

# SÉMINAIRE SUR LES SINGULARITÉS DES SURFACES

## ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. LEJEUNE-JALABERT

### **Arcs analytiques et résolution minimale des singularités des surfaces quasi homogènes**

*Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 18,*  
p. 1-33

[http://www.numdam.org/item?id=SSS\\_1976-1977\\_\\_\\_\\_A20\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A20_0)

© Séminaire sur les singularités des surfaces  
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire sur les singularités des surfaces implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**CENTRE DE MATHÉMATIQUES**

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E    S U R    L E S    S I N G U L A R I T E S

D E S    S U R F A C E S

ARCS ANALYTIQUES ET RESOLUTION MINIMALE

DES SINGULARITES DES SURFACES QUASI HOMOGENES

**M. LEJEUNE-JALABERT**

21 Juin 1977



# ARCS ANALYTIQUES ET RESOLUTION MINIMALE DES SINGULARITES DES SURFACES QUASI HOMOGENES

par Monique LEJEUNE-JALABERT

## INTRODUCTION

Ce travail consacré à l'étude des arcs tracés sur un germe de surface normale quasi homogène a été motivé par une question posée par J. Nash dans un préprint non publié : "Arc structure of singularities". Soit  $(V, v)$  un germe d'espace analytique réduit que nous supposons pour simplifier à singularité isolée en  $v$ . Rappelons qu'on désigne par arc sur  $(V, v)$  ou disque testant en  $v$  un germe de morphisme analytique non constant  $h : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (V, v)$  où  $\mathbb{D} = \{t \in \mathbb{C}, |t| < 1\}$  et que, dans la littérature, les arcs apparaissent dans les critères valuatifs (de propreté, de platitude, de dépendance intégrale sur un idéal), dans les définitions d'exposant idéaliste de contact, de contact maximal, dans des énoncés du type "curve selection lemma". Esquissons très brièvement la construction faite par Nash.  $\mathfrak{H}$ , l'ensemble des arcs sur  $(V, v)$  ne pouvant être muni d'une structure d'espace analytique, pour tout entier  $a$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$  étant un système de coordonnées sur un germe d'espace analytique lisse dans lequel on peut plonger  $(V, v)$ , il considère dans  $\mathbb{C}^{na}$  le constructible formé des  $c_{ij}$ ,  $i = 1 \dots n$ ,  $j = 1 \dots a$  tel qu'il existe un arc  $h \in \mathfrak{H}$  tel que :

$$x_i \circ h(t) \equiv \sum_{j=1 \dots a} c_{ij} t^j \text{ mod } t^{a+1}$$

et il désigne par  $\mathfrak{H}_a$  son adhérence de Zariski dans  $\mathbb{C}^{na}$ . Il montre que le nombre de composantes irréductibles de  $\mathfrak{H}_a$  est une fonction croissante de  $a$  et est majoré par le nombre de composantes irréductibles de  $\pi^{-1}(v)$  pour tout  $\pi : V^* \rightarrow V$  qui soit une résolution des singularités de  $V$ . Précisément, si  $E_1, \dots, E_s$  désignent les composantes irréductibles de  $\pi^{-1}(v)$ ,  $\mathfrak{H}_{ak}$ , l'adhérence de Zariski des troncations à l'ordre  $a+1$  des images par  $\pi$  des arcs  $h^* : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (V^*, v^*)$  où  $v^* \in E_k$ , est un fermé irréductible de  $\mathfrak{H}_a$  et  $\mathfrak{H}_a = \bigcup_{k=1 \dots s} \mathfrak{H}_{ak}$ .

Le problème posé par Nash est alors de savoir si, lorsque  $(V, v)$  est un germe de surface normale, pour  $a$  assez grand, la décomposition ainsi obtenue à partir de la résolution minimale  $p : \tilde{V} \rightarrow V$  est la décomposition de  $\mathbb{H}_a$  en composantes irréductibles.

S'il n'en était pas ainsi, par exemple  $\mathbb{H}_{a1}$  serait inclus strictement dans  $\mathbb{H}_{a2}$ . Ceci signifierait que si  $h_{1a}$  est un élément "général" de  $\mathbb{H}_{a1}$  (autrement dit la  $a$ -troncation d'un arc  $h_1$  sur  $(V, v)$  dont l'unique relèvement  $\tilde{h}_1$  à  $\tilde{V}$  est tel que  $\tilde{v} = \tilde{h}_1(0)$  soit un point "général" de  $E_1$  et que  $\tilde{h}_1$  soit transverse à  $E_1$  en ce point -un arc sur  $(V, v)$  ayant ces deux propriétés relativement à une composante de  $p^{-1}(v)$  sera dit "générique"-) il existe un disque  $g : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{H}_{a2}, h_{1a})$  où  $\mathbb{D} = \{\xi \in \mathbb{C}, |\xi| < 1\}$  tel que  $g(0) = h_{1a}$  et si  $\xi \neq 0$ ,  $g(\xi) \in \mathbb{H}_{a2} - \mathbb{H}_{a1}$  ou plus précisément encore est la  $a$ -troncation d'un arc  $g_\xi$  sur  $(V, v)$  dont le relèvement à  $\tilde{V}$  passe par un point "général" de  $E_2$ . Si on pouvait construire un tel  $g_\xi$  de façon à ce que  $g(\xi, t) = g_\xi(t)$  définisse un germe de morphisme analytique  $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (V, v)$ ,  $\varphi$  ne pourrait se relever à la résolution minimale.

Je me suis donc posée la question plus simple suivante : soit  $h$  un arc "générique" sur  $(V, v)$  au sens ci-dessus et  $\varphi(\xi, t) : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (V, v)$  un germe de morphisme analytique tel que  $\varphi(0, t) = h(t)$ ;  $\varphi$  se relève-t-il à la résolution minimale  $\tilde{V}$ . Je donne une réponse affirmative à cette question dans le cas 1) où  $V$  a en  $v$  une singularité torique normale (§1, prop.3.1.1), 2) où  $V$  admet une bonne action de  $\mathbb{C}^* - 2_1$ ) si le genre de la courbe projective quotient de  $V$  par cette action est supérieure ou égal à 1 (§2, prop.2.2) - 2<sub>2</sub>) s'il est 0 et si la résolution canonique de Orlik-Wagreich coïncide avec la résolution minimale lorsque  $h$  est un disque "générique" se relevant en un disque  $\tilde{h}$  pour lequel  $\tilde{h}(0)$  est un point "général" de la composante représentée dans le graphe associé à cette résolution qui est alors une étoile par le centre de l'étoile (§2, Prop.2.3). Ce dernier cas est techniquement le plus délicat. Dans tous les énoncés, le sens des mots générique et général est convenablement précisé.

# § 1 - SINGULARITE TORIQUE NORMALE DE DIMENSION 2

1.1. DEFINITION. - Soit  $T$  le groupe algébrique  $\mathbb{C}^{*n}$ . Un plongement torique affine  $X$  est une variété algébrique affine normale contenant  $T$  comme ouvert de Zariski partout dense et munie d'une action de  $T$

$$T \times X \rightarrow X$$

prolongeant l'action  $T \times T \rightarrow T$ .

1.2. DEFINITION. - Soit  $V$  un espace analytique complexe et  $v$  un point de  $V$ . On dit que  $V$  a en  $v$  une singularité torique, s'il existe un plongement torique affine  $X$ , un point  $x$  de  $X$  et un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres locales :

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_{V,v}.$$

Rappelons les propriétés suivantes dont on trouvera le détail des démonstrations dans [2] .

