Séminaire sur les singularités des surfaces
École Polytechnique

M. Demazure

Surfaces de Del Pezzo : III - Positions presque générales

Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 5, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E S   S U R   L E S   S I N G U L A R I T E S
D E S   S U R F A C E S

SURFACES DE DEL PEZZO :
III - POSITIONS PRESQUE GENERALES

M. DEMAZURE

9 Novembre 1976

Dans cet exposé, on conserve les notations de l'exposé précédent, et on <u>suppose toujours</u> (sauf au No 1) que $r = \mathrm{Card}(\Sigma) \leq 8$. On a donc une suite $\Sigma = (x_1, \dots, x_r)$, et une surface $X(\Sigma)$ obtenue par éclatements successifs

$$X(\Sigma) \to X(\Sigma_{r-1}) \to \dots\ X(\Sigma_1) \to X \simeq \mathbb{P}^2 \quad ,$$

où $\Sigma_i = \{x_1, \dots, x_i\}$ et $x_{i+1} \in X(\Sigma_i)$; on note E_i le diviseur de $X(\Sigma)$ image réciproque de $x_i \in X(\Sigma_{i-1})$. Si Γ est un diviseur effectif de X, on note $\mathrm{mult}(x_i;\Gamma)$ la multiplicité de x_i sur le transformé strict de Γ dans $X(\Sigma_{i-1})$, et on dit que Γ <u>passe</u> par x_i si $\mathrm{mult}(x_i;\Gamma) > 0$.

1. SYSTEMES LINEAIRES COMPLETS SUR $X(\Sigma)$ ET COMPOSANTES VERTICALES

Définissons $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_r$ par récurrence comme suit. Sur $X(\Sigma_1)$, on pose $\hat{E}_1 = E_1$; sur $X(\Sigma_2)$, on note $\hat{E}_1$ le transformé strict du $\hat{E}_1$ précédent, et on pose $\hat{E}_2 = E_2$; sur $X(\Sigma_3)$ on note $\hat{E}_1$, $\hat{E}_2$ les transformés stricts de $\hat{E}_1$ et $\hat{E}_2$ et on pose $\hat{E}_3 = E_3$, <u>etc</u>. Alors $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_r$ sont les composantes irréductibles de $E_1, \dots, E_r$. Plus précisément, pour $1 \leq i < j \leq r$, posons $\varepsilon_{i,j} = 1$ si, sur $X(\Sigma_{j-1})$, on a $x_j \in \hat{E}_i$, $\varepsilon_{ij} = 0$ sinon. On a successivement :

$$\begin{aligned}
&\text{sur } X(\Sigma_1) \ , \quad \hat{E}_1 = E_1 \ ,\\
&\text{sur } X(\Sigma_2) \ , \quad \hat{E}_2 = E_2 \ , \ \hat{E}_1 = E_1 - \varepsilon_{1,2}E_2 \ ,\\
&\text{sur } X(\Sigma_3) \ , \quad \hat{E}_3 = E_3 \ , \ \hat{E}_2 = E_2 - \varepsilon_{2,3}E_3 \ , \ \hat{E}_1 = E_1 - \varepsilon_{1,2}E_2 - \varepsilon_{1,3}E_3 \ ,
\end{aligned}$$

<u>etc</u>, donc sur $X(\Sigma)$,

$$(1) \qquad \hat{E}_i = E_i - \varepsilon_{i,i+1}E_{i+1} - \dots - \varepsilon_{i,r}E_r \quad , \qquad i = 1, \dots, r \ .$$

Pour inverser ces formules, notons $x_i \leftarrow x_j$ la relation $\varepsilon_{i,j} = 1$. On obtient ainsi un diagramme orienté Δ. Par exemple, ce diagramme est

$$\begin{tikzcd} x_1 & x_2 \arrow[l] & x_3 \arrow[l] \arrow[ll, bend right] & x_4 \end{tikzcd} \quad ,$$

si sur $X(\Sigma_1)$, on a $x_2 \in E_1$, sur $X(\Sigma_2)$, on a $x_3 \in \hat{E}_1 \cap E_2$, et sur $X(\Sigma_3)$, on a $x_4 \notin \hat{E}_1 \cup \hat{E}_2 \cup E_3$. On a sans difficultés

Proposition 1 : Sur $X(\Sigma)$, on a pour tout i

$$E_i = \hat{E}_i + n_{i,i+1}\hat{E}_{i+1} + \ldots + n_{i,r}\hat{E}_r \quad ,$$

où, pour $i < j$, $n_{i,j}$ est le nombre de chemins composés joignant x_j à x_i dans le diagramme Δ.

Par exemple , dans l'exemple ci-desus, on a $E_1 = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 + 2\hat{E}_3$. On posera $n_{i,i} = 1$, $n_{i,j} = 0$ pour $i > j$.

Soit $\xi = (a_o;a_1,\ldots,a_n) \in \mathrm{Pic}(X(\Sigma))$. Considérons le système linéaire complet $|\xi|$ défini par ξ : c'est l'ensemble des diviseurs effectifs C sur $X(\Sigma)$ de classe ξ, c'est-à-dire tels que $C.E_o = a_o$, $C.E_i = a_i$, $i > 0$. Il ne peut être non vide que si $a_o \geq 0$ (exposé précédent, lemme 1), et sous cette condition, on a $H^2(X(\Sigma),\xi) = 0$, donc

$$\dim|\xi| = \dim H^o(X(\Sigma),\xi) - 1 = \frac{1}{2}\,\xi.(\xi-\omega) + \dim H^1(X,\xi) \quad .$$

On note classiquement $\sup|\xi|$ ("superabondance") l'entier positif $\dim H^1(X,\xi)$, et on a donc, puisque $\omega = -(3;1,\ldots,1)$,

$$(2) \qquad \begin{aligned} \dim|\xi| &= \frac{1}{2}\,\xi.(\xi - \omega) + \sup|\xi| \\ &= \frac{1}{2}\,[a_o(a_o+3) - \sum_{i=1}^{r} a_i(a_i+1)] + \sup|\xi| \quad . \end{aligned}$$

