

# SÉMINAIRE SUR LES SINGULARITÉS DES SURFACES

## ÉCOLE POLYTECHNIQUE

H. PINKHAM

### Singularités de Klein - II

*Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 3, p. 1-11*

<[http://www.numdam.org/item?id=SSS\\_1976-1977\\_\\_\\_\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A4_0)>

© Séminaire sur les singularités des surfaces  
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire sur les singularités des surfaces implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L E S   S I N G U L A R I T E S

D E S   S U R F A C E S

SINGULARITES DE KLEIN - II

H.   PINKHAM

26 Octobre 1976



Dans cet exposé nous résolvons toutes les singularités de Klein. En fait, la méthode employée permet de résoudre toutes les singularités décrites dans la généralisation 3 de l'exposé précédent, donc par le résultat de Dolgachev toutes les singularités normales avec action  $\mathbb{C}^*$ .

Nous commençons par résoudre les singularités quotients de  $\mathbb{C}^2$  par un groupe fini cyclique. Elles admettent une action de  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  ; ce sont donc des éventails (toroidal embeddings dans la terminologie de [11]). La méthode que nous utilisons est une réalisation géométrique de la résolution par éventails donnée dans [11], p. 35. Elle est tirée de Fujiki [9]. Dans la seconde partie de l'exposé nous utilisons la résolution des quotients cycliques pour résoudre les singularités de Klein (en fait une classe beaucoup plus large : voir plus bas).

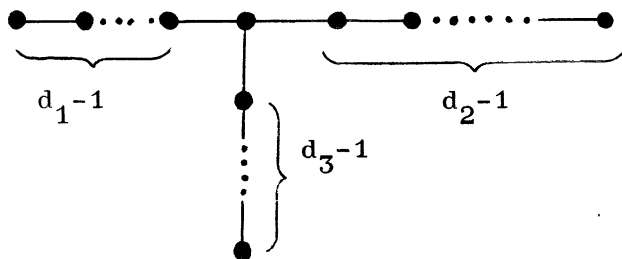
Rappelons que par résolution d'un point  $x \in X$ , singularité isolée de  $X$  nous entendons un morphisme birationnel  $f: \tilde{X} \rightarrow X$  tel que  $\tilde{X}$  soit lisse et que  $f$  soit un isomorphisme sur  $f^{-1}(X \setminus x)$ . La fibre  $f^{-1}(x)$  est le diviseur exceptionnel. On note par  $\cdot$  la forme intersection sur  $\tilde{X}$ .

Au diviseur exceptionnel on associe un graphe, le graphe dual pondéré : soient  $E_i$  les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel. A  $E_i$  correspond un sommet  $v_i$  du graphe, pondéré par  $E_i \cdot E_i \cdot v_i$  et  $v_i$  et  $v_j$  sont liés par un nombre d'arêtes égal à  $E_i \cdot E_j$ .

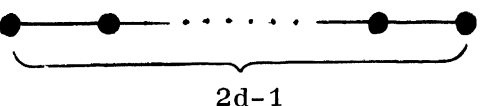
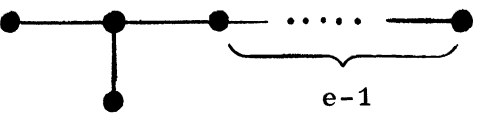
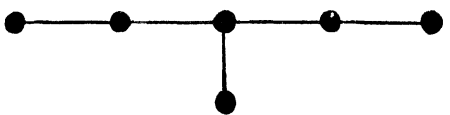
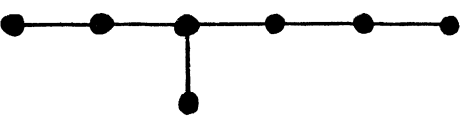
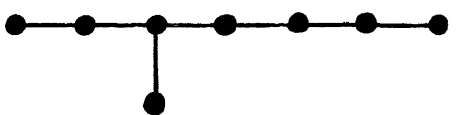
Théorème : Etant donné une singularité de Klein  $X$  de groupe  $G$ , il existe une résolution  $f: \tilde{X} \rightarrow X$  telle que :

1) toutes les composantes irréductibles  $E_i$  du diviseur exceptionnel sont isomorphes à  $\mathbb{P}^1$ , s'intersectent transversalement, et  $E_i \cap E_j \cap E_k = \emptyset$ ,  $i \neq j \neq k$  ;

2) tous les poids du graphe dual sont  $-2$  (il s'agit donc de la résolution minimale) et le graphe lui-même est