1.3. Soit  $N = \text{Hom}_{\text{groupe algébrique}}(\mathbb{C}^*, T)$  et  $M = \text{Hom}_{\text{groupe algébrique}}(T, \mathbb{C}^*)$ .  $N$  et  $M$  sont des  $\mathbb{Z}$ -modules libres de rang  $n$  et il existe une dualité naturelle  $M \times N \rightarrow \mathbb{Z} \simeq \text{Hom}_{\text{groupe algébrique}}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$  défini par  $\langle r, a \rangle \mapsto roa$  .

Soit  $U_1, \dots, U_n$  (resp.  $\tau$ ) un système de coordonnées sur  $T$  (resp.  $\mathbb{C}^*$ ) . On identifie  $N$  à  $\mathbb{Z}^n$  en associant à  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$  le morphisme de  $\mathbb{C}^* \rightarrow T$  correspondant au  $\mathbb{C}$ -morphisme :

$$\begin{aligned} \Gamma(T, \mathcal{O}_T) &\simeq \mathbb{C}[U_1, U_1^{-1}, \dots, U_n, U_n^{-1}] \rightarrow \Gamma(\mathbb{C}^*, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}) \simeq \mathbb{C}[\tau, \tau^{-1}] \\ U_i &\mapsto \tau^{a_i}. \end{aligned}$$

On identifie  $M$  à  $\mathbb{Z}^n$  en associant à  $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n$  le morphisme de  $T$  dans  $\mathbb{C}^*$  correspondant au  $\mathbb{C}$ -morphisme :

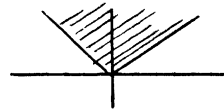
$$\Gamma(\mathbb{C}^*, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}) \simeq \mathbb{C}[\tau, \tau^{-1}] \rightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T) \simeq \mathbb{C}[U_1, U_1^{-1}, \dots, U_n, U_n^{-1}]$$

$$\tau \mapsto U_1^{r_1} \dots U_n^{r_n}.$$

La dualité naturelle s'identifie alors à :

$$\langle r, a \rangle \mapsto \sum r_i a_i.$$

Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$  un cône convexe rationnel polhyédral (c.c.r.p.) i.e. un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  défini par la positivité d'un nombre fini de formes linéaires à coefficients rationnels. (Si  $n = 2$ , tout c.c.r.p. est un secteur angulaire convexe



Soit  $\check{\sigma} \subset M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$  le c.c.r.p. dual de  $\sigma$ , i.e.  $\{r \in \mathbb{R}^n : \langle r, a \rangle \geq 0, \forall a \in \sigma\}$ .

Soit  $S = \check{\sigma} \cap M$ , c'est un semi-groupe de  $\mathbb{Z}^n$ . Soit  $\mathbb{C}[S]$  l'algèbre de ce semi-groupe (la sous-algèbre de  $\mathbb{C}[U_1, U_1^{-1}, \dots, U_n, U_n^{-1}]$  engendrée par  $U_1^{r_1} \dots U_n^{r_n}$  où  $r \in \check{\sigma} \cap M$ ). Soit  $X_{\sigma} = \text{Spec } \mathbb{C}[S]$ . La correspondance  $\sigma \mapsto X_{\sigma}$  est une bijection entre l'ensemble des c.c.r.p. de  $N_{\mathbb{R}}$  ne contenant aucun sous-espace linéaire et les plongements toriques affines.

1.4. Si  $n = 2$ , il y a 4 orbites sur un plongement torique affine  $X_{\sigma}$ , une de dimension 2 ouverte isomorphe à  $T$ , 2 de dimension 1 et 1 de dimension 0 qui est l'unique orbite fermée. Soit  $x$  ce point. C'est l'unique point singulier possible de  $X_{\sigma}$ . De plus l'idéal des fonctions régulières sur  $X_{\sigma}$  qui s'annulent en  $x$  est engendré par les  $U_1^{r_1} U_2^{r_2}$  où  $r \in \check{\sigma} \cap M$ ,  $r \neq 0$  [2] (th.2, ch.I).

1.5. On dit que  $f \in \Gamma(X_{\sigma}, \mathcal{O}_{X_{\sigma}})$  est équivariante si  $f(t \times x) = f(t) \times f(x)$ . Dans l'identification de  $\Gamma(X_{\sigma}, \mathcal{O}_{X_{\sigma}})$  à  $\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M]$ , celles-ci s'identifient aux monômes  $U^r$  où  $r \in \check{\sigma} \cap M$ .

2.1. Soit  $V$  un espace analytique complexe ayant en  $v$  une singularité torique de dimension 2. On suppose  $V$  singulier en  $v$ . Soit  $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (V, v)$  un germe de morphisme formel. Soient  $X_\sigma$  un plongement torique affine,  $x$  son unique point singulier tels que  $\hat{\mathcal{O}}_{V,v}$  et  $\hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x}$  s'identifient. On désignera encore par  $\varphi$  le germe de morphisme formel  $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (X_\sigma, x)$  qu'on en déduit.

2.1.1. On suppose qu'il existe un disque testant formel  $h : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  (où  $\mathbb{D}$  désigne le disque unité du plan complexe) tel que  $\varphi \circ h$  ne se factorise pas à travers l'immersion fermée de l'adhérence d'aucune des 2 orbites de dimension 1 dans  $(X_\sigma, x)$ .

La donnée de  $\varphi$  est équivalente à la donnée d'un  $\mathbb{C}$ -morphisme  $\hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^n, 0} \simeq \mathcal{O}_n$

où  $\mathcal{O}_n$  est l'anneau des séries formelles à  $n$  variables à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . On en déduit avec les notations ci-dessus un  $\mathbb{C}$ -morphisme :

$$\Gamma(X_\sigma, \mathcal{O}_{X_\sigma}) \simeq \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M] \rightarrow \mathcal{O}_{X_\sigma, x} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x} \rightarrow \mathcal{O}_n.$$

Soit  $r \in \check{\sigma} \cap M$  et  $U^r$  le monôme correspondant. Il ne s'envoie pas sur 0 dans  $\mathcal{O}_n$ . En effet,  $U^r$  appartiendrait à l'idéal définissant  $(\Gamma, x)$ , l'image de  $(\mathbb{D}, 0)$  par  $h$ . Comme  $U^r$  est une fonction équivariante et que  $T$  est une orbite dense sur  $X_\sigma$ , on en déduirait que  $U^r = 0$  ce qui est absurde (ceci ne signifie pas que  $\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M] \rightarrow \mathcal{O}_n$  soit injective). Comme  $\check{\sigma} \cap M$  engendre  $M$  en tant que  $\mathbb{Z}$ -module, on peut écrire :

$$U_i = \frac{U^{r_i}}{U^{s_i}} \quad \text{où } r_i, s_i \in \check{\sigma} \cap M, \quad i = 1, 2$$

et on peut donc associer à chaque  $U_i$ ,  $i = 1, 2$  une fonction méromorphe formelle.  $\mathcal{O}_n$  étant un anneau factoriel, on peut écrire :

$$U_1 = c_1 f_1^{\alpha_1} \dots f_k^{\alpha_k}$$

$$U_2 = c_2 f_1^{\beta_1} \dots f_k^{\beta_k}$$



où  $c_1$  et  $c_2$  sont des unités de  $\mathcal{O}_n$ ,  $f_1, \dots, f_k$  des séries formelles irréductibles dans l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_n$  et où  $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{Z}^2 - \{0,0\}$ ,  $i = 1 \dots k$ . De plus, pour tout  $r = (r_1, r_2) \in \check{\sigma} \cap M$ , l'image de

$U^r = U_1^{r_1} U_2^{r_2}$  dans le corps des fractions de  $\mathcal{O}_n$ , autrement dit

$c_1^{r_1} c_2^{r_2} \prod_{i=1}^k f_i^{r_1 \alpha_i + r_2 \beta_i}$  doit être en fait dans  $\mathcal{O}_n$ . Ceci entraîne que

$(\alpha_i, \beta_i) \in \sigma$ ,  $i = 1 \dots k$  et que de plus, ces  $k$  points n'appartiennent pas à la même face de  $\sigma$ .

