M. Demazure

Surfaces de Del Pezzo : IV - Systèmes anticanoniques

Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), exp. nº 6, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A7_0>

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE SUR LES SINGULARITES DES SURFACES

SURFACES DE DEL PEZZO :

IV - SYSTEMES ANTICANONIQUES

M. DEMAZURE

23 Novembre 1976

0. UN COMMENTAIRE SUR L'EXPOSE PRECEDENT

Dans l'exposé III, on s'est placé implicitement en caractéristique 0, pour appliquer le théorème de Bertini sur les pinceaux linéaires. Dans le cas général, le texte reste valable avec les modifications suivantes :

a) Dans le théorème III.1, supprimer "lisse" dans (b'), remplacer "lisse" par "irréductible et lisse aux points de Σ" dans (b"). Ajouter si l'on y tient les conditions (b'_o) et (b''_o) : "si la caractéristique est 0, alors ...".

b) Dans le cor. 1, supposer la caractéristique nulle.

c) Dans le No 6, (démonstration de $(b') \Rightarrow (c)$), prendre C irréductible, non nécessairement lisse, et appliquer la proposition 7 a) de l'appendice (No IV.4).

1. SYSTEMES LINEAIRES ET PLONGEMENTS PROJECTIFS

Soient Z une surface (projective, lisse) et $\xi \in \mathrm{Pic}(Z)$; supposons le système linéaire $|\xi|$ sans points fixes (tout ce qui va suivre pourrait se dire pour un système linéaire non nécessairement complet, sans points fixes. Nous prenons un système complet pour simplifier les notations). Alors $|\xi|$ est le système des images réciproques des hyperplans par un morphisme φ de Z dans l'espace projectif associé à $H^o(Z,\xi)$.

Soit $a \in Z$, notons $|\xi|_a$ le système linéaire formé des diviseurs effectifs $C \in |\xi|$ passant par a ; dire que la fibre $\varphi^{-1}(\varphi(a))$ est (ensemblistement) réduite à $\{a\}$ signifie que a est l'unique point fixe du système linéaire $|\xi|_a$. Considérons l'éclaté Z(a) de Z en a ; à chaque $C \in |\xi|_a$ associons le diviseur $\hat{C} + (\mathrm{mult}(a\,;C) - 1)\,E_a$ sur Z(a) , où E_a est le diviseur exceptionnel ; on obtient ainsi un isomorphisme d'espaces projectifs $|\xi|_a \to |\xi' - E_a|$, où $\xi' \in \mathrm{Pic}(Z(a))$ est l'image réciproque de ξ. Dire que $|\xi|_a$ n'a d'autre point fixe que a signifie aussi que $|\xi' - E_a|$ n'a de points fixes qu'éventuellement sur le diviseur exceptionnel E_a. Dire que $|\xi' - E_a|$ est sans points fixes signifie que la fibre $\varphi^{-1}(\varphi(a))$ est schématiquement égale à $\{a\}$ (on dira alors aussi que $|\xi|_a$ est sans points fixes dans Z(a) ; on notera même souvent $|\xi|_a$ au lieu de $|\xi' - E_a|$) ; s'il en est ainsi pour tout $a \in Z$, alors φ est un isomorphisme de Z sur $\varphi(Z)$; plus généralement, s'il existe un ouvert dense U de Z tel que la condition précédente soit satisfaite pour tout $a \in U$, alors φ induit un isomorphisme de U sur $\varphi(U)$, on a $U = \varphi^{-1}(\varphi(U))$, et φ induit un morphisme birationnel $Z \to \varphi(Z)$.

Soit maintenant $a \in Z$ tel que le système linéaire $|\xi|_a$ ait des composantes fixes, et soit $D_a = \inf\{C\,,\, C \in |\xi|_a\}$. Alors $C \mapsto C - D_a$ est un isomorphisme d'espaces projectifs de $|\xi|_a$ sur le système linéaire $|\xi - \mathrm{cl}(D_a)|$; ce dernier est sans composantes fixes, et la fibre $\varphi^{-1}(\varphi(a))$ est, "en tant que cycle", égale à D_a. Si de plus $|\xi - \mathrm{cl}(D_a)|$ est sans points fixes, alors cette fibre est schématiquement égale à D_a :

Proposition 1 : Soient $|\xi|$ un système linéaire complet sur Z sans point fixe, $\varphi : Z \to \mathbb{P}^N$ le morphisme associé, a un point de Z, $D = \inf\{C\,,\, C \in |\xi|_a\}$. Alors la fibre schématique de φ en $\varphi(a)$ est égale à D.