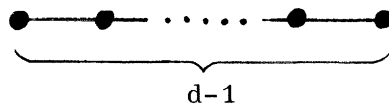
où les  $d_j$  sont les indices de ramification de l'action de  $G$  sur  $\mathbb{P}^1$  (lorsque  $G$  est cyclique il faut bien sûr prendre  $d_3 = 1$ ). On a donc le tableau

| Groupe    | Ordre | $d_i$       | Graphe                                                                              | Nom        |
|-----------|-------|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Cyclique  | $d$   | $d \ d$     |   | $A_{2d-1}$ |
| Diédral   | $2e$  | $2 \ 2 \ e$ |   | $D_{e+2}$  |
| Tétraèdre | $12$  | $2 \ 3 \ 3$ |   | $E_6$      |
| Octaèdre  | $24$  | $2 \ 3 \ 4$ |   | $E_7$      |
| Icosaèdre | $60$  | $2 \ 3 \ 5$ |  | $E_8$      |

Pour obtenir toutes les singularités rationnelles de multiplicité 2 il faut ajouter à cette liste la singularité quotient cyclique  $X_{d,d-1}$ ,  $d$  impair. C'est le quotient de  $\mathbb{C}^2$  par le groupe cyclique d'ordre  $d$  agissant par agissant par  $(u,v) \rightarrow (\varepsilon u, \varepsilon^{-1} v)$ ,  $\varepsilon = e^{2\pi i/d}$ . L'équation de  $X_{d,d-1}$  est

$$Z^2 + Y^2 + X^d = 0$$

et on trouvera une résolution de  $X_{d,d-1}$  satisfaisant 1) du théorème et de graphe dual (tous les poids sont -2)



C'est donc  $A_{d-1}$ . On peut caractériser toutes ces singularités en notant que ce sont toutes les singularités quotients de  $\mathbb{C}^2$  par un sous-groupe fini de  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Dans d'autres exposés nous montrerons le lien entre ces singularités et le groupe de Weyl correspondant.

## 1. SINGULARITES QUOTIENTS D'UN GROUPE CYCLIQUE

Soit  $G_n$  le groupe cyclique d'ordre  $n$ . On fait agir un générateur de  $G_n$  sur l'anneau de polynômes  $\mathbb{C}[x_1, x_2]$  par  $(x_1, x_2) \rightarrow (\zeta x_1, \zeta^q x_2)$  où  $\zeta = e^{2\pi i/n}$  et  $q$  est premier à  $n$ ,  $q < n$ .

Soient  $X = \text{Spec } \mathbb{C}[x_1, x_2]$  et  $X_{nq}$  le quotient de  $X$  par  $G$ . On appelle  $X_{nq}$  la singularité quotient cyclique de type  $(n, q)$ .

Nous allons construire un morphisme birationnel  $W \rightarrow X_{nq}$  qui est un isomorphisme en dehors du point singulier de  $X_{nq}$  et tel que le diviseur exceptionnel  $E_1$  soit isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ . Si  $q=1$ ,  $W$  est lisse et est donc une résolution de  $X_{nq}$ . Autrement  $W$  a un seul point singulier au voisinage duquel  $W$  est isomorphe à  $X_{qr}$  où  $n = b_1 q - r$ , où  $0 < r < q$ . En répétant cette construction à  $X_{qr}$  on arrive évidemment à une résolution de  $X_{nq}$ .

1. Soient  $Y = \text{Spec } \mathbb{C}[y_1, y_2]$  et  $f: Y \rightarrow X$  le morphisme donné par  $x_1 = y_1$ ,  $x_2 = y_2^q$ . On peut considérer  $f: Y \rightarrow X$  comme le quotient de  $Y$  par le groupe  $G_q$  cyclique d'ordre  $q$  agissant par  $(y_1, y_2) \rightarrow (y_1, \eta y_2)$ ,  $\eta = e^{2\pi i/q}$ . Il est clair que l'action de  $G_n$  sur  $X$  se relève en une action sur  $Y$  donnée par  $(y_1, y_2) \rightarrow (\zeta y_1, \zeta y_2)$  et qu'elle commute à l'action de  $G_q$ .

2. Nous éclatons l'origine de  $Y$  : soit  $\tilde{Y}$  la clôture dans  $Y \times \mathbb{P}^1$  du graphe du morphisme naturel  $Y - (0,0) \rightarrow \text{Proj } \mathbb{C}[y_1, y_2] = \mathbb{P}^1$ . Notons  $u_1$  et  $u_2$  des coordonnées inhomogènes sur  $\mathbb{P}^1$ ,  $u_1 = y_2/y_1$ ,  $u_2 = y_1/y_2$ . Posons  $\Delta_i = \{p \in \mathbb{P}^1 \mid y_i(p) \neq 0\}$  et  $\tilde{Y}_i = \tilde{Y} \cap (Y \times \Delta_i)$ . Alors  $\tilde{Y}_1$  est donné dans  $Y \times \Delta_1$  par  $y_1 u_1 = y_2$  et  $\tilde{Y}_2$  dans  $Y \times \Delta_2$  par  $y_2 u_2 = y_1$ .