Réciproquement, pour définir un  $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (X_\sigma, x)$  satisfaisant 2.1.1, il suffit de se donner  $k \geq 1$  points de  $\sigma \cap N - \{0,0\}$  pas tous situés sur la même face de dimension 1 de  $\sigma$ ,  $k$  éléments irréductibles de  $\mathcal{O}_n$  et deux unités  $c_1, c_2$ . En effet, on reconstruit immédiatement à partir de ces données un  $\mathbb{C}$ -morphisme  $\hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x} \rightarrow \mathcal{O}_n$ .

Si  $(r_1, r_2) \in \check{\sigma} \cap M$ ,  $c_1^{r_1} c_2^{r_2} \prod_{i=1}^k f_i^{r_1 \alpha_i + r_2 \beta_i} \in \mathcal{O}_n$ . L'idéal des fonctions de  $X_\sigma$  s'annulant en  $x$  étant engendré par  $U^r$  où  $r \in \check{\sigma} \cap M - \{0,0\}$  une fonction qui ne s'y annule pas est envoyée sur une unité de  $\mathcal{O}_n$  tandis qu'une qui s'y annule est envoyée sur un élément de l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_n$ . De plus, on peut choisir un système de coordonnées  $t_1, \dots, t_n$  sur  $\mathbb{C}^n$  tel que  $f_i(t_1, 0, \dots, 0) = t_1^{e_i}$ ,  $e_i \in \mathbb{N}$ ,  $e_i \geq 1$ . On a alors

$$U_1 = t_1^{\sum \alpha_i e_i}$$

$$U_2 = t_1^{\sum \beta_i e_i}.$$

Comme  $(\alpha_i, \beta_i) \in \sigma$  et que  $\sigma \cap N$  est un semi-groupe de  $N$ ,  $(\sum \alpha_i e_i, \sum \beta_i e_i) \in \sigma$ ;  $h : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  défini par  $t_1 \circ h = t$ ,  $t_i \circ h = 0$ ,  $i \geq 2$  satisfait 2.1.1.

## 2.2. Germe de morphismes finis $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (X_\sigma, x)$ .

D'après le théorème de préparation de Weierstrass, la condition de finitude de  $\mathcal{O}_2$  sur  $\hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x}$  est équivalente à :

$$\text{rg } \mathbb{C} \mathcal{O}_2 / M_{X_\sigma, x}^\wedge < \infty.$$

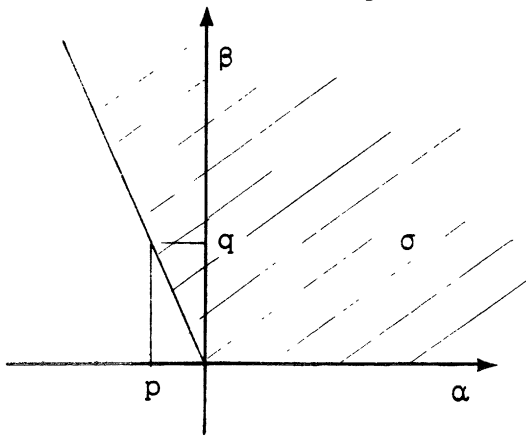
Ceci se traduit par

$$\text{rg } \mathbb{C} \mathcal{O}_2 / (\dots, \prod_{i=1}^k f_i^{r_1 \alpha_i + r_2 \beta_i}, \dots)_{\substack{r \in \check{\sigma} \cap M \\ r \neq 0}} < \infty$$

$\mathcal{O}_2$  étant factoriel, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que pour tout  $i$ , il existe  $r_i = (r_{i1}, r_{i2})$  tel que

$$r_{i1} \alpha_i + r_{i2} \beta_i = 0$$

ce qui signifie que  $(\alpha_i, \beta_i)$  appartient à une face de  $\sigma$ . A un changement de coordonnées près sur le tore  $T$ , on peut supposer que  $\sigma$  est



le c.c.r.p. défini par  $\beta \geq 0$ ,

$q\alpha - p\beta \geq 0$  où  $q \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $p \neq 0$

et  $(p, q) = 1$ . Puisque les  $k$  points

$(\alpha_i, \beta_i)$  n'appartiennent pas à la même

face de  $\sigma$ , on peut également en ré-

indexant au besoin les  $f_i$  supposer que :

$$\beta_i = 0, \quad i = 1, \dots, r$$

$$q\alpha_i - p\beta_i = 0, \quad i = r+1, \dots, k.$$

On détermine donc  $\lambda_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = r+1, \dots, k$  tels que  $\alpha_i = \lambda_i p$ ,  $\beta_i = \lambda_i q$  et on a

$$2.2.1. \quad U_1 = c_1 (f_1^{\alpha_1} \dots f_r^{\alpha_r}) (f_{r+1}^{\lambda_{r+1}} \dots f_k^{\lambda_k})^p$$

$$U_2 = c_2 (f_{r+1}^{\lambda_{r+1}} \dots f_k^{\lambda_k})^q.$$

Soit  $\mathbb{C}[U, V]$  l'anneau de polynômes à 2 indéterminées sur  $\mathbb{C}$  et envoyons  $U_1$  sur  $UV^p$  et  $U_2$  sur  $V^q$ .

2.2.2. On en déduit un morphisme algébrique  $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow X_{\check{\sigma}}$  correspondant à celui de  $\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M] \rightarrow \mathbb{C}[U, V]$  qui envoie :

$$U_1^{r_1} U_2^{r_2} \mapsto U^{r_1} V^{r_1 p + r_2 q}$$

$\check{\sigma}$  est justement le c.c.r.p. défini par  $r_1 \geq 0$ ,  $r_1 p + r_2 q \geq 0$ . Consi-

déterminons sur  $\mathbb{C}^2$  l'action du sous-groupe cyclique de  $GL(2, \mathbb{C})$  engendré par la matrice  $\begin{pmatrix} e^{-2i\pi p/q} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi/q} \end{pmatrix}$ . Soit  $U^{r_1} V^{r_1 p + r_2 q}$ ,  $r \in \check{\sigma} \cap M$ , l'image d'une fonction régulière sur  $X_\sigma$ . Elle est laissée stable par l'action du groupe.

Réciproquement, une fonction invariante par le groupe doit être somme de monômes invariants.  $U^{r_1} V^{s_2}$  se transforme en

$e^{-2i\pi \frac{p}{q} r_1 + 2i\pi \frac{s_2}{q}} U^{r_1} V^{s_2}$ . On doit donc avoir  $\frac{-pr_1}{q} + \frac{s_2}{q} = r_2$ ,  $r_2 \in \mathbb{Z}$  ou  $s_2 = pr_1 + qr_2$  et  $(r_1, r_2) \in \check{\sigma}$  puisque  $r_1 \in \mathbb{N}$  et  $s_2 = pr_1 + qr_2 \in \mathbb{N}$ .  $X_\sigma$  est donc une singularité quotient. Précisément, si  $p$  est négatif et écrivant que  $-p = aq + r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq r < q$  ( $r=0$  est impossible, ceci entraînerait que  $q=1$  puisque  $(p, q) = 1$  et le simplexe correspondant serait de multiplicité 1 donc  $X_\sigma$  non singulier); on a alors

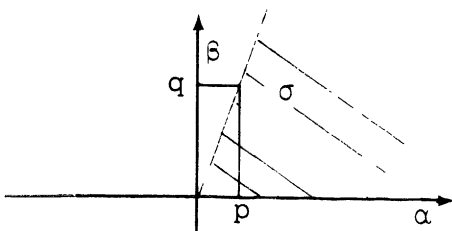
$$\begin{pmatrix} e^{-2i\pi \frac{p}{q}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2i\pi \frac{r}{q}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{q}} \end{pmatrix}$$

et  $X_\sigma$  est la singularité  $C_{q,r}$  de Brieskorn [1]. Si  $p$  est positif et écrivant que  $p = aq + r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq r < q$  ( $r=0$  est impossible, car comme ci-dessus, ceci entraînerait  $q=1$  et  $X_\sigma$  non singulier); on a alors

$$\begin{pmatrix} e^{-2i\pi \frac{p}{q}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2i\pi \frac{r}{q}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2i\pi \frac{q-r}{q}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{q}} \end{pmatrix}$$

et  $1 \leq q-r < q$ .  $X_\sigma$  est la singularité  $C_{q,q-r}$ .