En effet, puisque $\{a\}$ est l'intersection des hyperplans de $\mathbb{P}^N$ passant par a, la fibre schématique $\varphi^{-1}(\varphi(a))$ est l'intersection des diviseurs de $|-\xi|$, passant par a, c'est-à-dire des diviseurs $D + \Delta$ avec $\Delta \in |\xi - \mathrm{cl}(D)|$. Si $\mathfrak{J}_D \subset O_X$ est l'idéal de D, et $\mathfrak{J}_\Delta$ celui de Δ, l'idéal de $D + \Delta$ est $\mathfrak{J}_D \cdot \mathfrak{J}_\Delta$. Comme l'intersection des Δ est vide, il existe $\Delta_1, \ldots, \Delta_n \in |\xi - \mathrm{cl}(D)|$ tels que $\mathfrak{J}_{\Delta_1} + \cdots + \mathfrak{J}_{\Delta_n} = O_X$; alors $\mathfrak{J}_D \cdot \mathfrak{J}_{\Delta_1} + \cdots + \mathfrak{J}_D \cdot \mathfrak{J}_{\Delta_n} = \mathfrak{J}_D$, donc $\varphi^{-1}(\varphi(a)) = D$.

Pour démontrer que certains systèmes linéaires sont sans points fixes, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 1 : Soit C une courbe irréductible et réduite de Z, de classe $\eta \in \mathrm{Pic}(Z)$ et soit $\xi \in \mathrm{Pic}(Z)$. Supposons $H^1(Z, \xi - \eta) = 0$.

a) Si $\xi.\eta \geq 2g(c)$, alors $|\xi|$ n'a pas de point fixe sur C.

b) Si $a \in C$ et si $\xi.\eta \geq 2g(c) + 1$, alors $|\xi|_a$ n'a pas de point fixe sur le transformé strict de C dans $X(\Sigma)(a)$.

On a une suite exacte $0 \to \xi - \eta \to \xi \to \xi_{|C} \to 0$; comme $H^1(\xi - \eta) = 0$, $H^0(Z, \xi) \to H^0(C, \xi_{|C})$ est surjectif, donc $|\xi|$ induit sur C le système complet $|\xi_{|C}|$ de degré $\xi.\eta$. Le lemme résulte alors de l'énoncé analogue sur les courbes (voir appendice, proposition 7).

2. RACINES MAXIMALES ET CYCLES FONDAMENTAUX

Dans toute la suite, on considère une surface projective et lisse Z satisfaisant aux deux conditions équivalentes suivantes (exposé III, No 9) :

a) Z est isomorphe à $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ ou à une surface $X(\Sigma)$, où $X \simeq \mathbb{P}^2$, et où Σ est en position presque générale.

b) Z est rationnelle, $\omega_Z.\omega_Z > 0$ et $E.\omega_Z \leq 0$ pour tout diviseur effectif E.

On pose $r = \mathrm{rg}\ \mathrm{Pic}(Z) - 1$ [$= \mathrm{Card}(\Sigma)$], et $\omega = \omega_Z$.

Soit A la réunion des racines effectives, ou encore la réunion des racines effectives irréductibles. C'est une partie fermée de Z ; d'après le théorème III.2, les diviseurs effectifs D tels que $D.\omega = 0$ sont exactement les diviseurs effectifs de support contenu dans A. Notons en passant que le <u>support de toute racine est connexe</u> : si $D = D_1 + D_2$ avec $D_1.D_2 = 0$, $D_1.\omega = D_2.\omega = 0$, $D_1 \neq 0$, $D_2 \neq 0$, alors $D_1.D_1 \leq -2$, $D_2.D_2 \leq -2$, donc $D.D \leq -4$.

On dira qu'une racine effective φ est <u>maximale</u> s'il n'existe aucune racine β telle que $\beta - \varphi$ soit effectif.

<u>Lemme 2</u> : a) <u>Soit</u> φ <u>une racine effective. Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) φ <u>est maximale</u>

(ii) <u>pour tout</u> $\beta \in R_e$, <u>on a</u> $\varphi.\beta \leq 0$,

(iii) <u>pour tout</u> $\beta \in R_i$, <u>on a</u> $\varphi + \beta \notin R_e$.

b) <u>Chaque composante connexe de</u> A <u>est le support d'une racine effective maximale, qui majore toutes les racines portées par cette composante</u>.

Il y a donc autant de racines maximales que de composantes de A.

a) On a évidemment (i) ⇒ (iii) et (iii) ⇔ (ii) résulte du lemme III.8. Si φ n'est pas maximale, il existe $\beta_1, \ldots, \beta_s \in R_i$, $s > 0$, avec $\varphi + \beta_1 + \ldots + \beta_s \in R_e$, donc $\varphi(\varphi + \beta_1 + \ldots + \beta_s) \geq -1$ (<u>loc. cit.</u>) et par conséquent $\Sigma \varphi.\beta_i \geq 1$, ce qui contredit (ii).

b) Donnons brièvement la démonstration, qui est classique. Si $\alpha \in R_i$, $\beta \in R_e$, $\alpha.\beta = 1$, et si φ est une racine maximale telle que $\varphi \geq \beta$, alors $\varphi \geq \alpha + \beta \geq \alpha$: en effet, on a $(\varphi - \beta).\alpha = \varphi.\beta - \beta.\alpha \leq -1$, donc α est une constante de $\varphi - \beta$ et $\varphi - \alpha - \beta$ est effectif. Comme les transformations $\beta \to \alpha + \beta$ et $\alpha + \beta \to \alpha$ permettent de relier entre elles toutes les racines de support dans une composante donnée de A, on en tire aussitôt b).