$\tilde{Y} \rightarrow Y$  est un isomorphisme sauf au-dessus de  $(0,0)$  où la fibre est une courbe  $E$ , le diviseur exceptionnel, qui est isomorphe à  $\mathbb{P}^1$  comme on voit facilement.  $E$  a pour équation  $y_i = 0$  dans  $\tilde{Y}_i$ .

$\tilde{Y}_i$  est isomorphe au plan affine ; on peut choisir  $u_i$  et  $y_i$  pour coordonnées. On a les formules de recollement  $u_1 = 1/u_2$  et  $u_2 y_2 = y_1$ . Donc on peut considérer  $\tilde{Y}$  comme le fibré en droites affine sur  $E = \mathbb{P}^1$  dont le faisceau des sections est  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ . La self intersection de  $E$  dans  $\tilde{Y}$  est  $-1$ .

3. On peut relever l'action de  $G_n$  et  $G_q$  sur  $\tilde{Y}$  : appelons  $Z$  le quotient de  $\tilde{Y}$  par  $G_n$ .

$G_n$  agit sur  $\tilde{Y}_1$  :  $(u_1, y_1) \mapsto (u_1, \zeta y_1)$ . Soit  $Z_1$  le quotient.

$G_n$  agit sur  $\tilde{Y}_2$  :  $(u_2, y_2) \mapsto (u_2, \zeta y_2)$ . Soit  $Z_2$  le quotient.

Alors  $Z_1$  et  $Z_2$  sont lisses, et isomorphes au plan affine avec coordonnées  $(u_1, z_1 = y_1^n)$  et  $(u_2, z_2 = y_2^n)$  respectivement.

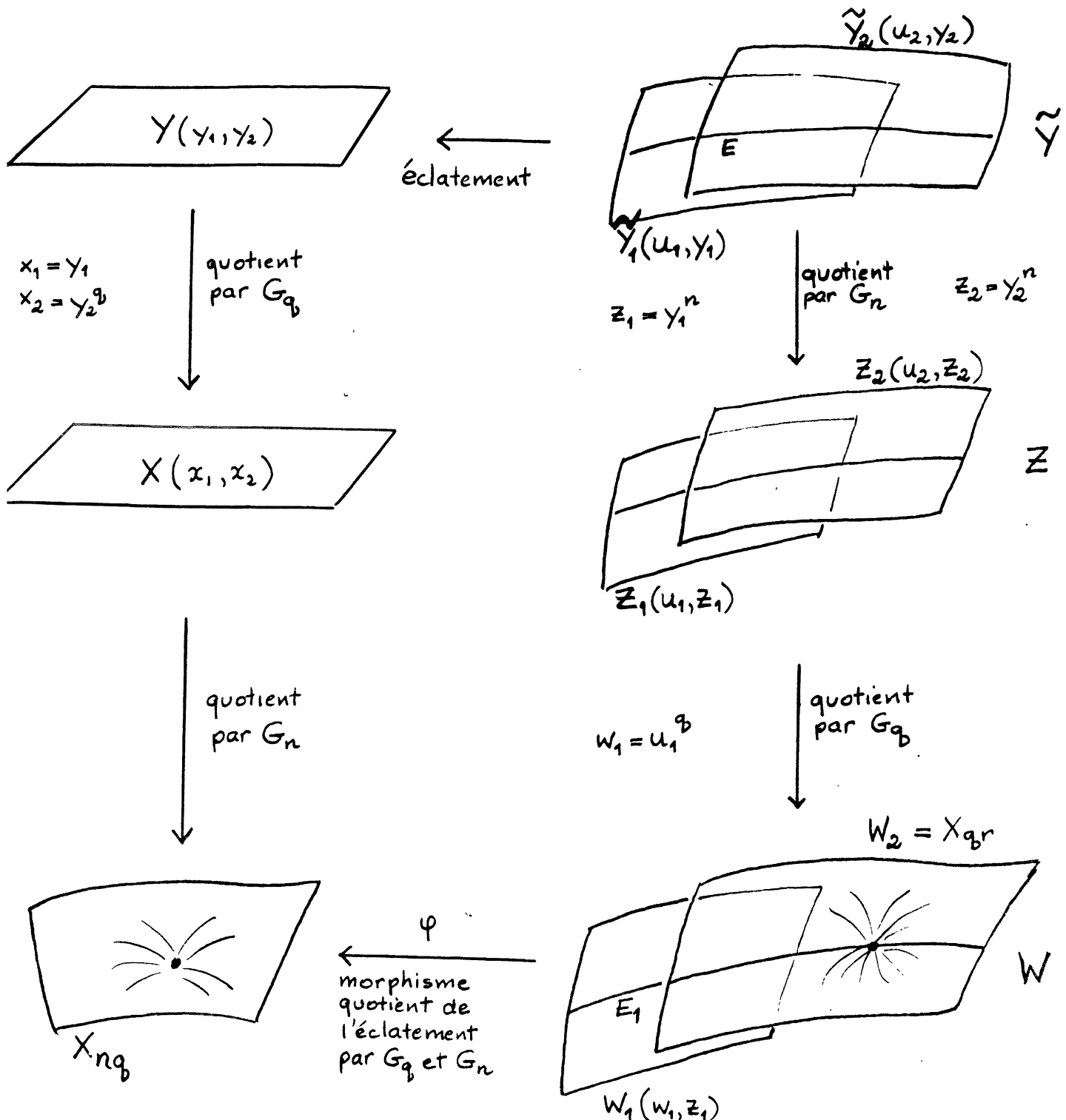
$G_q$  agit sur  $\tilde{Y}_1 : (u_1, y_1) \mapsto (\eta u_1, y_1)$   
 $\tilde{Y}_2 : (u_2, y_2) \mapsto (\eta^{-1} u_2, \eta y_2)$ .