2.2.3. On obtient donc toutes les surfaces toriques singulières en considérant des c.c.r.p.  $\sigma$  définis par  $\beta \geq 0$  et  $q\alpha - p\beta \geq 0$



avec  $q \geq 1$ ,  $p \geq 1$  ( $(p, q) = 1$  et

$1 \leq p < q$ .  $X_\sigma$  est alors  $C_{q,q-p}$ .

Le morphisme fini  $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow X_\sigma$  décrit

ci-dessus est le morphisme canonique décrivant  $X_\sigma$  comme quotient de  $\mathbb{C}^2$ . On a  $\pi^{-1}(x) = 0$  ; en effet  $U^q$  et  $V^q$  sont dans  $M_{X_\sigma, x} \cdot \mathbb{C}[U, V]$  (cf. [4] , § 1.4).

2.2.4. PROPOSITION. - Tout germe de morphisme formel fini  
 $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (X_\sigma, x)$  se factorise par le morphisme canonique  $\pi$  .

En effet, il s'agit de construire une flèche  $\mathbb{C}[[U, V]] \rightarrow \mathcal{O}_2$  tel que

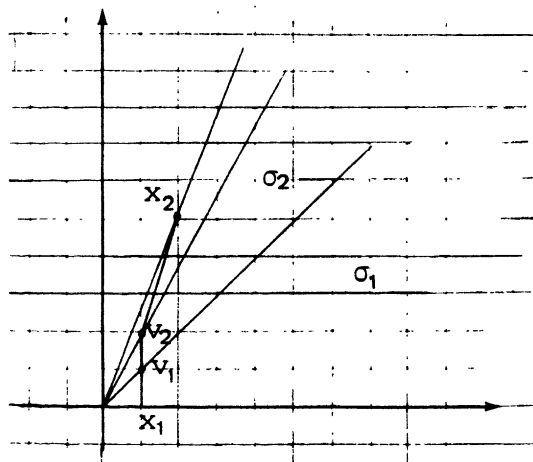
$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}_2 \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathbb{C}[[U, V]] & & \end{array}$$

L'application qui consiste à substituer à  $U$  la série formelle  $f_1^{\alpha_1} \dots f_r^{\alpha_r}$  et à  $V$  la série formelle  $f_{r+1}^{\lambda_{r+1}} \dots f_k^{\lambda_k}$  convient puisque  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_k \in \mathbb{N}$  .

2.3. Condition de relèvement à la résolution minimale d'un germe  
 $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (X_\sigma, x)$  .

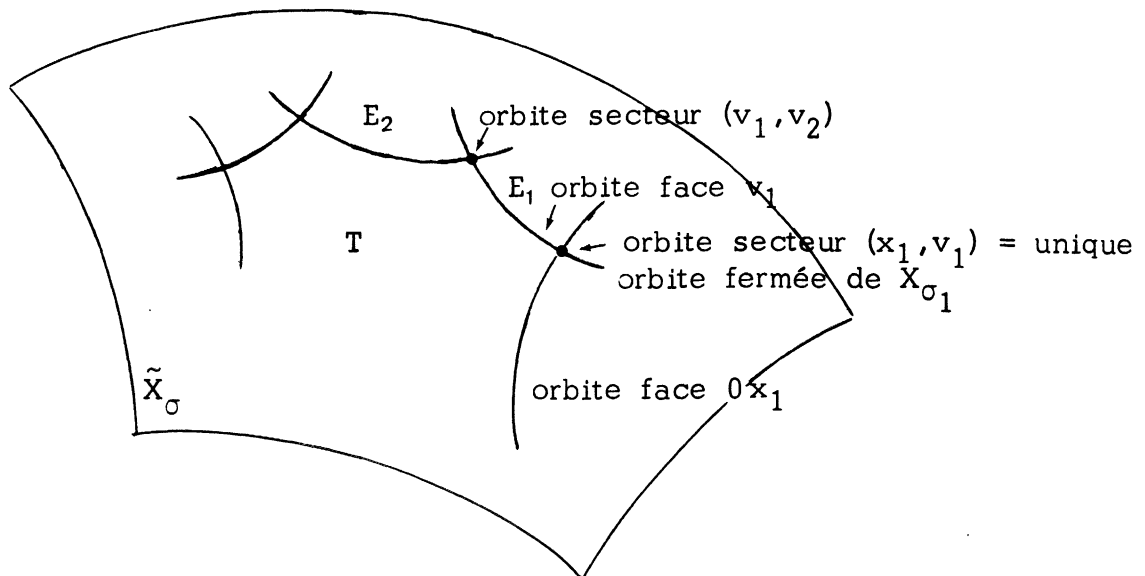
Soit  $\sigma$  le c.c.r.p. déterminant  $X_\sigma$  . Rappelons qu'on obtient la résolution minimale de  $X_\sigma$  de la façon suivante :

Soit  $\Sigma$  l'adhérence convexe de  $\sigma \cap N - \{0, 0\}$  . Soient  $x_1, v_1, \dots, v_k, x_2$  les points de  $N$  sur le bord de  $\Sigma$  . On construit les rayons  $\vec{\mathcal{O}v_i}$  et les secteurs entre eux. La résolution minimale  $\tilde{X}_\sigma$  est la variété obtenue en recollant les différentes cartes affines correspondant à chaque secteur ainsi déterminé.



Soit  $\pi : \tilde{X}_\sigma \rightarrow X_\sigma$  le morphisme canonique provenant de l'inclusion de chaque sous-secteur dans  $\sigma$  . Ensemblistement  $\pi^{-1}(x) = E_1 \cup \dots \cup E_k$  où chaque  $E_i$  est un  $\mathbb{P}^1$  et où  $(E_i, E_j) = 0$  si  $j \neq i+1, i-1$   $(E_i, E_{i+1}) = 1$  .

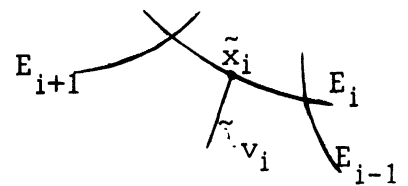
Géométriquement, on a :



voir [2] , page 37. Plus précisément, on a (cf. [4] §§ 1.5 et 1.6) :

2.3.1. PROPOSITION. - L'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{X_O, x}$  se remonte sur  $\tilde{X}_O$  en l'idéal inversible correspondant au diviseur  $\sum_{i=1}^k E_i$  . Soit  $v_i = (a_i, b_i)$  et soit le groupe à 1 paramètre  $\mathbb{C}^* \rightarrow T$  défini par  $U_1 = t^{a_i}$  ,  $U_2 = t^{b_i}$  . Soit  $\lambda_{v_i} : \mathbb{C} \rightarrow X_O$  (resp.  $\tilde{\lambda}_{v_i} : \mathbb{C} \rightarrow \tilde{X}_O$ ) son unique prolongement . On a  $\pi \circ \tilde{\lambda}_{v_i} = \lambda_{v_i}$  ;  $\tilde{x}_i = \tilde{\lambda}_{v_i}(0) \in E_i - E_{i-1} - E_{i+1}$  ;  $x = \lambda_{v_i}(0)$  et de plus  $v(\lambda_{v_i}^* \cdot M_{X_O, x}) = 1$

où  $v$  est la valuation naturelle sur  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}, 0}$  .