On appellera souvent dans la suite <u>cycles fondamentaux</u> les racines maximales. Par tout point de A passe un cycle fondamental et un seul. Si Γ est un cycle fondamental, on a $\Gamma.\Gamma = -2$, $\Gamma.\omega = 0$ et $\Gamma.\alpha \leq 0$, pour tout $\alpha \in R_e$.

<u>Lemme 3</u> : <u>Soit</u> $\alpha \in R$.

a) <u>Si</u> $\alpha \notin R_e$, <u>alors</u> $H^i(Z, \alpha) = 0$ <u>pour</u> $i = 0, 1, 2$.

b) <u>Si</u> $\alpha \in R_e$, <u>alors</u> $\dim H^i(Z,\alpha) = 1,1,0$ <u>pour</u> $i = 0,1,2$.

On a toujours $H^2(Z,\alpha) = 0$; en effet, puisque $(\omega - \alpha).\omega > 0$, on a $H^o(Z,\omega-\alpha) = 0$. Par ailleurs $\chi(\alpha) = 1 + \frac{1}{2}\alpha.(\alpha-\omega) = 0$. Enfin, d'après le théorème III.2, on a $(H^o(Z,\alpha) \neq 0) \Leftrightarrow (\alpha \in R_e) \Leftrightarrow (\dim H^o(Z,\alpha) = 1)$.

N.B. Par la même démonstration, on voit que si $\xi \in \mathrm{Pic}(Z)$ avec $\xi.\omega = 0$, alors $H^2(\xi) = 0$, $\dim H^o(\xi) = 0$ ou 1 et $\dim H^1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi.\xi + 1$ ou $-\frac{1}{2}\xi.\xi$.

<u>Lemme 4</u> : <u>Soit</u> $u \in \mathrm{Pic}(Z)$ <u>tel que</u> $\omega.u \leq 0$. <u>Alors</u>, <u>on a pour tout</u> $n \geq 0$, <u>et pour</u> $i = 1,2$, $\dim H^i(u-n\omega) \geq \dim H^i(u-(n+1)\omega)$.

En effet, soit C une courbe irréductible de $|-\omega|$ (théorème III.1). On a une suite exacte $0 \to \omega \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_C \to 0$, donc une suite exacte $0 \to u-n\omega \to u-(n+1)\omega \to (u-(n+1)\omega)_{|C} \to 0$. Comme $\deg(u-(n+1)\omega)_{|C} = -(u-(n+1)\omega.\omega = -u.\omega + (n+1)\omega.\omega > 0 = 2g(C) - 2$, on a $H^1((u-(n+1)\omega)_{|C}) = 0$, d'où le lemme.

<u>Proposition 2</u> : <u>Pour tout</u> $n \geq 0$ <u>et tout</u> $\alpha \in R_e$, <u>on a</u>

$$H^1(Z, -\alpha - n\omega) = H^2(Z, -\alpha - n\omega) = 0 \quad ,$$

$$\dim|-\alpha - n\omega| = \dim|-n\omega| - 1 = \frac{n(n+1)}{2}(9-r) - 1 \quad .$$

Les deux premières égalités résultent des lemmes 3 et 4. La dernière en découle, puisque $\chi(-\alpha - n\omega) = \chi(-n\omega) - 1$ et $\dim|-n\omega| = \chi(-n\omega) - 1$ (théorème III.1).

<u>Corollaire 1</u> : <u>Soit</u> $n > 0$, <u>et soit</u> a <u>un point de</u> Z. <u>Si</u> a <u>appartient à un cyle fondamental</u> Γ, <u>alors tout diviseur de</u> $|-n\omega|$ <u>qui passe par</u> a <u>est</u> $\geq \Gamma$. <u>En d'autres termes</u> $|-n\omega|_a = |-n\omega - \Gamma|$.

En effet, d'après la proposition $|-n\omega - \Gamma|$ est de codimension 1 dans $|-n\omega|$; il est contenu dans $|-n\omega|_a$; il ne reste plus qu'à remarquer que $|-n\omega|_a \neq |-n\omega|$: si C est une courbe irréductible de $|-\omega|$, on a $a \notin C$ et $nC \in |-n\omega|$.