Tout diviseur effectif C sur $X(\Sigma)$ s'écrit de façon unique $C = \hat{\Gamma} + V = \hat{\Gamma} + \sum_{i=1}^{r} m_i\hat{E}_i$, où V est un diviseur vertical effectif, et où $\hat{\Gamma}$ est le transformé strict d'un diviseur effectif Γ sur X ; comme $cl(\hat{\Gamma}) = (\deg(\Gamma);(\mathrm{mult}(x_i;\Gamma)))$, on a $a_o = \deg(\Gamma)$ et

$$V = \sum_{i>0} (\mathrm{mult}(x_i;\Gamma) - a_i)E_i = \sum_{i,j} n_{ij}(\mathrm{mult}(x_i;\Gamma) - a_i)\hat{E}_j \quad .$$

Il s'ensuit que $|\xi|$ s'identifie canoniquement au système des diviseurs effectifs Γ sur X, de degré a_o, tels que, pour chaque i, on ait

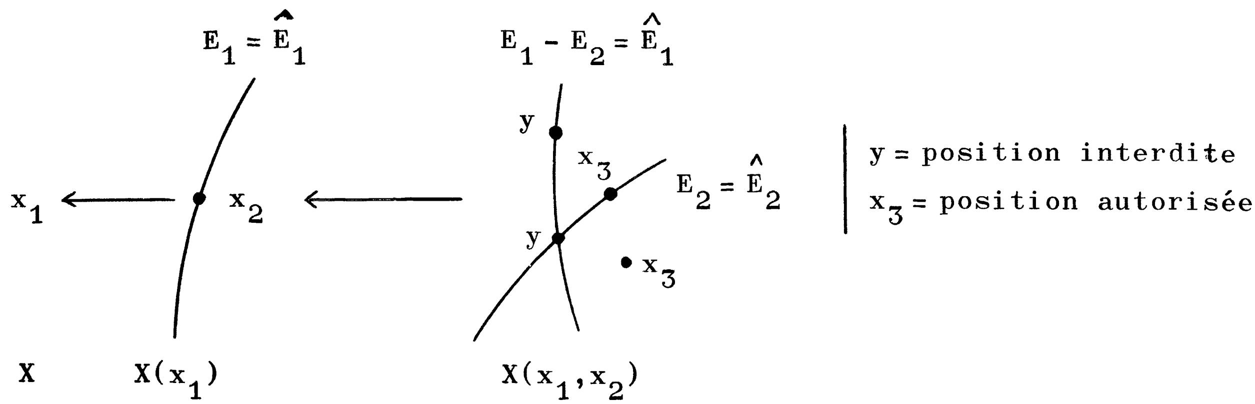
$$(3) \qquad \sum_i n_{ij}(\mathrm{mult}(x_i;\Gamma) - a_i) \geq 0 \quad .$$

Un tel diviseur sera dit basé aux points x_i avec multiplicité (a_i). Cette notion se simplifie dans plusieurs cas particuliers.

a) Supposons $\Sigma \subset X$. Alors $E_i = \hat{E}_i$ pour tout i, de sorte que la condition précédente équivaut à $\mathrm{mult}(x_i;\Gamma) \geq a_i$ pour tout i, et $|\xi|$ s'identifie au système linéaire des courbes Γ de degré a_o sur X telles que $\mathrm{mult}(x_i;\Gamma) \geq a_i$ pour tout i. Dire que $\sup|\xi| = 0$ signifie que la dimension de ce système se calcule par la formule usuelle $\frac{1}{2}(a_o+1)(a_o+2) - 1 - \frac{1}{2}\sum a_i(a_i+1)$, ou encore que "les conditions obtenues en écrivant $\mathrm{mult}(x_i;\Gamma) \geq a_i$ sont linéairement indépendantes".

b) Supposons que Σ satisfasse à la condition suivante :

(*) pour $i = 1,\ldots,r$ le point x_i de $X(\Sigma_{i-1})$ n'appartient à aucune des composantes irréductibles des diviseurs $E_1,\ldots,E_{i-1}$ (relatifs à $X(\Sigma_{i,1})$) qui ne sont pas des E_j (cf. dessin, dans le cas $i = 3$).



Cette condition signifie que, au cours de la construction de $X(\Sigma)$, il n'apparaît au plus sur chaque composante $\hat{E}_i$ qu'un point x_j, c'est-à-dire que dans chaque relation (1), il n'y a au plus qu'un coefficient $\varepsilon_{i,j}$ non nul. Cela signifie aussi que le diagramme Δ est une réunion disjointe de chaînes, ou encore que $n_{i,j}$ est toujours ≤ 1. La condition (b) devient alors

(4) pour toute chaîne $x_{i_1} \leftarrow x_{i_2} \leftarrow \ldots \leftarrow x_{i_h}$ de Δ, avec $x_{i_1} \in X$, on a

$$\mathrm{mult}(x_{i_1};\Gamma) + \ldots + \mathrm{mult}(x_{i_h};\Gamma) \geq a_{i_1} + \ldots + a_{i_h}$$

et implique en particulier :

(5) on a $\sum_i \mathrm{mult}(x_i;\Gamma) \geq \sum a_i$.

c) Dire que $|\xi|$ est sans composantes fixes verticales, signifie qu'il existe Γ comme précédemment tel que $V = 0$, c'est-à-dire tel que $\mathrm{mult}(x_i,\Gamma) = a_i$ pour tout i ; en ce cas, tout élément assez général C de $|\xi|$ est de la forme $\hat{\Gamma}$ où Γ est un diviseur effectif de degré a_o sur X, passant par les x_i avec multiplicités a_i .

d) Considérons maintenant le cas où tous les a_i sont égaux à 1 ; on dira

alors simplement que Γ est basée aux points x_i. Si Γ est lisse (ou plus généralement si Γ est lisse en ceux des points de $\Sigma \cap X$ où elle passe) on a de toute façon $\mathrm{mult}(x_i;\Gamma) - 1 \leq 0$, donc Γ est basée aux points x_i si et seulement si elle passe par ces points.
Le résultat est le même d'après a) si Γ n'est plus supposée lisse, mais si on suppose $\Sigma \subset X$. Plus généralement, d'après b), si Σ satisfait à la condition (*) et si Γ est basée aux points x_i, alors Γ passe par tous les points de $\Sigma \cap X$ et $\sum \mathrm{mult}(x_i;\Gamma) \geq r$.