Démonstration : Soit  $\tilde{X}_{O_i}$  l'ouvert affine de  $\tilde{X}_O$  correspondant au secteur  $(v_{i-1}, v_i)$  ,  $i \geq 1$  . Puisque  $\tilde{X}_O$  est non singulier,  $(v_{i-1}, v_i)$  est une base de  $N$  sur  $\mathbb{Z}$  ([2] th.4). Ceci entraîne que

$$\begin{vmatrix} a_{i-1} & a_i \\ b_{i-1} & b_i \end{vmatrix} = a_{i-1}b_i - a_ib_{i-1} = 1 .$$

(Il doit être inversible dans  $\mathbb{Z}$  et l'indexation est faite de façon à ce que la base  $(v_{i-1}, v_i)$  ait la même orientation que la base canonique).

Le système

$$\begin{cases} r_1 a_{i-1} + r_2 b_{i-1} = 1 \\ r_1 a_i + r_2 b_i = 1 \end{cases}$$

a donc une unique solution dans  $M$  que nous noterons  $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ .

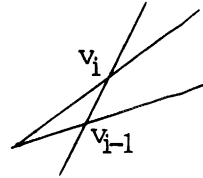
Montrons que  $\rho \in \check{\sigma} \cap M$ .  $\rho_1 \alpha + \rho_2 \beta = 1$

est l'équation de la droite joignant l'extré-

mité de  $v_{i-1}$  à celle de  $v_i$ . Or c'est

le support de l'un des bords de  $\Sigma$  l'adhé-

rence convexe de  $\sigma \cap N - \{0,0\}$ , qui est donc situé tout entier du même côté de cette droite. On a donc



$$\rho_1 \alpha + \rho_2 \beta - 1 \geq 0, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \sigma \cap N - \{0,0\}.$$

En particulier,  $x_1$  et  $x_2$  sont dans  $\sigma \cap N - \{0,0\}$  et donc

$$\langle \rho, x_i \rangle - 1 \geq 0, \quad i = 1 \text{ et } 2.$$

Mais tout  $a$  de  $\sigma$  peut s'écrire  $a = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$  où  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_i \geq 0$

et  $\langle \rho, a \rangle = \lambda_1 \langle \rho, x_1 \rangle + \lambda_2 \langle \rho, x_2 \rangle \geq \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$  et  $\rho \in \check{\sigma} \cap M$ . Puisque  $\rho \neq 0$ ,  $U^\rho \in M_{X_\sigma, x}$  et puisque  $\rho_1 a_i + \rho_2 b_i = 1$ ,

$$U^\rho \circ \lambda_{v_i} = t, \text{ et } v(\lambda_{v_i}^* M_{X_\sigma, x}^*) = 1.$$

Remarquons d'autre part que  $\check{\sigma}_i$  est le secteur  $(b_i, -a_i)$ ,

$(-b_{i-1}, a_{i-1})$  et que les fonctions  $U_1^{b_i} U_2^{-a_i}$ ,  $U_1^{-b_{i-1}} U_2^{a_{i-1}}$  sont un système de coordonnées sur  $\tilde{X}_{\sigma_i}$ . On a en fait

$$\rho_1 = b_i - b_{i-1}, \quad \rho_2 = -a_i + a_{i+1}.$$

Il reste donc à voir que  $M_{X_\sigma, x}$  se relève sur  $\tilde{X}_{\sigma_i}$  en un idéal principal, celui engendré par  $U^\rho$ . Ceci est équivalent à voir que  $\text{ord } M_{X_\sigma, x}$

coïncide avec la forme linéaire  $\rho$  sur  $\sigma_i$ .

Rappelons que si  $a \in \sigma_i$ ,  $\text{ord } M_{X_\sigma, x}(a) = \min_{\substack{r \in \check{\sigma} \cap M \\ r \neq 0}} \langle r, a \rangle$ . On a

$v_i, v_{i-1} \in \sigma$  et comme ces vecteurs ne sont pas portés par une face, on a

$$\langle r, v_i \rangle > 0 \quad \text{et} \quad \langle r, v_{i-1} \rangle > 0 \quad \text{si} \quad r \in \check{\sigma}, r \neq 0.$$

Si de plus  $r \in \check{\sigma} \cap M$ ,  $\langle r, v_{i-1} \rangle$  et  $\langle r, v_i \rangle$  sont des entiers. Alors

$$\langle r, v_{i-1} \rangle \geq 1 = \langle \rho, v_{i-1} \rangle$$

$$\langle r, v_i \rangle \geq 1 = \langle \rho, v_i \rangle.$$

Si maintenant  $a \in \sigma_i$ , il existe  $\lambda_{i-1}$  et  $\lambda_i$  des réels positifs tels que

$$a = \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_i v_i$$

et si  $r \in \check{\sigma} \cap M$ ,  $r \neq 0$

$$\langle r, a \rangle = \lambda_{i-1} \langle r, v_{i-1} \rangle + \lambda_i \langle r, v_i \rangle \geq \lambda_{i-1} \langle \rho, v_{i-1} \rangle + \lambda_i \langle \rho, v_i \rangle$$

$$\langle r, a \rangle \geq \langle \rho, a \rangle.$$

Remarquons enfin que  $U_1^{b_i} U_2^{-a_i} \circ \tilde{\lambda}_{v_i} = 1$  et  $U_1^{-b_{i-1}} U_2^{a_{i-1}} \circ \tilde{\lambda}_{v_i} = t$ .

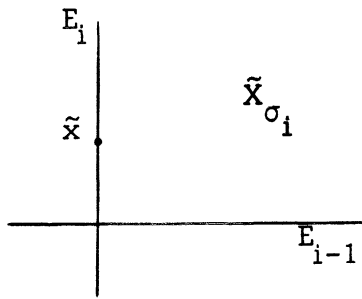
2.3.2. Soit donc  $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (X_\sigma, x)$  un germe de morphisme formel satisfaisant la condition 2.1.1 et soient  $(f_1, \dots, f_k)$  et  $(\alpha_i, \beta_i)$   $i = 1 \dots k$ , les  $k$  éléments irréductibles de  $\mathcal{O}_2$  et les  $k$  points de  $\sigma \cap N - \{0, 0\}$  non tous sur la même face qui le décrivent. Supposons que  $\varphi$  se relève à la résolution minimale  $\tilde{X}_\sigma$  en  $\tilde{\varphi} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\tilde{X}_\sigma, \tilde{x})$  tel que  $\pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ .

■ ou  $\tilde{x}$  est un point singulier de  $\pi^{-1}(x)$ . Par exemple,  $\tilde{x} = E_{i-1} \cap E_i$ ,  $2 \leq i \leq k$  est l'orbite correspondant au secteur  $(v_{i-1}, v_i)$ . Alors  $\tilde{x} \in \tilde{X}_{\sigma_i}$  et puisque  $\tilde{X}_{\sigma_i}$  est un ouvert de  $\tilde{X}_\sigma$ ,  $(\tilde{X}_{\sigma_i}, \tilde{x}) = (\tilde{X}_\sigma, \tilde{x})$ . Dans ce cas

2.3.2.1.  $(\alpha_\ell, \beta_\ell) \in \sigma_i$ ,  $\ell = 1 \dots k$  et ils ne sont pas tous situés sur une même face de  $\sigma_i$ .