4. Donc  $G_q$  agit sur  $Z$  : appelons  $W$  le quotient de  $Z$  par  $G_q$ .

$G_q$  agit sur  $\tilde{Z}_1 : (u_1, z_1) \mapsto (\eta u_1, z_1)$ . Soit  $W_1$  le quotient.

$Z_2 : (u_2, z_2) \mapsto (\eta^{-1} u_2, \eta^n z_2)$ . Soit  $W_2$  le quotient.

Il est clair que  $W_1$  est lisse, isomorphe à  $\mathbb{C}^2$  avec coordonnées  $w_1 = u_1^q$  et  $z_1$ .  
 $W_2$  par contre peut être singulier. Si  $q=1$ , alors  $W$  est non singulier. Autrement posons  $n = b_1 q - r$ ,  $0 \leq r < q$ . Alors  $W_2$  est singulier, et possède une singularité quotient cyclique de type  $(q, r)$ .

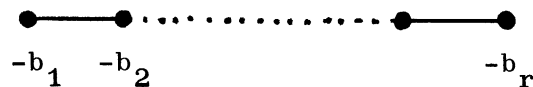


5. D'autre part on a un morphisme  $\varphi : W \rightarrow X_{n,q}$ , qui est un isomorphisme sauf au-dessus de l'origine. En effet ce morphisme est simplement le quotient  $\tilde{Y} \rightarrow Y$  par les deux groupes  $G_n$  et  $G_q$  (dans un ordre différent, ce qui est sans importance puisque les actions commutent). Soit  $E_1$  le diviseur exceptionnel de  $\varphi$ . On appelle  $W$  le premier cran de la résolution de  $X_{nq}$ .

Recommençons l'opération sur  $W_2 = X_{qr}$  et ainsi de suite. Eventuellement nous obtiendrons une résolution  $\tilde{X}_{nq} \rightarrow X_{nq}$ .

Posons  $\frac{n}{q} = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{b_r}}}$ ,  $b_i \geq 2$ .

Théorème : Toutes les composantes du diviseur exceptionnel de  $\tilde{X}_{nq}$  sont isomorphes à  $\mathbb{P}^1$  et s'intersectent transversalement. Le graphe dual pondéré est



Puisque tous les  $b_i \geq 2$  la résolution est minimale.

Démonstration : Que les composantes du diviseur exceptionnel sont rationnelles est clair.

Montrons d'abord que lorsqu'on résout  $W_2 = X_{q,r}$  comme on a fait plus tôt pour  $X_{nq}$  le transformé strict de  $E_1$  est lisse et intersecte  $E_2$ , le nouveau diviseur exceptionnel, transversalement.

Répétons la construction ci-dessus à  $X_{qr}$  : remplaçons  $u$  par  $q$ ,  $q$  par  $r$  et appelons les quantités correspondantes par le même nom suivi d'un prime. On a donc  $x'_1 = u_2$ ,  $x'_2 = z_2$  et  $G_q$  opère sur  $X' = Z_2$  par  $(u_2, z_2) \mapsto (\eta u_2, \eta^r z_2)$   
donc par  $(x'_1, x'_2) \mapsto (\eta x'_1, \eta^r x'_2)$ .