2. POSITIONS PRESQUE GENERALES

On suppose désormais $r \leq 8$.

On dira que Σ est en position générale s'il satisfait aux conditions du théorème 1 de l'exposé précédent ($\Sigma \subset X$, par trois points alignés ...).

Définition 1 : On dit que Σ est en position presque-générale si

1) Σ satisfait à la condition (*) du No 1 ;
2) aucune droite de X ne passe par quatre points de Σ ;
3) aucune conique irréductible de X ne passe par sept points de Σ.

Il est clair que "Σ en position générale" implique "Σ en position presque-générale".

Théorème 1 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Σ est en position presque-générale ;

(b) le système anticanonique de $X(\Sigma)$ n'a pas de composantes fixes ;

(b') le système anticanonique de $X(\Sigma)$ contient une courbe irréductible et lisse ;

(b") il existe une cubique lisse de X passant par tous les points de Σ ;

(c) $H^1(X(\Sigma),\omega_{X(\Sigma)}^{\otimes n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$;

(c') il existe une suite d'entiers n_i, tendant vers $-\infty$, telle que

$$H^1(X(\Sigma),\omega_{X(\Sigma)}^{\otimes n_i}) = 0 \quad ;$$

(d) pour tout diviseur effectif D sur $X(\Sigma)$, on a $D.\omega \leq 0$;

(d') pour tout diviseur effectif irréductible D sur $X(\Sigma)$, on a soit $D.\omega < 0$, soit $D.\omega = 0$ et $D.D = -2$ (i.e. $\mathrm{cl}(D)$ est une racine).

La démonstration emploiera les Nos 3 à 6 ; au passage, nous prouverons des résultats auxiliaires qui nous seront utiles par la suite et donnerons encore d'autres conditions équivalentes aux précédentes.

3. CUBIQUES BASEES EN HUIT POINTS EN POSITION PRESQUE GENERALE

Proposition 2 : Supposons $r = 8$ et Σ en position presque-générale. Le système anticanonique de $X(\Sigma)$ est de dimension 1, sans composantes fixes et a un unique point fixe, où deux courbes convenables du système se coupent transversalement.

Pour tout diviseur effectif Γ sur X, posons $\sigma(\Gamma) = \sum_{i=1}^{8} \mathrm{mult}(x_i;\Gamma)$.

Notons les propriétés suivantes :

a) on a $\sigma(\Gamma+\Gamma') = \sigma(\Gamma) + \sigma(\Gamma')$. C'est clair.

b) si $\deg(\Gamma) = 1$, alors $\sigma(\Gamma) \leq 3$. Puisque Γ est lisse, ce n'est autre que la partie 2) de la définition 1).

c) si $\deg(\Gamma) = 2$, alors $\sigma(\Gamma) = 6$. Si Γ est lisse, c'est la partie 3) de la définition 1. Si Γ est réductible, cela résulte de 1 et 2.

d) si Γ est basé aux points x_i, on a $\sigma(\Gamma) \geq 8$. Cela résulte de la partie 1) de la définition 1 (cf. formule (5) du No 1).

Par ailleurs, d'après la formule (1) du No 1, on a

$$\dim|-\omega| \geq \frac{1}{2} - \omega.(-\omega - \omega) = \omega.\omega = 1 \quad .$$

Lemme 1 : a) Il n'existe qu'un nombre fini de droites D de X avec $\sigma(D) \geq 2$,

b) il n'existe qu'un nombre fini de coniques Γ de X avec $\sigma(\Gamma) \geq 5$,

c) il n'existe qu'un nombre fini de cubiques réductibles basées aux points de Σ.

a) Une droite D de X telle que $\sigma(D) \geq 2$ doit passer par au moins deux points de Σ ; il y a donc au plus $\binom{8}{2}$ telles droites.

b) Une conique décomposée Γ telle que $\sigma(\Gamma) \geq 5$ s'écrit $\Gamma = D_1 + D_2$ avec $\deg(D_1) = \deg(D_2) = 1$, donc $\sigma(D_1) \leq 3$, $\sigma(D_2) \leq 3$, $\sigma(D_1) + \sigma(D_2) \geq 5$ (propriétés a), et b) ci-dessus) ; cela implique $\sigma(D_1) \geq 2$, $\sigma(D_2) \geq 2$ et il n'y a donc, vu a) qu'un nombre fini de telles coniques. Une conique lisse Γ telle que $\sigma(\Gamma) \geq 5$ doit passer par cinq points de Σ, et est déterminée par ces cinq points (Bezout) ; il y a donc au plus $\binom{8}{5}$ telles coniques.

c) Si Γ est une cubique décomposée basée aux points de Σ, on a $\sigma(\Gamma) \geq 8$ d'après la propriété d). Mais Γ s'écrit $\Gamma_1 + \Gamma_2$ avec $\deg(\Gamma_1) = 1$, $\deg(\Gamma_2) = 2$, $\sigma(\Gamma_1) \leq 3$, $\sigma(\Gamma_2) \leq 6$, $\sigma(\Gamma_1) + \sigma(\Gamma_2) \geq 8$ d'après les propriétés a), b), c) ; donc $\sigma(\Gamma_1) \geq 2$ et $\sigma(\Gamma_2) \geq 5$; on conclut grâce à a) et b).

Lemme 2 : On a $\dim|-\omega| = 1$.

D'après ce qu'on a vu au No 1, $|-\omega|$ est formé des diviseurs $\overline{\Gamma} = \widehat{\Gamma} + \Sigma(\mathrm{mult}(X_i;\Gamma) - 1)E_i$, où Γ est une cubique basée aux points de Σ. Si $\dim|-\omega| > 1$, on peut donc imposer à une cubique basée aux points de Σ de vérifier deux conditions linéaires supplémentaires, par exemple de passer par deux points donnés a et b de $X - (X \cap \Sigma)$; montrons que cela est contradictoire. Prenant d'abord a et b sur une droite passant par deux points de Σ, on obtient l'existence d'une cubique décomposée $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ basée aux points de Σ, avec $\deg(\Gamma_1) = 1$, $\deg(\Gamma_2) = 2$. D'après un raisonnement déjà fait, on a $\sigma(\Gamma_1) = 3$ ou $\sigma(\Gamma_2) = 6$; cela implique que toute cubique basée sur Σ et passant par un point supplémentaire choisi sur Γ_1 ou Γ_2 suivant le cas est décomposée ; mais le lemme 1 contredit alors le fait qu'il existe un nombre infini de telles cubiques si $\dim|-\omega| > 1$.