Nous verrons ci-dessous que si $r < 8$ ou $n > 1$, $|-n\omega - \Gamma|$ n'a pas de points fixes. En revanche :

<u>Corollaire 2</u> : <u>Pour</u> $r = 8$, <u>l'unique diviseur de</u> $|-\omega|$ <u>passant par un point</u> a <u>d'un cycle fondamental</u> Γ <u>est de la forme</u> $\Gamma + \xi$ <u>où</u> ξ <u>est exceptionnel et irré-</u>

ductible.

D'abord $-\omega-\Gamma$ est exceptionnel ; pour toute racine $\alpha \in R_e$, on a $\alpha.(-\omega-\Gamma) = -\alpha . \Gamma \geq 0$, donc ξ est irréductible (théorème III.2).

Proposition 3 : Soient Γ un cycle fondamental, et m un entier > 0.

a) $\omega_{|m\Gamma}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{m\Gamma}$.

b) $H^1(m\Gamma, \mathcal{O}_{m\Gamma}) = 0$.

c) $\dim H^o(m\Gamma, \mathcal{O}_{m\Gamma}) = m^2$.

Soit C une courbe irréductible de $|-\omega|$. On a la suite exacte $0 \to \omega \to \mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_C \to 0$; comme $C \cap \Gamma = \emptyset$, on en tire un isomorphisme $\omega_{|m\Gamma} \to \mathcal{O}_{m\Gamma}$, d'où a). De la suite exacte $0 \to -m\Gamma \to \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_{m\Gamma} \to 0$, on tire puisque $H^1(\mathcal{O}_Z) = 0$ la suite exacte $0 \to H^1(\mathcal{O}_{m\Gamma}) \to H^2(-m\Gamma)$; mais $H^o(\omega + m\Gamma) = 0$ puisque $\omega.(\omega + m\Gamma) = \omega.\omega > 0$, d'où b). Enfin, puisque $H^i(\mathcal{O}_{m\Gamma}) = 0$ pour $i = 1,2$, on a

$$\dim H^o(\mathcal{O}_{m\Gamma}) = \chi(\mathcal{O}_{m\Gamma}) \;)\; \chi(\mathcal{O}_Z) - \chi(m\Gamma) = -\frac{1}{2} m\Gamma . (m\Gamma - \omega)$$

$$= -\frac{1}{2} m^2\Gamma . \Gamma = m^2 \quad .$$

Dans la suite, on note U le complémentaire dans Z de la réunion des cycles fondamentaux.

Proposition 4 : Supposons $r \leq 7$ et soit $a \in Z$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $a \in U$,

(ii) il existe dans $|-\omega|$ une courbe irréductible, passant par a,

(iii) il existe dans le système $|-\omega|_a$ sur $Z(a)$ une courbe irréductible.

Si $Z = X(\Sigma)$, les condition équivalent aussi à

(iv) $\Sigma \cup \{a\}$ est en position presque générale,

si l'on est en caractéristique 0, elles équivalent aussi à

(v) il existe dans $|-\omega|_a$ une courbe irréductible et lisse.

C'est trivial si $Z = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, on peut donc supposer $Z = X(\Sigma)$.

(i) $\Rightarrow$ (iv) : cela résulte du théorème III.1 et de la description des racines (table II.2).

(iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) : voir prop. III.2.

(iv) $\Rightarrow$ (v) en caractéristique 0 : idem.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : si a appartient à une courbe irréductible C de $|-\omega|$ et à une racine irréductible α, on $\alpha \cap C \neq \emptyset$ et $\alpha . C = 0$, ce qui est contradictoire.

Dans le cas $r=8$, la situation est un peu plus compliquée. Par tout point $a \in Z$, distinct de l'unique point fixe de $|-\omega|$ passe une courbe unique de $|-\omega|$. Elle peut être irréductible, auquel cas on a $a \in U$, ou réductible. Soit donc $C \in |-\omega|$, réductible. Ecrivons $C = \sum C_i$ où les C_i sont irréductibles ; comme $C.\omega = -1$ et $C_i.\omega \leq 0$ pour tout i, tous les C_i sauf exactement un sont des racines irréductibles, de sorte que C s'écrit $\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \xi$, avec $\alpha_i \in R_i$ et $\xi.\omega = -1$. D'après le lemme III.9, ξ est exceptionnel, donc $C - \xi$ est une racine ; pour tout $\alpha \in R_e$, on a $\alpha.\xi \geq 0$ puisque ξ est irréductible, donc $\alpha.(C-\xi) \leq 0$ et $C - \xi$ est donc un cycle fondamental. En résumé, les seuls diviseurs non irréductibles de $|-\omega|$ sont les $\Gamma + \xi$, où Γ est un cycle fondamental ; on appellera <u>diviseurs exceptionnels spéciaux</u> les diviseurs exceptionnels irréductibles ξ obtenus de cette façon. Ce sont ceux qui passent par le point fixe de $|-\omega|$. Si ξ est un diviseur exceptionnel irréductible spécial, et $\Gamma = -\omega - \xi$ le cycle fondamental correspondant, alors $\Gamma.\xi = \xi.(-\omega - \xi) = 2$; on appellera <u>points marqués</u> de ξ les points de $\xi \cap \Gamma$. En résumé :