L'image inverse de  $E_1$  dans  $Z_2$  est donnée par  $z_2 = 0$ , donc par  $x'_2 = 0$  dans la nouvelle notation. Donc pour savoir si l'image de  $E_1$  est lisse dans le second cran de la résolution, il suffit de voir que le transformé (strict) de  $(x_2 = 0)$  est lisse dans  $W$ .  $x_2 = 0$  donne  $y_2^q = 0$  dans  $Y$ , donne  $u_1^q = 0$  dans  $\tilde{Y}_1$ , donne  $u_1^q = 0$  dans  $Z_1$ , donne  $w_1 = 0$  dans  $W_1$  et est donc lisse.

D'autre part pour savoir si  $E_1$  et  $E_2$  s'intersectent transversalement, il suffit de voir que  $(x_2 = 0)$  et  $E_1$  le font dans  $W_1$ . Mais  $W_1$  a pour coordonnées  $(w_1, z_1)$ . Le transformé de  $(x_2 = 0)$  a pour équation  $w_1 = 0$  comme on a vu.  $E_1$  a pour équation  $z_1 = 0$ . On a gagné.

Finalement il faut calculer les self-intersections des diviseurs exceptionnels. Il suffit, bien entendu, de montrer qu'au second cran de la résolution la surface obtenue est lisse le long du transformé strict de  $E_1$  (que nous appelons  $\tilde{E}_1$ ), et que  $\tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_1 = -b_1$ . Nous avons déjà établi le premier

point. En remontant d'un cran, on voit que  $\tilde{E}_1$  est contenu dans  $W_1$  et  $W'_1$ . Les coordonnées de ces deux espaces affines sont  $(w_1, z_1)$  et  $(w'_1, z'_1)$ .

Par définition  $z'_1 = (y'_1)^q = (x'_1)^q = (u_2)^q$ . Puisque  $w_1 = u_1^q$ , on a

$$\boxed{w_1 = 1/z'_1} \quad .$$

D'autre part

$$\begin{aligned} w'_1 &= (u'_1)^r = \frac{(y'_2)^r}{(y'_1)^r} = \frac{x'_2}{(x'_1)^r} = \frac{z_2}{(u'_1)^r} \\ &= \frac{y_2^{n+r}}{y_1^r} = u_1^{n+r} y_1^n = (u_1^q)^{b_1} y_1^n \quad . \end{aligned}$$

Mais  $u_1^q = w_1$  et  $y_1^n = z_1$ , donc

$$\boxed{w'_1 = w_1^{b_1} z_1} \quad .$$

Remarquons finalement que  $\tilde{E}_1$  est donné par  $z_1 = 0$  dans  $W_1$ ,  
et  $w'_1 = 0$  dans  $W'_1$ .

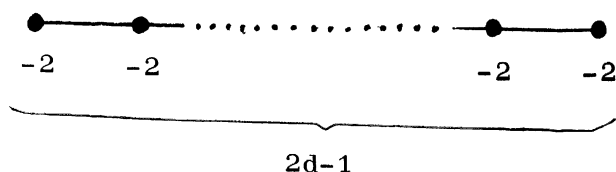
Les deux formules encadrées veulent bien dire que  $\tilde{E}_1 \cdot \tilde{E}_1 = -b_1$ , ce qui termine la démonstration.

## 2. SINGULARITES DE KLEIN

Remarquons que nous pouvons déjà disposer du cas  $G$  cyclique d'ordre  $d$ . En effet, nous avons vu que  $G'$  agit sur  $\mathbb{C}^2$  par  $(u, v) \mapsto (\varepsilon u, \varepsilon^{-1} v)$ ,  $\varepsilon = e^{\pi i/d}$ , donc la singularité est quotient cyclique de type  $(2d, 2d-1)$ . Comme

$$\frac{2d}{2d-1} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\ddots}}$$

le graphe pondéré est



De même on obtient la résolution de  $X_{d,d-1}$ ,  $d$  impair. Le théorème de l'introduction est donc démontré dans ces cas. Passons aux autres singularités de Klein.

En fait nous allons résoudre les singularités suivantes (il s'agit d'un cas particulier des singularités considérées dans la remarque 3 de I).