Pour toute cubique Γ basée en les x_i , posons

$$\overline{\Gamma} = \widehat{\Gamma} + \Sigma(\mathrm{mult}(x_i;\Gamma) - 1)E_i \quad .$$

Lemme 3 : Les éléments non irréductibles de $|-\omega|$ sont les courbes $\overline{\Gamma}$ où Γ est une cubique de l'une des formes suivantes :

1) Γ est une cubique réductible basée en les x_i ;
2) Γ est irréductible et a un point double en l'un des x_i , et passe par tous les autres ;
3) Γ est irréductible et il existe x_i et x_j avec $x_i \in X$ et $x_i \leftarrow x_j$ telle que Γ ait un point double en x_i et passe par tous les points de Σ distincts de x_j.

On doit avoir $\Sigma\, \mathrm{mult}(x_i;\Gamma) \geq 8$, ce qui ne laisse que les possibilités ci-dessus, outre celle où Γ est irréductible et tous les $\mathrm{mult}(x_i;\Gamma)$ égaux à 1, auquel cas $\overline{\Gamma}$ est irréductible.

On peut maintenant terminer la démonstration de la proposition 2. L'ensemble des cubiques de la forme 1 est fini (lemme 1), celui des cubiques de la forme 2) (resp. 3)) est fini d'après Bezout ($2^2 + 6.1 > 9$). Il s'ensuit que $|-\omega|$ contient au moins deux courbes irréductibles distinctes C_1 et C_2. Mais $C_1.C_2 = \omega.\omega = 1$, donc C_1 et C_2 se coupent transversalement en un point unique. Comme $\dim|-\omega| = 1$, ce point est un point fixe de $|-\omega|$.

Corollaire : Il existe une cubique lisse passant par les points de Σ.

En effet, d'après le théorème de Bertini sur les systèmes linéaires, $|-\omega|$ contient une courbe lisse, qui est de la forme $\hat{\Gamma}$, où Γ est la cubique cherchée.

4. DEMONSTRATION DE $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (b') \Leftrightarrow (b'')$

$(a) \Rightarrow (b'')$: complétons le système Σ par 8-r points de X de façon que le système obtenu soit encore en position presque générale ; alors, d'après le corollaire de la proposition 2, il existe une cubique lisse passant par Σ.

$(b'') \Leftrightarrow (b')$: c'est clair (voir No 1).

$(b') \Rightarrow (b)$: c'est clair, puisque $\dim|-\omega| \geq 9-r \geq 1$.

$(b) \Rightarrow (a)$: si une droite passe par 4 points de Σ, tout cubique basée aux points de Σ doit contenir cette droite. De même pour une conique irréductible passant par sept points de Σ. Enfin, si Σ ne satisfait pas à la condition (*) du No 1, le lemme suivant implique qu'il existe i avec $\hat{E}_i.\omega > 0$. Alors $\hat{E}_i.(-\omega) < 0$ et $\hat{E}_i$ est une composante fixe de $|-\omega|$.

Lemme 4 : Pour que Σ satisfasse à la condition (*), il faut et il suffit que $\hat{E}_i.\omega \leq 0$ pour tout i.

En effet, les relations (1) du No 1 donnent

$$\hat{E}_i.\omega = -1 - \sum_{j>i} \varepsilon_{i,j} \quad .$$

Dire que $\hat{E}_i.\omega \leq 0$ signifie donc qu'au plus un des $\varepsilon_{i,j}$, $j > i$ est non nul, ce qui est une autre forme de la condition (*) (cf. No 1).

5. DEMONSTRATION DE $(d) \Rightarrow (d') \Rightarrow (a)$

Lemme 5 : Si D est un diviseur effectif et irréductible sur $X(\Sigma)$, et si $D.\omega = 0$, alors $D.D = -2$, (donc cl(D) est une racine).

On a $0 \leq g(D) = 1 + \frac{1}{2} D.(D+\omega) = 1 + \frac{1}{2} D.D$, donc $D.D \geq -2$. Comme la forme-intersection est non-dégénérée et négative sur l'orthogonal de ω dans $\mathrm{Pic}(X(\Sigma))$ (exposé précédent, proposition 1), on a, soit $D.D = -2$, soit $D.D = -1$, mais D.D est pair, soit par la formule du genre ci-dessus, soit par le lemme algébrique suivant :

Lemme 6 : Pour tout $\xi \in P_9$ tel que $\xi.\omega = 0$, $\xi.\xi$ est un entier pair (et ≤ 0).

D'après un calcul déjà fait (et qui aurait du être dégagé en lemme), on a pour tout $\xi = (a_o; a_1, \ldots, a_9) \in P_9$ les relations

$$\sum_{i=1}^{9} (a_o - 3a_i) = -3\ \xi.\omega_9 \quad , \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{9} (a_o - 3a_i)^2 = -6a_o\ \xi.\omega_9 - 9\xi.\xi \quad . \tag{7}$$

Posant $a_o - 3a_i = b_i$, cela donne ici $\Sigma\, b_i = 0$, $\Sigma\, b_i^2 = -9\xi.\xi$; donc $b_9 = -\sum_{i=1}^{8} b_i$ et $\sum_{i=1}^{9} b_i^2 = 2 \sum_{i=1}^{8} b_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 8} b_i b_j \in 2\mathbb{N}$, ce qui donne $\xi.\xi \in -2\mathbb{N}$.

Cela démontre (d) $\Leftrightarrow$ (d'). Par ailleurs, si Σ n'est pas en position presque-générale, $\mathrm{Pic}(X(\Sigma))$ contient un élément effectif de l'un des types $(0;-1,1^2)$, $(1;1^4)$, $(2,1^7)$; pour chaque élément ξ de l'un de ces types, on a $\omega.\xi = 1$, ce qui contredit (d).