<u>Proposition 5</u> : <u>Si</u> $r=8$, <u>par tout point de</u> U <u>passe</u>, <u>soit une courbe irréductible de</u> $|-\omega|$, <u>soit un diviseur exceptionnel spécial</u>. <u>Inversement</u>, <u>tout point d'une courbe irréductible de</u> $|-\omega|$ <u>et tout point non marqué d'un diviseur exceptionnel irréductible spécial appartiennent à</u> U.

3. POINTS FIXES DES SYSTEMES ANTICANONIQUES

Dans ce No, nous allons étudier les points fixes des systèmes $|-n\omega|$, $n \geq 1$ et $|-n\omega|_a$, $n \geq 1$. Notons que, si a appartient à un cycle fondamental Γ, on a $|-n\omega|_a \simeq |-n\omega - \Gamma|$ (cor. 1 de la prop. 2).

<u>Théorème 1</u> : a) <u>Le système</u> $|-n\omega|$ <u>est sans points fixes pour</u> $n \geq 1$ <u>si</u> $r \leq 7$, <u>pour</u> $n \geq 2$ <u>si</u> $r=8$.

b) <u>Pour tout cycle fondamental</u> Γ, <u>le système</u> $|-n\omega - \Gamma|$ <u>est sans points fixes pour</u> $n \geq 1$ <u>si</u> $r \leq 7$, <u>pour</u> $n \geq 2$ <u>si</u> $r=8$.

c) <u>Pour tout</u> $a \in U$, <u>le système</u> $|-n\omega|_a$ <u>est sans points fixes dans</u> $Z(a)$ <u>pour</u> $n \geq 1$ <u>si</u> $r \leq 6$, $n \geq 2$ <u>si</u> $r=7$, $n \geq 3$ <u>si</u> $r=8$.

A) Prenons d'abord $r=8$ et montrons que $|-n\omega|$ n'a pas de points fixes pour $n \geq 2$. Comme $|-\omega|$ a un unique point fixe a (prop. III.2), $|-n\omega|$ ne peut avoir que a pour point fixe ; par ailleurs il existe une courbe irréductible $C \in |-\omega|$, et nécessairement C passe par a ; comme $H^1(-n\omega - \omega) = 0$ (théorème III.1) et $(-n\omega).(-\omega) = n \geq 2 = 2g(C)$, on peut appliquer le lemme 1. Donc $|-n\omega|$ n'a pas de points fixes sur C, et par conséquent n'a pas de points fixes.

B) De même, si $|-\omega|$ avait un point fixe pour $r \leq 7$, ce point se trouverait sur toute courbe irréductible $C \in |-\omega|$, et on aurait comme ci-dessus une contradiction puisque $\deg(-\omega_{|C}) = \omega\cdot\omega = 9 - r \geq 2$. Comme $|-\omega|$ n'a pas de points fixes, $|-n\omega|$ n'en a pas non plus pour $n \geq 1$. On a ainsi démontré a).

C) Prenons maintenant $r = 8$, et soit Γ un cycle fondamental ; on a $-\omega = \Gamma + \xi$, où ξ est effectif et irréductible. Montrons que ξ ne contient aucun point fixe de $|-2\omega - \Gamma| = |-\omega + \xi|$; en effet, si un diviseur C de $|-\omega + \xi|$ coupe ξ, alors C contient ξ puisque $\xi . C = \xi . (-\omega + \xi) = 0$; si donc tous les diviseurs de $|-\omega + \xi|$ contenaient ξ, on aurait $\dim|-2\omega - \Gamma| = \dim|-\omega|$, ce qui contredirait la proposition 2 (on a $\dim|-2\omega - \Gamma| = 2$, $\dim|-\omega| = 1$).

D) Soit alors $n \geq 2$; montrons que $|-n\omega - \Gamma|$ n'a pas de points fixes. Comme $(-n\omega - \Gamma) = (-(n-2)\omega) + (-2\omega - \Gamma) = -(n-1)\omega + \xi$, et que $|-2\omega - \Gamma|$ n'a pas de points fixes sur ξ, on voit aussitôt que le seul point fixe possible pour $|-n\omega - \Gamma|$ est le point fixe a de $|-\omega|$. Mais celui-ci se trouve sur une courbe irréductible $C \in |-\omega|$, et d'après le lemme 1, il suffit de vérifier que $(-n\omega - \Gamma).(-\omega) \geq 2$ et $H^1(-(n-1)\omega - \Gamma) = 0$. La première assertion est claire puisque $n \geq 2$; démontrons la seconde. On a $H^1(\xi) = 0$, puisque $H^0(\xi)$ est de dimension $1 = \chi(\xi)$ et que $H^2(\xi)$ est nul (voir démonstration de la prop. 2.1). D'après le lemme 4, on a $H^1(-(n-1)\omega - \Gamma) = H^1(-(n-2)\omega + \xi) = 0$.