Soient  $C'$  une surface de Riemann compacte,  $G$  un groupe fini d'automorphismes de  $C'$ ,  $\pi: C' \rightarrow C = C'/G$  le morphisme quotient,  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , les points de ramification de  $\pi$  et  $d_i$  l'indice de ramification au point  $P_i$ . Soit  $D'$  un diviseur sur  $C'$  de degré positif, de la forme

$$D' = \pi^{-1}(D) - \sum_{i=1}^n \sum_{Q_i \rightarrow P_i} e_i Q_i ,$$

où  $e_i$  est premier à  $d_i$ , et  $e_i < d_i$ . Par définition  $D'$  est invariant par  $G$ , donc  $\mathcal{O}_{C'}(D')$  admet une action de  $G$  canonique. Soit  $F' = \mathbb{V}(\mathcal{O}_{C'}(-D'))$  le fibré affine associé à  $\mathcal{O}_{C'}(D')$ . La section nulle de  $F'$  que nous identifions à  $C'$ , a self intersection négative ; sa contraction donne

$$X' = \text{Spec} \bigoplus_{k \geq 0} H^0(C', \mathcal{O}_{C'}(kD'))$$

$G$  agit canoniquement sur  $F'$  et  $X'$ .

Soient  $F$  et  $X$  les quotients correspondants. L'image de  $C' \subset F'$  dans  $F$  est isomorphe à  $C$ , auquel nous l'identifions donc, de sorte que le morphisme quotient  $q: F' \rightarrow F$  induise  $\pi: C' \rightarrow C$ .

$X$  peut s'écrire

$$X = \text{Spec} \left( \bigoplus_{k \geq 0} H^0(C', \mathcal{O}_{C'}(kD')) \right)^G$$

ce qui peut aussi s'écrire

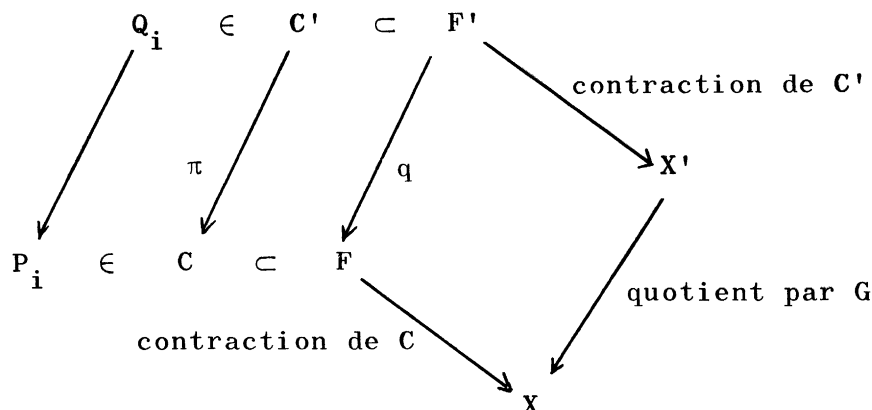
$$X = \text{Spec} \left( \bigoplus_{k \geq 0} H^0(C, \mathcal{O}_C(D^{(k)})) \right) ,$$

où  $D^{(k)}$  est le diviseur sur  $C$  qui s'écrit

$$D^{(k)} = kD - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{e_i k}{d_i} \right\} P_i .$$

Comme dans I on a posé  $\{a\} =$  le plus petit entier  $\geq a$ .

Nous allons résoudre la singularité  $X$ . On a le diagramme :



Remarquons que pour obtenir les singularités de Klein il suffit de prendre  $C' \approx \mathbb{P}^1$ ,  $e_i = d_i - 1$  et  $D$  un diviseur de degré 2 sur  $C \approx \mathbb{P}^1$ .

Nous allons étudier le résolution  $\tilde{F}$  de  $X$  obtenue par résolution minimale des singularités de  $F$ .

Lemme 1 : L'action de  $G$  sur  $F'$  est libre sauf aux points  $Q_i \in C'$ ,  $\pi(Q_i) = P_i$ , pour tout  $i$ . Le quotient  $F$  est donc lisse sauf aux points  $P_i$ . Au voisinage de  $P_i$ ,  $F$  est isomorphe à la singularité quotient cyclique de type  $(d_i, e_i)$ .

Preuve : Il faut d'abord expliciter l'action de  $G$  sur  $F'$ .

Recouvrons  $C'$  par des  $U_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , ouverts (de Zariski) affines et invariants par  $G$ , tels que  $P_i \in \pi(U_i)$  et  $P_j \notin \pi(U_i)$ ,  $i \neq j$ . Soit  $h_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O})$  une équation locale pour le diviseur  $\sum_{Q_i \rightarrow P_i} Q_i$ . Puisque  $d_i \sum_{Q_i \rightarrow P_i} Q_i = \pi^{-1}(P_i)$  on peut choisir

des  $h_i$  tels que  $h_i^{d_i}$  soit invariant par  $G$ . Donc si  $g \in G$  opère sur  $h_i$  par  $g(h_i) = a_{ig} h_i$ ,  $a_{ig}$  est une racine  $d_i$ -ième de l'unité. Soient  $f_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$  des fonctions de transition pour le faisceau inversible  $\mathcal{O}_{C'}(D')$ . Alors, à un facteur invariant par  $G$  près, on a  $f_{ij} = h_j^{e_j} / h_i^{e_i}$ . Donc  $f_{ij}$  transforme sous  $g \in G$  par  $g(f_{ij}) = a_{ig}^{e_i} f_{ij} a_{jg}^{-e_j}$  ce qui dit bien que les classes de  $\{f_{ij}\}$  et  $\{g(f_{ij})\}$  dans  $H^1(C', \mathcal{O}^*)$  sont les mêmes.