■ ou  $\tilde{x}$  est un point lisse de  $\pi^{-1}(x)$ . Par exemple,  $\tilde{x} \in E_i$ .  
Si  $i \neq 1$  (resp.  $i \neq k$ ), la partie lisse de  $E_i$  coïncide exactement avec l'orbite correspondant à la face  $v_i$ ; sinon, il faut rajouter un point celui correspondant au secteur  $(x_1, v_1)$  (resp.  $(v_k, x_2)$ ).

Dans le premier cas,  $\tilde{X}_{\sigma_i}$  a pour système de coordonnées  $U_1^{b_i} U_2^{-a_i}$ ,  $U_1^{-b_{i-1}} U_2^{a_{i-1}}$  et l'équation de  $E_i$  est  $U_1^{-b_{i-1}} U_2^{a_{i-1}} = 0$ .



Le germe d'application  $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\tilde{X}_{\sigma_i}, \tilde{x})$  étant décrit par :

$$\begin{cases} U_1^{b_i} U_2^{-a_i} = c_1^{b_i} c_2^{-a_i} \prod_{j=1}^k f_j^{b_i \alpha_j - a_i \beta_j} \\ U_1^{-b_{i-1}} U_2^{a_{i-1}} = c_1^{-b_{i-1}} c_2^{a_{i-1}} \prod_{j=1}^k f_j^{-b_{i-1} \alpha_j + a_{i-1} \beta_j} \end{cases}$$

et on doit avoir  $U_1^{b_i} U_2^{-a_i}(\varphi(0)) = U_1^{b_i} U_2^{-a_i}(\tilde{x}) \neq 0$ . Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que  $b_i \alpha_j - a_i \beta_j = 0$ ,  $j = 1 \dots k$  et ceci suffit car alors  $-b_{i-1} \alpha_j + a_{i-1} \beta_j > 0$ .

Si  $\tilde{x} \in E_1 - E_2$  et si  $\tilde{x} \in$  orbite correspondant à la face  $v_1$ , alors  $b_1 \alpha_j - a_1 \beta_j = 0$ ,  $j = 1 \dots k$ .

Si  $\tilde{x} \in$  orbite correspondant à la face  $(x_1, v_1)$  alors  $(\alpha_j, \beta_j) \in \sigma_1$ ,  $\forall j = 1 \dots k$  et ils ne sont pas tous situés sur la même face de  $\sigma_1$ .

2.3.3. DEFINITION. - Soit  $h : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (X_\sigma, x)$  un disque testant.

On dira que  $h$  est un disque "générique" si désignant par

$\tilde{h} : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\tilde{X}_\sigma, \tilde{x})$  l'unique relèvement de  $h$ , on a :

- 1)  $\tilde{x}$  est un point non singulier de  $\pi^{-1}(x)$  (appartient à un seul  $E_i$ ) ;
- 2)  $\nu(\tilde{h}^* M_{\tilde{X}_\sigma, \tilde{x}}) = 1$  ;
- 3) l'image de  $\tilde{h}$  est une courbe non singulière transverse à  $E_i$  en  $\tilde{x}$ .

(i.e. l'application  $h^*$  est transverse à  $E_i$  en  $\tilde{x}$ ).



Si  $h$  vérifie 2.1.1, alors écrivant que

$$\begin{cases} U_1 = c_1 t^\alpha \\ U_2 = c_2 t^\beta \end{cases} \quad \text{où } \mathcal{O}_1 = \mathbb{C}[[t]] \quad \text{et où } c_1 \text{ et } c_2 \text{ sont des unités.}$$

■ S'il existe  $i$  tel que  $\tilde{x}$  soit dans l'orbite d'une face  $v_i$ , on doit avoir puisque

$$\begin{cases} U_1^{b_i} U_2^{-a_i} = c_1^{b_i} c_2^{-a_i} t^{\alpha b_i - \beta a_i} \\ U_1^{-b_{i-1}} U_2^{a_{i-1}} = c_1^{-b_{i-1}} c_2^{a_{i-1}} t^{-\alpha b_{i-1} + \beta a_{i-1}} \end{cases}$$

$$\alpha b_i - \beta a_i = 0, \text{ i.e. } \exists k \in \mathbb{N}, \alpha = k a_i, \beta = k b_i$$

ce qui entraîne que

$$\begin{cases} U_1^{b_i} U_2^{-a_i} - U_1^{b_i} U_2^{-a_i}(\tilde{x}) = c_1^{b_i} c_2^{-a_i} - c_1^{b_i}(0) c_2^{-a_i}(0) = \sum_{m \geq 1} a_m t^m \\ U_1^{-b_{i-1}} U_2^{a_{i-1}} = c_1^{-b_{i-1}} c_2^{a_{i-1}} t^{k(-a_i b_{i-1} + b_i a_{i-1})} = V(t) t^k \end{cases}$$

où  $V$  est une unité.

La condition 3) de généricité implique alors que  $k \leq \inf_{a_m \neq 0} m$

puisque la tangente à l'image de  $\tilde{h}$  doit être transverse à  $E_i$  donc pas l'axe des  $U_1^{b_i} U_2^{-a_i}$ . On a donc  $v(\tilde{h}^* M_{\tilde{X}_\sigma, \tilde{x}}) = k$  et la condition

2) entraîne  $k = 1$ .  $h$  doit donc être décrit par :

$$\begin{cases} U_1 = c_1 t^{a_i} \\ U_2 = c_2 t^{b_i} \end{cases} \quad \text{où } c_1 \text{ et } c_2 \text{ sont des unités}$$

et ceci est suffisant.

■ Si  $\tilde{x}$  est le point de  $E_1$  appartenant à l'orbite correspondant au secteur  $(x_1, v_1)$ ,  $\mathbb{C}[\tilde{\sigma}_1 \cap M] = \mathbb{C}[U_2, U_1 U_2^{-1}]$  et  $U_2(\tilde{x}) = U_1 U_2^{-1}(\tilde{x}) = 0$ . Ici  $E_1 \cap \tilde{X}_{\sigma_1}$  est défini par  $U_2 = 0$ . On obtient donc :

$$U_1^{b_1} U_2^{-a_1} = U_1 U_2^{-1} = c_1 c_2^{-1} t^{\alpha-\beta}$$

$$U_2 = c_2 t^\beta .$$

Puisque l'axe  $E_1$  ne doit pas être tangent, on doit avoir  $\beta \leq \alpha - \beta$ , puis  $\beta = 1$ . Réciproquement  $\beta = 1$ ,  $\alpha \geq 2$  entraîne que  $h$  est gé-  
rique.

Il reste un cas à examiner, c'est celui où  $h$  ne vérifie pas

2.1.1. Par exemple,  $\text{Im } h$  est l'orbite de la face  $x_1$ , c'est-à-dire l'axe des  $U_2$  sur  $\tilde{X}_{\sigma_1}$ . Il est donc décrit par :  $U_2 = t$ ,  $U_1 U_2^{-1} = 0 = t^\infty$ . On peut donc considérer que ce disque est un cas limite du précédent quand  $\alpha$  devient de plus en plus grand.

3.1. Une condition suffisante de relèvement d'un germe  $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (V, x)$  à la résolution minimale.

3.1.1. PROPOSITION. - Soit  $V$  un espace analytique complexe ayant en  $v$  une singularité torique de dimension 2 . Soit

$\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (V, v)$  un germe de morphisme formel. On suppose que identifiant  $\hat{\mathcal{O}}_{V,v}$  à  $\hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x}$  et  $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2, 0}$  à  $\mathbb{C}[[\xi, \tau]]$ , l'application

$$\hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x} \rightarrow \mathbb{C}[[\xi, \tau]] \xrightarrow{\xi \rightarrow 0, \tau \rightarrow \tau} \mathbb{C}[[\tau]]$$

se factorise par :  $\hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x} \rightarrow \mathbb{C}[[\tau^e]] \rightarrow \mathbb{C}[[\tau]]$ , où

$\hat{\mathcal{O}}_{X_\sigma, x} \rightarrow \mathbb{C}[[t]] \simeq \mathbb{C}[[\tau^e]]$  est un disque testant générique au sens de 2.3.3.