6. DEMONSTRATION DE (b') $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (c') $\Rightarrow$ (d)

Soit C une courbe irréductible sur $X(\Sigma)$; on a une suite exacte $0 \to \mathcal{O}_{X(\Sigma)} \to \mathcal{O}_{X(\Sigma)}(C) \to \mathcal{O}_C(C) \to 0$, d'où pour tout faisceau inversible L sur $X(\Sigma)$ une suite exacte de cohomologie

$$H^1(X(\Sigma),L) \longrightarrow H^1(X(\Sigma),L\otimes\mathcal{O}(C)) \longrightarrow H^1(C,L\otimes\mathcal{O}(C)) \longrightarrow H^2(X(\Sigma),L) \quad .$$

Supposons d'abord (b') satisfaite et prenons C lisse de classe $-\omega$, et $L = \omega^{\otimes n}$. Alors $g(C) = 1 + \frac{1}{2}(-\omega)\cdot(-\omega+\omega) = 1$ et $\deg L\otimes\mathcal{O}(C)_{|C} = -(n-1)\omega.\omega$. Dès que $n \leq 0$, on a $-(n-1)\omega.\omega > 0$, donc $H^1(C,L\otimes\mathcal{O}(C)) = 0$; de la suite exacte précédente, on tire donc une surjection $H^1(X(\Sigma),\omega^{\otimes n}) \to H^1(X(\Sigma);\omega^{\otimes(n-1)})$; comme $H^1(X(\Sigma),\mathcal{O}_{X(\Sigma)}) = 0$, il en résulte que $H^1(X(\Sigma),\omega^{\otimes n}) = 0$ pour $n \leq 0$, donc aussi pour $n > 0$ par dualité de Serre, d'où (c). L'assertion (c) $\Rightarrow$ (c') est triviale.

Supposons maintenant $C.\omega > 0$, et prenons $L = \omega^{\otimes -n} \otimes \mathcal{O}(C)^{\otimes -1}$. Dans la suite exacte $H^1(X(\Sigma)),\omega^{\otimes -n}) \to H^1(C,\omega^{\otimes -n}) \to H^2(X(\Sigma),L)$, on a, dès que n est assez grand $H^2(X(\Sigma),L) = 0$ puisque $E_o.L = 3n - E_o.C$ et $H^1(C,\omega^{\otimes -n}) \neq 0$, puisque $\deg \omega^{\otimes -n}{}_{|C} = -n\ C.\omega$. On a donc $H^1(X(\Sigma),\omega^{\otimes -n}) \neq 0$ dès que n est assez grand ce qui contredit (c') ; donc (c') $\Rightarrow$ (d).

<u>Remarque finale</u> : Les conditions (c) et (c') sont aussi équivalentes à

(c") <u>on a</u> $\sup|-n\omega| = 0$ <u>pour</u> $n \geq 0$,

c'est-à-dire (cf. No 1, formule (2)) :

$$(c''') \quad \dim|-n\omega| = \frac{1}{2}\, n(n+1)(9-r) = \frac{(3n+1)(3n+2)}{2} - 1 - r\,\frac{n(n+1)}{2}\ ,\quad n \geq 0$$

ou encore

(c"") <u>la dimension du système des courbes de degré</u> 3n <u>basée aux points de</u> Σ <u>avec multiplicité</u> n <u>se calcule par la formule usuelle</u>.

En particulier, on a alors $\dim|-\omega| = 9-r$, $\dim|-2\omega| = 3(9-r)$, $\dim|-3\omega| = 6(9-r)$.

7. RACINES EFFECTIVES ; CRITERE D'IRREDUCTIBILITE DES DIVISEURS EXCEPTIONNELS

Nous avons vu à l'exposé précédent que lorsque Σ est en position générale, aucune racine n'est la classe d'un diviseur effectif et tous les diviseurs exceptionnels sont irréductibles. Nous allons maintenant étudier les questions analogues lorsque Σ est seulement en position presque-générale. Notons d'abord que toutes les racines ne peuvent pas devenir effectives : seules les racines α telles que $\alpha.E_o \geq 0$, ou celles de la forme $E_i - E_j$ avec $i < j$ peuvent éventuellement être classe d'un diviseur effectif. Notons R_+ l'ensemble des racines précédentes ; c'est ce qu'on appelle un <u>système de racines positives</u> :

<u>Lemme 7</u> : <u>On a</u> $(R_+ + R_+) \cap R \subset R_+$, $R_+ \cap (-R_+) = \emptyset$, $R = R_+ \cup (-R_+)$.

C'est clair, soit directement, soit sur la table des racines donnée à l'exposé précédent.

Si $\alpha = (a_o; a_1, \ldots, a_r) \in R$, on a aussitôt (cf. table)

$$(\alpha \in R_+) \Leftrightarrow (a_1 + 2a_2 + \ldots + r\, a_r > 0) \quad .$$

Nous utiliserons le lemme algébrique suivant, valable dans la situation $(P_r, \omega_r, .)$, $r \leq 8$, étudiée à l'exposé précédent :

<u>Lemme 8</u> : a) <u>Si</u> $\alpha, \alpha' \in R_r$ <u>avec</u> $\alpha \neq \pm\alpha'$, <u>alors</u> $|\alpha.\alpha'| \leq 1$. <u>Si</u> $\alpha, \alpha' \in R_r$ <u>et</u>

$\alpha.\alpha' = 1$, alors $\alpha + \alpha' \in R_r$.

b) Si ξ, $\xi' \in I_r$ et $\xi \neq \xi'$, alors $0 \leq \xi.\xi' \leq 3$.

c) Soient $\xi \in I_r$ et $\alpha \in R_r$. Alors $|\xi.\alpha| \leq 2$. Si $\xi.\alpha = \pm 2$, alors $r = 8$ et $\xi = \mp\alpha - \omega_8$; si $\xi.\alpha = -1$, alors $\xi = \alpha + \xi'$, avec $\xi' \in I_r$ et $\xi.\xi' = 0$.

On peut évidemment supposer $r = 8$.