Soit  $t_i$  la coordonnée de la fibre de  $F'$  sur  $U_i$ . Alors par définition  $t_i = f_{ij} t_j$  sur  $U_i \cap U_j$ . On voit donc que  $G$  agit sur  $t_i$  par

$$(*) \quad g(t_i) = a_{ig}^{e_i} t_i.$$

L'action de  $G$  sur  $F'$  est complètement décrite.

Il est clair que l'action de  $G$  est libre sauf peut-être sur les fibres au-dessus des points  $Q_i$ . Soit  $g$  un générateur du stabilisateur d'un point  $Q_i$  donné. Alors  $a_{ig}$  est une racine  $d_i$ -ième primitive, puisqu'autrement l'indice de ramification serait  $< d_i$ . Donc par (\*) les seuls points de stabilisateur <sup>non</sup> trivial sont les  $Q_i$ . D'autre part  $h_i$  et  $t_i$  sont des coordonnées au point  $Q_i$  (ils ont chacun un zéro d'ordre 1 à  $Q_i$ ) et les formules de transition de  $h_i$  et  $t_i$  sous  $g$  montrent que la singularité au point  $P_i$  de la surface quotient est de type  $(d_i, e_i)$ .

Rappelons que  $\tilde{F}$  est la résolution minimale des singularités de  $F$  construite au § 1 de cet exposé,  $\tilde{C}$  le transformé strict de  $C$  dans  $\tilde{F}$ .

Lemme 2 :  $\tilde{C}$  intersecte les autres composantes du diviseur exceptionnel de  $\tilde{F} \rightarrow X$  transversalement, et le faisceau normal de  $\tilde{C}$  dans  $\tilde{F}$  est  $i^* \mathcal{O}_C(-D)$ , où  $i$  est l'isomorphisme  $\tilde{C} \rightarrow C$  induit par  $\tilde{F} \rightarrow F$ .

Preuve : La première assertion découle immédiatement de la description de la résolution des quotients cycliques donnée dans le § 1 de cet exposé. Au lieu de la seconde partie du lemme 2, nous démontrerons l'assertion plus faible (mais équivalente dans le cas  $C = \mathbb{P}^1$  qui nous intéresse) suivante :

Lemme 2' : La self intersection de  $\tilde{C}$  dans  $\tilde{F}$  est  $-b$ , où  $b$  est le degré de  $D$ .

(Pour une démonstration du lemme 2 voir [7]). Le lemme 2' est démontré dans [12], théorème 4.3.

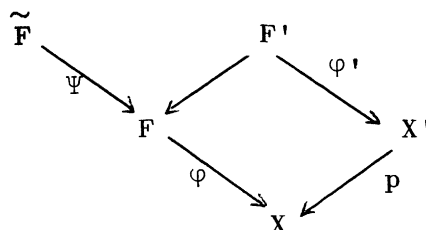
Preuve : On imite celle de Brieskorn [1], p. 349.

Soit  $b'$  le degré de  $D'$ . On a

$$b' = d(b - \sum_{i=1}^n e_i / d_i)$$

où  $d$  est l'ordre de  $G$ .

On a le diagramme



Soit  $f \in H^0(C', \mathcal{O}_{C'}(kC'))$ , invariante par  $G$ . On peut donc considérer  $f$  comme

une fonction sur  $X$ . Le diviseur  $(\varphi'^* p^* f)$  de  $\varphi'^* p^* f$  s'écrit  $kC' + B'$ . Après avoir choisi  $k$  convenablement on peut supposer que  $\varphi'^* p^* f$  n'est nulle sur aucune des fibres de  $F' \rightarrow C'$  au-dessus de  $Q_i \in C'$ ,  $\pi(Q_i) = P_i$ .  $B'$  consiste donc en  $kb'$  fibres distinctes de  $F' \rightarrow C'$ .