Soit  $Z_1$  l'éclatement de  $0$  dans  $\mathbb{C}^2$  et  $0_1$  le point de  $Z_1$  correspondant à la direction de l'axe des  $\tau$  ; soit  $Z_2$  l'éclatement de  $0_1$  et  $0_2$  le point de  $Z_2$  sur la transformée stricte de l'axe des  $\tau, \dots$  ; soit  $Z_{e-1}$  l'éclatement de  $0_{e-2}$  et  $0_{e-1}$  le point de  $Z_{e-1}$  sur la transformée stricte de l'axe des  $\tau$ .

Soit  $\pi : \tilde{X}_\sigma \rightarrow X_\sigma$  la résolution minimale de  $X_\sigma$ . Il existe  $\tilde{x}$  et  $\tilde{\omega} : (Z_{e-1}, 0_{e-1}) \rightarrow (\tilde{X}_\sigma, \tilde{x})$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (Z_{e-1}, 0_{e-1}) & \xrightarrow{\quad} & (\tilde{X}_\sigma, \tilde{x}) \\ \downarrow p & & \downarrow \pi \\ (Z_1, 0_1) & & \\ \downarrow & & \\ (\mathbb{C}^2, 0) & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & (X_\sigma, x) \end{array}$$

commute.

Démonstration : Supposons que  $\varphi$  vérifie 2.1.1 et écrivons avec les notations précédentes que :

$$\begin{cases} U_1 = c_1 f_1^{\alpha_1} \dots f_k^{\alpha_k} \\ U_2 = c_2 f_1^{\beta_1} \dots f_k^{\beta_k} \end{cases} \quad \begin{array}{l} c_i \text{ unités de } \mathbb{C}[[\xi, \tau]] \\ (\alpha_i, \beta_i) \in \sigma \cap N - \{0, 0\} \text{ non tous situés sur une} \\ \text{même face de dim 1 de } \sigma. \end{array}$$

D'autre part  $\mathcal{O}_{Z_1, 0_1} \simeq \mathbb{C}[[\xi_1, \tau]]$ ,  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_1, 0_1}$  étant le morphisme envoyant  $\xi$  sur  $\xi_1 \tau$  et  $\tau$  sur  $\tau$ , ...,  $\mathcal{O}_{Z_{e-1}, 0_{e-1}} \simeq \mathbb{C}[[\xi_{e-1}, \tau]]$  et  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} = \mathbb{C}[[\xi, \tau]] \rightarrow \mathcal{O}_{Z_{e-1}, 0_{e-1}}$  étant le morphisme envoyant  $\xi$  sur  $\xi_{e-1} \tau^{e-1}$  et  $\tau$  sur  $\tau$ .

L'application  $\varphi \circ p : (Z_{e-1}, 0_{e-1}) \rightarrow (X_\sigma, x)$  donne lieu au système

$$\begin{cases} U_1 = c_1 (\xi_{e-1} \tau^{e-1}, \tau) \prod_{j=1}^k f_j (\xi_{e-1} \tau^{e-1}, \tau)^{\alpha_j} \\ U_2 = c_2 (\xi_{e-1} \tau^{e-1}, \tau) \prod_{j=1}^k f_j (\xi_{e-1} \tau^{e-1}, \tau)^{\beta_j} \end{cases}$$

L'hypothèse signifie qu'il existe  $d_1(t)$ ,  $d_2(t)$  des unités de  $\mathbb{C}[[t]]$ ,  $(a_i, b_i) \in \partial \Sigma \cap N$  ou  $(a, 1)$ ,  $a \geq 2$  tels que

$$\begin{aligned} c_1(0, \tau) \prod_j f_j(0, \tau)^{\alpha_j} &= d_1(\tau^e) \tau^{ea_i} \\ c_2(0, \tau) \prod_j f_j(0, \tau)^{\beta_j} &= d_2(\tau^e) \tau^{eb_i} \end{aligned} \quad \text{resp.} \quad \begin{aligned} d_1(\tau^e) \tau^{ea} \\ d_2(\tau^e) \tau^e \end{aligned}$$

Or on a montré qu'il existe  $\rho_1$  et  $\rho_2$  (2.3.1) tels que  $\rho_1 a_i + \rho_2 b_i = 1$  et que  $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in \check{\sigma} \cap M - \{0, 0\}$  (si  $i=1$ ,  $\rho = (0, 1)$  convient). On a donc

$$\begin{aligned} U_1^{\rho_1}(0, \tau) U_2^{\rho_2}(0, \tau) &= c_1(0, \tau)^{\rho_1} c_2(0, \tau)^{\rho_2} \prod_j f_j^{\rho_1 \alpha_j + \rho_2 \beta_j}(0, \tau) \\ &= d_1(\tau^e)^{\rho_1} d_2(\tau^e)^{\rho_2} \tau^e, \end{aligned}$$

$c_i$  et  $d_i$  étant des unités,  $f_j(0, \tau) \in \mathbb{C}[[\tau]]$ ,  $j = 1 \dots k$  n'étant pas une unité et  $\rho_1 \alpha_j + \rho_2 \beta_j$  étant un entier strictement positif puisque  $(\rho_1, \rho_2) \in \check{\sigma}$  et  $(\alpha_j, \beta_j) \in \sigma$  et que  $(\rho_1, \rho_2)$  ne correspond pas à l'équation d'une face de  $\dim 1$ , ceci entraîne

- ou bien que chaque  $f_j(0, \tau)$ ,  $j = 1 \dots k$  est d'ordre en  $\tau$  inférieur ou égal à  $e-1$  ;
- ou bien que  $k = 1$  .

Dans le premier cas, on a

$$f_j(\xi, \tau) = g_j(\tau) + \xi h_j(\xi, \tau) \quad \text{où} \quad v(g_j(\tau)) \leq e-1$$

et

$$\begin{aligned} f_j(\xi_{e-1} \tau^{e-1}, \tau) &= g_j(\tau) + \xi_{e-1} \tau^{e-1} h_j(\xi_{e-1} \tau^{e-1}, \tau) \\ &= W_j(\xi_{e-1}, \tau) \tau^{v(g_j(\tau))} = V_j(\xi_{e-1}, \tau) g_j(\tau) \\ &= V_j(\xi_{e-1}, \tau) f_j(0, \tau) \end{aligned}$$

où  $W_j$  et  $V_j$  sont des unités de  $\mathbb{C}[[\xi_{e-1}, \tau]]$ . On a donc

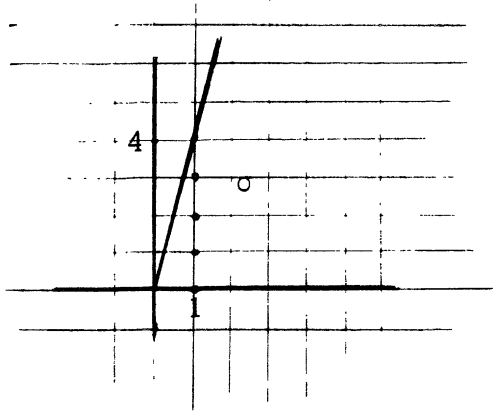
$$\begin{aligned} U_1 &= H_1(\xi_{e-1}, \tau) \prod_{j=1}^k f_j(0, \tau)^{\alpha_j} = G_1(\xi_{e-1}, \tau) \tau^{ea_i} \\ U_2 &= H_2(\xi_{e-1}, \tau) \prod_{j=1}^k f_j(0, \tau)^{\beta_j} = G_2(\xi_{e-1}, \tau) \tau^{eb_i} \end{aligned}$$

ceci montre que  $\varphi \circ p$  est représenté par l'unique point  $(ea_i, eb_i)$  et par

suite  $\omega \circ p$  se relève à la résolution minimale.