E) Cela démontre b) pour $n = 8$. Pour démontrer b) pour $n \leq 7$, comme $|-\omega|$ n'a pas de points fixes, il suffit de prouver que $|-\omega - \Gamma|$ n'a pas de points fixes. De plus, éclatant des points de Z en nombre $\leq 7-r$ et assez généraux, on ne modifie pas la liste des racines effectives et Γ "reste" un cycle fondamental ; il suffit donc de traiter le cas où $r = 7$. Comme $(-\omega - \Gamma).(-\omega - \Gamma) = \omega\cdot\omega - \Gamma.\Gamma = 0$, il suffit de prouver que $|-\omega - \Gamma|$ contient des courbes irréductibles. On a $\dim|-\omega - \Gamma| = 1$ (prop. 2) ; par un point assez général b de Z, passe donc un unique diviseur D de $|-\omega - \Gamma|$ et il s'agit de prouver que D est irréductible. Eclatant Z en b, on obtient un élément $D' = D - E_b$ de $|-\omega_Z - E_b - \Gamma|$) $|-\omega_{Z(b)} - \Gamma|$; si b est assez général, Γ reste fondamental, de sorte que D' est exceptionnel et <u>irréductible</u>. On a $D' \neq E_b$, donc D' est le transformé strict de D, et ce dernier est bien irréductible. Cela achève la démonstration de b).

F) Prenons maintenant $r \leq 6$ et $a \in U$. Alors le système $|-\omega_Z|_a$ sur Z(a) n'est autre que $|-\omega_{Z(a)}|$, et il n'a pas de points fixes d'après a). Pour $n < 1$, le système $|-n\omega|_a$ contient $|-(n-1)\omega| + |-\omega|_a$ donc n'a pas non plus de points fixes, d'après a).

G) Prenons $r = 7$, et $a \in U$. Alors le système $|-2\omega_Z|_a$ sur Z(a) est le système $|-2\omega_{Z(a)} + E_a|$. Or ce système ne peut, d'après a) avoir de point fixe que sur E_a. Par ailleurs, E_a est de genre 0, on a $(-2\omega_{Z(a)} + E_a).E_a = 1 > 0$, et $H^1(-2\omega_{Z(a)} + E_a - E_a) = 0$, de sorte que le lemme 1 s'applique. Donc $|-2\omega_Z|_a$ n'a pas de points fixes. Il en est alors de même de $|-n\omega|_a$, $n \geq 2$ puisque $|-n\omega|_a$ contient alors $|-(n-2)\omega| + |-2\omega|_a$ qui est sans points fixes d'après a) et ce qui précède.

H) Il nous reste à prouver que, pour $r = 8$ et $n \geq 3$, $|-n\omega|_a$ n'a pas de point fixe dans Z(a) pour tout $a \in U$. Nous le ferons ci-dessous (point I). Démontrons d'abord l'analogue suivant de la prop. 4.

Proposition 6 : Supposons $r = 8$ et soit $a \in Z$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $a \in U$, et a n'est pas le point fixe de $|-\omega|$,

(ii) il existe dans le système $|-2\omega|$ une courbe irréductible passant par a,

(iii) il existe dans le système $|-2\omega|_a$ sur Z(a) une courbe irréductible,

(iv) (caractéristique 0) : il existe dans $|-2\omega|_a$ une courbe lisse.

Si a est le point fixe de $|-\omega|$, tout diviseur de $|-2\omega|_a$ est somme de deux diviseurs de $|-\omega|$.

Comme $|-2\omega|$ n'a pas de points fixes (théorème 1), on a toujours $\dim|-2\omega|_a = \dim|-2\omega| - 1 = 2$. Si a est le point fixe de $|-\omega|$, et si Φ_1, Φ_2 forment une base de $H^0(Z,-\omega)$, alors Φ_1^2, $\Phi_1\Phi_2$ et Φ_2^2 appartiennent à $H^0(Z, |-2\omega|_a)$ donc en forment une base, et tout élément de $H^0(Z), |-2\omega|_a)$ s'écrit $(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2)(\gamma\Phi_1 + \delta\Phi_2)$, d'où la dernière assertion de la proposition. Démontrons la première.