D'autre part  $(\Psi^* \varphi^* f)$  s'écrit

$$\tilde{\alpha}\tilde{C} + \sum \alpha_j E_j + B, \quad 1 \leq j \leq N$$

où les  $E_j$  sont les composantes du diviseur exceptionnel de  $\tilde{F} \rightarrow X$  différentes de  $\tilde{C}$  et  $B$  ne contient aucun des diviseurs exceptionnels. Il est clair que  $\alpha = k$  et par hypothèse  $\tilde{C}.B = \frac{kb'}{d}$ ,  $E_j.B = 0$ .

Puisque  $(\Psi^* \varphi^* f)$  est principal, on a

$$(1) \quad (\Psi^* \varphi^* f) . \tilde{C} = 0$$

$$(2) \quad (\Psi^* \varphi^* f) . E_j = 0 \quad \text{pour tout } j.$$

Mais supposons que  $E_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est l'unique diviseur exceptionnel de  $\tilde{F} \rightarrow X$  qui intersecte  $\tilde{C}$  au point  $P_i$ . En utilisant le § 1 de cet exposé, on trouve facilement par résolution du système d'équations linéaires (2) que  $\alpha_i = k e_i / d_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . L'équation (1) donne alors

$$k\tilde{C}.\tilde{C} + \sum_{i=1}^n \alpha_i + \frac{kb'}{d} = 0$$

donc que

$$-\tilde{C}.\tilde{C} = \frac{b'}{d} + \sum_{i=1}^n e_i / d_i = b, \quad \text{c. q. f. d.}$$

On établit aussi le lemme 2 en utilisant la résolution des quotients cycliques du § 1.

Il est clair que les lemmes 1 et 2 déterminent "la résolution de  $X$ ". En particulier on a démontré le théorème de l'introduction : en effet on a toujours  $e_i = d_i - 1$ , donc les singularités de  $F$  ont pour résolution :

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \\ -2 \quad -2 \quad \quad \quad -2 \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ d_i - 1 \end{array}$$

Les autres assertions sont claires.

## Remarques :

1. Soit  $Y$  une singularité normale de dimension 2 dont il existe une résolution  $Z \rightarrow Y$ , telle que tous les diviseurs exceptionnels soient rationnels et s'intersectent transversalement. Supposons d'autre part que le graphe dual pondéré de  $Z \rightarrow Y$  soit celui d'une singularité de Klein (plus généralement de n'importe quelle singularité quotient de  $\mathbb{C}^2$  par un groupe fini). Alors  $Y$  est analytiquement isomorphe à la singularité de Klein  $X$  de même graphe. On dit que les singularités de Klein sont "taut" ("starr" en allemand). Voici une esquisse rapide de la démonstration de Brieskorn [1] : soit  $\pi_1$  le groupe fondamental de  $Y - \{\text{point singulier}\}$  (pour une définition plus précise, voir [1]). On voit alors que  $\pi_1$  ne dépend que du graphe pondéré de  $Z \rightarrow Y$ , en donnant une présentation de  $\pi_1$  en termes de ce graphe. D'autre part Brieskorn montre que  $\pi_1$  fini  $\Leftrightarrow Y$  singularité quotient de  $\mathbb{C}^2$  par  $\pi_1$  (il utilise le théorème de Mumford que  $\pi_1 = 0 \Leftrightarrow Y$  lisse, pour une singularité de surface  $Y$ ). Comme  $X$  est une singularité quotient, son  $\pi_1$  est fini. Donc le  $\pi_1$  de  $Y$  est fini, donc  $Y$  est une singularité quotient. Mais les singularités quotients sont uniquement déterminées par leur graphe dual, c.q.f.d.

2. Brieskorn me fait remarquer qu'il conviendrait plutôt d'appeler les singularités de Klein singularités de Schwarz, puisque H.A. Schwarz les a étudiées (et a établi leurs équations) avant Klein.

3. Il conviendrait d'ajouter aux références de I l'article [10].

4. Une autre façon d'étudier les points doubles rationnels est de les représenter comme "plans doubles"  $Z^2 = f(X, Y)$ . C'est un point de vue classique : voir [8].

## REFERENCES

- [8] P. Du Val, On isolated singularities which do not affect the conditions of adjunction, Part I, II, III, Proc. Cambridge Phil. Soc., 30 (1934), 453-465 and 483-491.
- [9] A. Fujiki, On resolutions of cyclic quotient singularities, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 10 (1974), 293-328.
- [10] P.J. Giblin, Quotient singularities I, II, Lecture Notes, Liverpool University (May 1975).
- [11] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford and B. Saint-Donat, Toroidal embeddings I, Lecture Notes in Math. 339, Springer (1973).
- [12] P. Orlik, P. Wagreich, Singularities of algebraic surfaces with  $\mathbb{C}^*$  action, Math. Ann. 193 (1971), 121-135.