Si α, $\alpha' \in R_8$ et $\alpha \neq -\alpha'$, alors $\omega_8.(\alpha + \alpha') = 0$ et $\alpha + \alpha' \neq 0$, donc $(\alpha + \alpha').(\alpha + \alpha') < 0$, ce qui implique $\alpha.\alpha' \leq 1$. Si $\alpha . \alpha' = 1$, alors $(\alpha + \alpha').(\alpha + \alpha') = 2$, donc $\alpha + \alpha' \in R_8$. Enfin, changeant α' en $-\alpha'$, on obtient $\alpha.\alpha' \geq -1$, si $\alpha \neq \alpha'$, donc $|\alpha.\alpha'| \leq 1$ si $\alpha \neq \pm\alpha'$. Si ξ, $\xi' \in I_8$, alors $\xi + \omega_8$ et $\xi' + \omega_8$ sont deux racines ; si $\xi \neq \xi'$, on a donc $-1 \leq (\xi + \omega_8) . (\xi' + \omega_8) \leq 2$, d'où aussitôt b), puisque $\xi.\omega_8 = \xi'.\omega_8 = -\omega_8.\omega_8 = 1$. De même, dans le cas c), on a $\xi.\alpha = (\xi + \omega_8).\alpha$, donc $|\xi.\alpha| \leq 2$. Si $\xi.\alpha = \pm 2$, alors $\xi = \pm\alpha + \omega_8$. Si $\xi.\alpha = -1$, alors $(\xi - \alpha).\omega_8 = -1$ et $(\xi - \alpha)(\xi - \omega) = -1$, donc $\xi - \alpha \in I_8$.

Ensuite un lemme "géométrique" :

<u>Lemme 9</u> : ($r \leq 8$, <u>aucune hypothèse sur</u> Σ). <u>Si</u> D <u>est un diviseur effectif irréductible tel que</u> $D.\omega = -1$, <u>alors soit</u> D <u>est exceptionnel</u>, <u>soit</u> $r = 8$ <u>et</u> $cl(D) = -\omega_8$.

D'abord, puisque le genre de D est $1 + \frac{1}{2}(D.D + D.\omega)$ on a forcément $D.D \geq -1$ et D.D impair. Par ailleurs, prenant $u = cl(D) \in Pic(X(\Sigma)) = P_r \subset P_8$, on a $(u + \omega_8).\omega_8 = 0$, donc soit $u = -\omega_8$, soit $(u + \omega_8).(u + \omega_8) < 0$ (exposé précédent, proposition 1 a)). Mais cette dernière relation s'écrit aussi $u.u < -2u.\omega_8 - \omega_8^2 = 1$; comme $-1 \leq u.u < 1$ et que u.u est impair, on a $u.u = -1$ et u est exceptionnel.

<u>Théorème 2</u> : <u>Supposons</u> Σ <u>en position presque générale</u>. <u>Soient</u> R_e <u>l'ensemble des racines qui sont effectives et</u> R_i <u>l'ensemble des racines qui sont effectives et "irréductibles"</u> (<u>i.e. classes de courbes irréductibles sur</u> $X(\Sigma)$).

a) <u>Chaque élément</u> $\alpha \in R_i$ <u>est la classe d'un unique diviseur effectif</u> $X(\Sigma)$, <u>qui est une courbe lisse de genre</u> 0. <u>La partie</u> R_i <u>de</u> $Pic(X(\Sigma))$ <u>est libre</u>. <u>Tout diviseur effectif</u> D <u>tel que</u> $D.\omega = 0$ <u>est uniquement déterminé par sa classe dans</u> $Pic(X(\Sigma))$, <u>qui est combinaison linéaire à coefficients</u> ≥ 0 <u>des éléments de</u> R_i.

b) $R' = R_e \cup -R_e$ <u>est une partie close et symétrique de</u> R (i.e. $R' = -R$ <u>et</u> $(R' + R') \cap R \subset R'$), <u>et</u> R_i <u>est une base de</u> R' (i.e. <u>tout élément de</u> R_e <u>est combinaison linéaire à coefficients entiers</u> ≥ 0 <u>des éléments de</u> R_i <u>et ceci de façon unique</u>).

c) <u>Pour tout élément exceptionnel</u> ξ, <u>on a les trois possibilités suivantes qui s'excluent mutuellement</u> :

1) ξ <u>est irréductible</u> (i.e. ξ <u>est la classe d'un diviseur effectif irréductible</u>, <u>qui est alors l'unique diviseur effectif de classe</u> ξ) ;

2) <u>il existe un élément exceptionnel irréductible</u> ξ' <u>et des éléments</u> $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ <u>de</u> R_i <u>tels que</u> $\xi = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \xi'$;

3) <u>on a</u> $r = 8$, <u>et il existe</u> $\alpha \in R_e$ <u>telle que</u> $\xi = \alpha - \omega_8$.

Pour $\alpha \in R_i$, soit C un diviseur effectif irréductible de classe α. Alors $g(C) = 1 + \frac{1}{2}\,\alpha.(\alpha - \omega) = 0$, donc C est une courbe lisse de genre 0. Pour tout diviseur effectif C' de classe α, on a $C.C' = \alpha.\alpha < 0$, donc $C' = C + C''$ où C'' est effectif et de classe 0, et enfin $C' = C$. Par abus de langage, nous noterons α l'unique diviseur effectif de classe α, $\alpha \in R_i$. Pour tout diviseur effectif D tel que $D.\omega = 0$, toutes les composantes irréductibles de D appartiennent à R_i : si $D = \Sigma\, D_i$, les D_i irréductibles, alors $0 = D.\omega = \Sigma\, D_i.\omega$; comme $D_i.\omega \le 0$ (théorème 1), on a $D_i.\omega = 0$ et D_i est une racine (th. 1), donc appartient à R_i. Enfin, pour $\alpha,\ \beta \in R_i$, on a $\alpha.\beta \ge 0$ si $\alpha \neq \beta$, et $\alpha.\alpha = -2$; de plus si $\alpha = (a_0;a_1,\ldots,a_r) \in R_i$, alors $a_1 + 2a_2 + \ldots + r\,a_r > 0$; le lemme 3 de Bourbaki, Lie, ch. V, § 3, No 5, entraîne alors que R_i est une partie libre de $\mathrm{Pic}(X(\Sigma))$, ce qui achève de démontrer a).