On a aussitôt (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i). Soit $a \in Z$ satisfaisant à (i). Il s'agit de prouver qu'il existe une courbe irréductible de $|-2\omega|$, qui passa par a, et lisse en a (et même lisse en caractéristique 0). Soit $C \in |-2\omega|_a$ Si C n'est pas irréductible, comme $C.\omega = -2$, on peut écrire, soit $C = C_1 + \alpha$, où C_1 est effectif et α une racine effective, soit $C = C_1 + C_2$, où C_1 et C_2 sont irréductibles avec $\omega.C_1 = \omega.C_2 = -1$. Dand le premier cas, il existe un cycle fondamental Γ tel que $C - \Gamma \in |-2\omega - \Gamma|_a$; comme $|-2\omega - \Gamma|$ n'a pas de points fixes (théorème 1), on a

$$\dim|-2\omega - \Gamma|_a = \dim|-2\omega - \Gamma| - 1 = 1 ,$$

donc C appartient à la réunion d'un nombre fini de sous-variétés linéaires projectives fixées de dimension 1 de $|-2\omega|_a$. Dans le deuxième cas, vu le lemme III.8, on a forcément C_1, $C_2 \in |-\omega|$, donc par exemple $C_1 \in |-\omega|$, $C_2 \in |-\omega|_a$ mais cela implique que C appartient à une sous-variété linéaire projective fixée de dimension 1 de $|-2\omega|_a$ ...

ral de $|-2\omega|_a$ est donc irréductible, et on peut trouver C, $C' \in |-2\omega|_a$ irréductibles et se coupant en au moins un point b distinct de a et non point fixe de $|-2\omega|_a$. Puisque $C.C' = 4$ et $C \cap C' \ni \{a,b\}$, il en résulte qu'en chaque point de $C \cap C'$ l'un au moins des courbes C, C' est lisse ; cela démontre (i) $\Rightarrow$ (ii). De plus, en caractéristique 0, le pinceau $|-2\omega|_{a,b}$ contient une courbe lisse, d'après le théorème de Bertini.

<u>Remarque</u> : La propriété (iv) non utilisée dans la suite sera évidente plus tard lorsqu'on aura représenté Z comme un "cône double".

I) Prenons toujours $r = 8$, soit $a \in U$, et considérons $|-n\omega|_a$, avec $n \geq 3$.

Si a_o est le point fixe de $|-\omega|$, on a $|-n\omega|_{a_o} \supset |-\omega| + |-(n-1)\omega|$, et $|-\omega|$ n'a pas de point fixe dans $Z(a_o)$ (prop. III.2), tandis que $|-(n-1)\omega|$ n'a pas de point fixe ; donc $|-n\omega|_{a_o}$ n'a pas de point fixe.

Cela implique en particulier que $a \in Z$, $a \neq a_o$, on a $\dim|-\omega|_{a,a_o} = \dim|-n\omega| - 2 = \dim|-n\omega|_a - 1$, donc que a_o n'est pas point fixe de $|-n\omega|_a$.

Soit $a \in Z$, $a \neq a_o$, et soit C une courbe irréductible de $|-2\omega|_a$ (prop. 6). Alors $|-n\omega|_a$ contient les diviseurs $C + D$, avec $D \in |-(n-2)\omega|$. Comme $|-(n-2)\omega|$ n'a de point fixe qu'en a_o (si $n = 3$), et que ce dernier n'est pas point fixe de $|-n\omega|_a$, tout point fixe de $|-n\omega|_a$ est sur C, ou plutôt sur le transformé strict de C dans $Z(a)$. On peut alors à nouveau appliquer le lemme 1, en notant que

$$(-3\omega).C = (-3\omega).(-2\omega) = 6 \geq 2g(c) + 1 = 5 \quad .$$

<u>Cela achève la démonstration du théorème</u>.

Notons que parmi les systèmes $|-n\omega|$ et $|-n\omega|_a$, les seuls non couverts par le théorème sont

a) pour $r = 7$, $|-\omega|_a$, $a \in U$,

b) pour $r = 8$, $|-2\omega|_a$, $a \in U$,

c) pour $r = 8$, $|-\omega|$, $|-\omega|_a$, $a \in Z$.

