ , qui n'est pas l'image d'une courbe exceptionnelle, alors son image réciproque C dans \overline{Z} est irréductible et de genre 2. Comme $\omega_C^1 \simeq (-2\bar{\omega} + \bar{\omega})|_C = -\bar{\omega}|_C$, le faisceau $2\bar{\omega}|_C$ est le faisceau bicanonique de C ; donc l'involution de Bertini $\overline{Z} \rightarrow \Lambda$ induit sur C l'involution bicanonique. La projection $C \rightarrow \gamma$ est donc la représentation usuelle de C comme courbe hyperelliptique, et les 6 points d'intersection de C avec Γ sont les 6 points de Weierstrass de C .