Pour prouver b), il suffit de prouver que si $\alpha \in R_e$, $\beta \in R_e$ et $\beta-\alpha \in R$, alors $\beta-\alpha \in R'$. Mais on a $\alpha.\beta = \alpha.(\beta - \alpha) + \alpha.\alpha = \alpha.(\beta - \alpha) - 2 < 0$ (lemme 8), donc α et β ont une composante irréductible commune $\gamma \in R_i$, et on a $\beta - \alpha = (\beta - \gamma) - (\alpha - \gamma)$, avec $\beta - \gamma$, $\alpha - \gamma \in R_e$; on conclut sans difficultés par récurrence.

Démontrons c). Soit D un diviseur effectif exceptionnel sur $X(\Sigma)$. Si D n'est pas irréductible, il s'écrit $D = \sum_{i=1}^{n} D_i$ avec D_i effectif irréductible. Comme $\Sigma\, D_i.\omega = -1$ et $D_i.\omega \ge 0$, on a quitte à permuter l'ordre des indices $D_1.\omega = -1$, $D_i.\omega = 0$ pour $i > 1$. Alors les D_i sont des racines et D_1 est soit exceptionnel, soit de classe $-\omega_8$ (avec $r = 8$) d'après le lemme 9. Dans ce dernier cas, $D_2 + \ldots + D_n = \xi + \omega_8$ est effectif ; comme c'est une racine, on a $\xi + \omega_8 \in R_e$. Cela démontre c).

<u>Corollaire</u> : <u>Soit</u> ξ <u>un élément exceptionnel</u>. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> : (a) ξ <u>est irréductible</u> ; (b) <u>pour tout</u> $\alpha \in R_i$, <u>on a</u> $\xi.\alpha \ge 0$; (c) <u>pour tout</u> $\alpha \in R_e$, <u>on a</u> $\xi.\alpha \ge 0$.

Les implications (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) sont claires. Supposons (c) vérifié et ξ non irréductible. Alors on est dans l'un des cas 2) ou 3) du théorème précédent, partie c) ; dans le cas 2), on a $-1 = \xi.\xi = \alpha_1.\xi + \ldots + \alpha_n.\xi + \xi.\xi' \ge 0$

(lemme 8), d'où une contradiction ; dans le cas 3), on a $-1 = \xi.\xi = \xi.\alpha - \xi.\omega_8 \geq 0$, d'où aussi une contradiction.

8. EXEMPLES

a) Si Σ est en position générale, on a $R_e = \emptyset$, et on retrouve le fait que tous les éléments exceptionnels sont irréductibles.

b) Soit D une droite de X. Prenons $x_1 \in D$, $x_2 \in \hat{D} \cap E_1 = (D - E_1) \cap E_1$, $x_3 \in \hat{D} \cap E_2 = (D - E_1 - E_2) \cap E_2$, puis $x_4, \ldots$ sur $E_3, \ldots$ hors des transformés stricts de D et des E_i antérieurs. Alors Σ est en position presque générale, et les racines $\alpha_1 = D - E_1 - E_2 - E_3$, $\alpha_2 = E_1 - E_2, \ldots, \alpha_r = E_{r-1} - E_r$ sont effectives, de sorte que $R_e = R_+$ et $R' = R$.

c) Prenons $r = 6$, et prenons pour Σ l'ensemble des 6 sommets d'un quadrilatère complet non aplati de X. Alors les quatre côtés donnent 4 racines effectives irréductibles, deux à deux orthogonales, et on a $\mathrm{Card}(R_e) = \mathrm{Card}(R_i) = 4$, donc R' est de type $(A_1)^4$.

d) Prenons $r = 6$, prenons x_1, x_2, x_3 sur une droite D de X et x_4, x_5, x_6 au-dessus de x_1, x_2 et x_3 respectivement mais non sur D. Alors R_i est formé de $\hat{D} = E_o - E_1 - E_2 - E_3$ et de $E_i - E_{i+3}$, $i = 1,2,3$, et R' est de type D_4.

9. CONTRACTIONS

Soient d'abord Z une surface projective lisse et $\xi \in \mathrm{Pic}(Z)$ un élément exceptionnel ($\xi.\xi = -1$, $\xi.\omega_Z = -1$). Si ξ est effectif et irréductible, on peut le contracter, et obtenir une surface projective et lisse Z/ξ. Le groupe $\mathrm{Pic}(Z/\xi)$ s'identifie naturellement à l'orthogonal de ξ dans Pic(Z), et $\omega_{Z/\xi}$ à l'élément $\omega_Z - \xi$ de cet orthogonal ; les éléments exceptionnels de $\mathrm{Pic}(Z/\xi)$ sont donc les éléments exceptionnels de Pic(Z) orthogonaux à ξ.

On appellera suite exceptionnelle contractable de Pic(Z) une suite $\underline{\underline{\xi}} = (\xi_1, \ldots, \xi_s)$ d'éléments exceptionnels deux à deux orthogonaux tels que, pour $i = 1, \ldots, s$, l'élément exceptionnel ξ_i de $\mathrm{Pic}(Z/\xi_1/\ldots/\xi_{i-1})$ soit effectif et irréductible (ce qui permet de définir $Z/\xi_1/\ldots/\xi_i$) ; on note alors $Z/\underline{\underline{\xi}}$ la surface $Z/\xi_1/\ldots/\xi_s$.

Nous supposons désormais que la surface Z est rationnelle ; alors, d'après un théorème classique, la longueur des suites exceptionnelles contractables est bornée et pour toute suite contractable maximale $\underline{\underline{\xi}}$, $Z/\underline{\underline{\xi}}$ est isomorphe à $\mathbb{P}^2$, ou à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, ou à l'une des surfaces F_n, $n > 1$.