Les deux systèmes de c) sont déjà connus (prop. III.2), reste à étudier ceux de a) et b) :

<u>Corollaire</u> : a) <u>Pour</u> $r = 7$ <u>et</u> $a \in U$, <u>le système</u> $|-\omega|_a$ <u>possède un point fixe unique dans</u> $Z(a)$.

b) <u>Pour</u> $r = 8$ <u>et</u> $a \in U$, <u>le système</u> $|-2\omega|_a$ <u>possède dans</u> $Z(a)$ <u>un unique point fixe</u>, <u>sauf lorsque</u> a <u>est le point fixe de</u> $|-\omega|$, <u>auquel cas ce système admet</u> E_a <u>comme composante fixe</u>.

a) Pour $a \in U$, le système $|-\omega|_a$ de $Z(a)$ est le système $|-\omega_{Z(a)}|$; il suffit alors d'appliquer la prop. III.2, compte-tenu de la prop. 4.

b) Si a est le seul point fixe de $|-\omega|$, alors tous les diviseurs assez généraux de $|-2\omega|_a$ sont de multiplicité égale à 2 en a (proposition 6), donc $|-2\omega|_a$ admet dans $Z(a)$, le diviseur exceptionnel E_a comme composante fixe. Si a n'a pas le point fixe de $|-\omega|$, il existe un diviseur $D \in |-2\omega|$, passant par a et lisse en a (prop. 6) ; soit C l'unique diviseur de $|-\omega|_a$. On a $C.D = 2$; dans $Z(a)$, on a $(D-E_a).(C-E_a) = 1$, et $D - E_a$ est irréductible, donc $D-E_a$ et $C-E_a$ ont un unique point commun. Comme $|-2\omega|_a$ est engendré par $D-E_a$ et les diviseurs $C-E_a+C'$, $C' \in |-\omega|$, cela démontre l'assertion cherchée.

4. APPENDICE

<u>Proposition 7</u> : <u>Soit</u> L <u>un faisceau inversible sur une courbe irréductible et réduite</u> C, <u>de genre</u> $g = \dim H^1(C,\mathcal{O}_C)$.

a) <u>Si</u> $\deg(L) \geq 2g-1$, <u>alors</u> $H^1(C,L) = 0$,

b) <u>si</u> $\deg(L) \geq 2g$, <u>alors</u> L <u>est engendré par ses sections</u>,

c) <u>si</u> $\deg(L) \geq 2g+1$, <u>alors</u> L <u>est très ample</u>.

Démontrons d'abòrd le lemme suivant :

<u>Lemme 5</u> : <u>Soit</u> $0 \to M \to L \to K \to 0$ <u>une suite exacte</u>, <u>où</u> L <u>est inversible et</u> K <u>à support fini</u>. <u>Si</u> $\deg(L) \geq 2g-1+\mathrm{long}(K)$, <u>alors</u> $H^1(C,M) = 0$, <u>et par conséquent</u> $H^0(C,L) \to H^0(C,K)$ <u>est surjectif</u>.

Soit ω_C le module dualisant de C ; c'est un module de rang 1 sans torsion ; on a une suite exacte $0 \to \underline{Hom}(L,\omega_C) \to \underline{Hom}(M,\omega_C) \to K' \to 0$, où $\mathrm{long}(K') = \mathrm{long}(K)$. Cela implique

$$\chi(\underline{Hom}(M,\omega_C)) = \chi(\underline{Hom}(L,\omega_C)) + \mathrm{long}(K') = -\chi(L) + \mathrm{long}(K) =$$

$$- \deg(L) + g - 1 + \mathrm{long}(K) \quad .$$

Si $H^1(C,M) \neq 0$, alors $H^0(C,\underline{Hom}(M,\omega_C)) \neq 0$, et il existe une suite exacte $0 \to \mathcal{O}_C \to \underline{Hom}(M,\omega_C) \to K'' \to 0$, où K'' est à support fini, donc $\chi(\underline{Hom}(M,\omega_C)) \geq \chi(\mathcal{O}_C) = 1 - g$. D'après ce qui précède, cela implique $-\deg(L) + g - 1 + \mathrm{long}(K) \geq 1 - g$, c'est-à-dire $\deg(L) \leq 2g - 2 + \mathrm{long}(K)$.

Revenons à la démonstration de la proposition. La partie a) résulte directement du lemme 5.

Pour tout $x \in C$, notons n_x l'idéal de x. Si $\deg(L) \geq 2g$, alors d'après le lemme 5, $H^0(L) \to H^0(L/m_x L)$ est surjectif pour tout x, donc L est engendré par ses sections. Si $\deg(L) \geq 2g+1$, alors $H^0(L) \to H^0(L/nL)$ est surjectif pour tout idéal n de $\mathcal{O}_x$ tel que $\mathrm{long}(\mathcal{O}_c | n) = 2$; cela implique que, pour tout $x \in C$, et tout idéal η de m_x tel que $\mathrm{long}(n/m_x) = 1$, $H^0(m_x L) \to H^0(m_x L/nL)$ est surjectif. Prenant pour n successivement les idéaux $m_x m_y$, $y \neq x$ et les images réciproques dans m_x des sous-espaces de codimension 1 de m_x/m_x^2, on en déduit que $H^0(m_x L) \to H^0(m_x L/m_x m_y L)$ et $H^0(m_x L) \to H^0(m_x L/m_x^2 L)$ sont surjectifs, et L est très ample.

<u>N.B.</u> Démonstration fournie par M. Raynaud.