Disons que Z est "de type négatif" (resp. "de type strictement négatif") si $\omega_Z \cdot \omega_Z > 0$ et si, pour tout diviseur effectif D sur Z, on a $D.\omega \leq 0$ (resp. $D.\omega < 0$). Alors :

a) $X(\Sigma)$ est de type négatif (resp. strictement négatif) si et seulement si $r \leq 8$ et Σ est en position presque générale (resp. générale),

b) si Z est de type négatif (resp. strictement négatif), alors $Z/\underline{\underline{\xi}}$ l'est aussi pour toute suite exceptionnelle contractable $\underline{\underline{\xi}}$ de Pic(Z),

c) si $Z = \mathbb{P}^2$ ou $Z = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, Z est de type strictement négatif et Pic(Z) ne contient aucun élément exceptionnel,

d) pour $n > 1$, F_n n'est pas de type négatif.

Proposition 3 : *Soit Z une surface de type négatif* (resp. *strictement négatif*) *non isomorphe à* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$; *posons* $r = \mathrm{rg}\,\mathrm{Pic}(Z) - 1$.

1) *Z est isomorphe à une surface* $X(\Sigma)$, *où X est isomorphe à* $\mathbb{P}^2$ *et où* Σ *est en position presque générale* (resp. *générale*), *donc* $r \leq 8$.

2) *Soit* $\underline{\underline{\xi}}$ *une suite exceptionnelle contractable sur Z. Alors*

2.1) *on a* Card $(\underline{\underline{\xi}}) \leq r$; *si* $\underline{\underline{\xi}}$ *a* r *éléments*, $Z/\underline{\underline{\xi}}$ *est isomorphe à* $\mathbb{P}^2$,

2.2) *si* Card $(\underline{\underline{\xi}}) \neq r-1$, $\underline{\underline{\xi}}$ *est contenu dans une suite exceptionnelle contractable à* r *éléments*,

2.3) *si* Card$(\underline{\underline{\xi}}) = r-1$, *et si* $\underline{\underline{\xi}}$ *est maximale*, *alors* $Z/\underline{\underline{\xi}}$ *est isomorphe à* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Soit en effet $\underline{\underline{\xi}}$ une suite exceptionnelle contractable maximale. Alors $Z/\underline{\underline{\xi}}$ est isomorphe à $\mathbb{P}^2$ ou à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ d'après b), c), d) ; dans le premier cas Card$(\underline{\underline{\xi}}) = r$; dans le second cas Card$(\underline{\underline{\xi}}) = r-1$. Traitons ce second cas ; puisque Z n'est pas isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, on a $r-1 > 0$; considérons $Z/(\xi_1, \ldots, \xi_{r-2}) = Z'$. Alors $Z'/\xi_r \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, donc Z' s'obtient en éclatant un point dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, ou encore, comme il est bien connu, en éclatant deux points dans $\mathbb{P}^2$; il existe donc ξ', $\xi'' \in \mathrm{Pic}(Z') \subset \mathrm{Pic}(Z)$ tel que $(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \xi', \xi'')$ soit une suite contractable à r éléments.

La proposition en résulte immédiatement.

Soit donc Z une surface de type négatif (donc isomorphe à une surface $\mathbb{P}^2(\Sigma)$, où Σ est en position presque générale). On pose comme à l'exposé II :

$$P = \mathrm{Pic}(Z)\ ,\ \omega = \omega_Z \in \mathrm{Pic}(Z)\ ,\ r = \mathrm{rg}(P) - 1\ ,$$

$$I = \{\xi \in P\ ,\ \xi.\xi = -1\ ,\ \xi.\omega = -1\}\ ,$$

$$R = \{\alpha \in P\ ,\ \alpha.\alpha = -2\ ,\ \alpha.\omega = 0\}\ ,$$

$$W = \mathrm{Aut}(\mathbb{P},\omega,.)\ .$$

Rappelons (prop. II.4) que W opère simplement transitivement dans l'ensemble S des suites $\underline{\underline{\xi}} = (\xi_1,\dots,\xi_r)$ d'éléments de I deux à deux orthogonaux. Si $Z = X(\Sigma)$, S possède un élément privilégié, qui est la suite $\xi_o = (E_r,\dots,E_1)$, et qui est <u>contractable</u>.

Pour $\underline{\underline{\xi}} \in S$, soit $R(\underline{\underline{\xi}})$ l'ensemble des $\alpha \in R$ tels que $(\alpha.\xi_1,\dots,\alpha.\xi_r)$ soit ≥ 0 pour l'ordre lexicographique : $\alpha.\xi_1 > 0$ <u>ou</u> $\alpha.\xi_1 = 0$ <u>et</u> $\alpha.\xi_2 > 0$ <u>ou</u> ... Lorsque $Z = X(\Sigma)$ et $\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}_o$, $R(\underline{\underline{\xi}})$ est l'ensemble R_+ du No précédent. Par conséquent, par opération de W, on a :

<u>Proposition 4</u> : <u>Pour tout</u> $\underline{\underline{\xi}} \in S$, $R(\xi)$ <u>est un système de racines positives de</u> R. <u>On obtient ainsi</u>, <u>une fois et une seule</u>, <u>tous les systèmes de racines positives de</u> R.

Supposons de plus que les conditions du th. 1 soient satisfaites pour Z ; on a alors une partie R_e de T formée des racines effectives. Alors :

<u>Théorème 3</u> : <u>Pour que</u> $\underline{\underline{\xi}} \in S$ <u>soit contractable</u> , <u>il faut et il suffit que</u> $R_e \subset R(\xi)$.

<u>Exemples</u> : a) Si $R_e = \emptyset$, tout $\underline{\underline{\xi}}$ est contractable.

b) Si on prend $Z = X(\Sigma)$, et $\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}_o$, alors $\underline{\underline{\xi}}$ est contractable, et on retrouve le fait que $R_e \subset R_+$. De plus, si $R_e = R_+$, $\underline{\underline{\xi}}_o$ est l'unique suite contractable.

Démontrons maintenant le théorème. Pour que $\underline{\underline{\xi}}$ soit contractable, il faut et il suffit que ξ_1 soit irréductible, c'est-à-dire (corollaire au théorème 2), que $\xi_1.\alpha \geq 0$ pour $\alpha \in R_e$, que ξ_2 soit irréductible dans Z/ξ_1, c'est-à-dire que $\xi_2.\alpha \geq 0$ pour tout $\alpha \in R_e$ tel que $\xi_1.\alpha = 0$, que ξ_3 ... <u>etc</u>.