Dans le deuxième cas,  $\varphi$  lui-même est représenté par le seul point  $(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $\varphi$  lui-même se relève donc à  $\tilde{X}_\sigma$ .

3.1.2. Un exemple : Considérons la singularité  $A_3$ . Elle est représentée par  $\sigma$  ci-contre et  $M_{X_\sigma, x}$  est engendré par  $x = U_1^4 U_2^{-1}$ ,



$y = U_2$ ,  $z = U_1$  lié par la relation  $xy = z^4$ . Considérons l'application

$\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (X_\sigma, x)$  défini par

$$x = t(\xi + t^2)^4, \quad y = t^3, \quad z = t(\xi + t^2)$$

on a

$$\begin{cases} U_1 = t(\xi + t^2) \\ U_2 = t^3 \end{cases}$$

$\varphi$  est donc représenté par les 2 points  $(1,3)$  et  $(1,0)$  et ne se remonte pas à la résolution minimale.

L'hypothèse de 3.1.1 est satisfaite avec  $e = 3$ . En effet

$$x(0,t) = t^9, \quad y(0,t) = t^3, \quad z(0,t) = t^3$$

$$U_1(0,t) = t^3, \quad U_2(0,t) = t^3.$$

Après un éclatement  $\varphi_1 : (Z_1, 0_1) \rightarrow (X_\sigma, x)$  est représenté par

$$\begin{cases} U_1 = t(\xi t + t^2) = t^2(\xi + t) \\ U_2 = t^3 \end{cases}.$$

$\varphi_1$  est représenté par les 2 points  $(2,3)$  et  $(1,0)$  et  $\varphi_1$  ne se relève pas. Après éclatement de  $0_1$ ,  $\varphi_2 : (Z_2, 0_2) \rightarrow (X_\sigma, x)$  est représenté par

$$\begin{cases} U_1 = t(\xi t^2 + t^2) = t^3(\xi + 1) \\ U_2 = t^3 \end{cases}$$

$\varphi_2$  est représenté par l'unique point  $(3,3)$ .  $\varphi_2$  se remonte.

## § 2 - SURFACES QUASI-HOMOGENES A SINGULARITE ISOLEE

Soit  $V$  une surface algébrique affine munie d'une action de  $\mathbb{C}^*$  n'ayant d'autre point fixe que  $0$ . On rappelle qu'on peut plonger  $V$  dans  $\mathbb{C}^{n+1}$  de façon à ce que l'action de  $\mathbb{C}^*$  soit induite par une bonne action de  $\mathbb{C}^{n+1}$  décrite par

$$\sigma(\lambda; z_0, \dots, z_n) = (\lambda^{q_0} z_0, \dots, \lambda^{q_n} z_n), \quad \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$$

où  $q_0, \dots, q_n$  sont des entiers strictement positifs. En changeant au besoin l'action de  $\mathbb{C}^*$ , on peut supposer  $q_0, \dots, q_n$  premiers entre eux dans leur ensemble.

On suppose que  $V$  a une singularité isolée en  $0$ . Soit  $X$  la courbe projective non singulière quotient de  $V - \{0\}$  par  $\mathbb{C}^*$  et soit  $\tilde{V}$  la normalisation de l'adhérence dans  $V \times X$  du graphe de l'application canonique  $V - \{0\} \rightarrow X$ .  $\tilde{V}$  n'est d'ailleurs rien d'autre que l'éclatement normalisé de l'idéal  $(\dots, z_j^{q_0 \dots \hat{q}_j \dots q_n}, \dots)$  où selon les conventions habituelles  $q_0 \dots \hat{q}_j \dots q_n$  signifie que, dans le produit,  $q_j$  surmonté d'un chapeau a été omis. Alors  $\tilde{V}$  a au plus un nombre fini de points singuliers toriques [3]. Soit  $\tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}$  la résolution minimale de ces singularités. L'action de  $\mathbb{C}^*$  se remonte à  $\tilde{V}_1$ .  $\pi: \tilde{V}_1 \rightarrow V$  est appelé la résolution canonique équivariante de  $V$  [3]. De plus, écrivant que  $\pi^{-1}(0) = X_0 \cup \dots \cup X_r$  où  $X_i$ ,  $i = 0 \dots r$  sont les composantes irréductibles de  $\pi^{-1}(0)$  et où  $X_0$  désigne la transformée stricte de  $X$  par l'application  $\tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}$ , alors  $X_0$  est une courbe projective non singulière isomorphe à  $X$ .  $X_i$ ,  $i \geq 1$  est une courbe non singulière de genre 0 et la matrice  $(X_i, X_j)$  qui est définie négative est de la forme

$-b_0$	1 0 ... 0	1 0 ... 0	
1	$-b_{11}$ 1	0	où $b_{ij} \geq 2$ et où $b_0 \geq 1$ .
0	1 $-b_{12}$ 1	0	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
0	0 1 $-b_{1s_1}$		
1		$-b_{21}$ 1	
0	0	1 0	
$\vdots$		$\vdots$	
0		0 1 $-b_{2s_2}$	

Ceci signifie encore que le graphe construit à partir de  $\pi^{-1}(0)$  en associant un point à chaque  $X_i$  et en joignant 2 points par un trait si les composantes correspondantes se coupent est une étoile.

La résolution canonique n'est pas nécessairement la résolution minimale. Il en est ainsi si et seulement le genre de  $X_0$  est 0 et sa self-intersection  $-b_0 = -1$ . (voir [3]).

On suppose que le genre de  $X_0$  est  $\geq 1$

2.1. DEFINITION. - Soit  $h : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (V, 0)$  un disque testant. On dira que  $h$  est un disque "générique", si désignant par  $\tilde{h} : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\tilde{V}_1, \tilde{x})$  l'unique relèvement de  $h$  à la résolution canonique qui coïncide alors avec la résolution minimale, on a :

- 1)  $\tilde{x}$  est un point non singulier de  $\pi^{-1}(0)$ ,
- 2) l'image de  $\tilde{h}$  est une courbe non singulière transverse à  $\pi^{-1}(0)$  en  $\tilde{x}$ ,
- 3)  $\nu(\tilde{h}^* M_{\tilde{V}_1, \tilde{x}}) = 1$ .

2.2. PROPOSITION. - Soit  $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (V, 0)$  un germe de morphisme analytique. On suppose que identifiant  $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2, 0}$  à  $\mathbb{C}[[\xi, \tau]]$ , l'application

$$\hat{\mathcal{O}}_{V, 0} \rightarrow \mathbb{C}[[\xi, \tau]] \rightarrow \mathbb{C}[[\tau]]$$

$\xi \rightarrow 0, \tau \rightarrow \tau$

qu'on en déduit est un disque testant "générique" au sens de 2.1. Alors, il existe  $\tilde{x} \in \tilde{V}_1$  et  $\tilde{\varphi} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\tilde{V}_1, \tilde{x})$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^2, 0) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & (\tilde{V}_1, \tilde{x}) \\ & \searrow \varphi & \downarrow \pi \\ & & (V, 0) \end{array}$$

commute.

Démonstration : Soit  $\varphi : \Omega \rightarrow V$  un représentant du germe de morphisme où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{C}^2$  contenant 0 . Soit  $\tilde{f} : \tilde{Z} \rightarrow \Omega$  l'image réciproque de  $p : \tilde{V} \rightarrow V$  par  $\varphi$  .  $\tilde{f}$  est un morphisme propre.  $\Omega - \varphi^{-1}(0)$  est un ouvert analytique partout dense et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} - \tilde{f}(\varphi^{-1}(0)) = \tilde{f}^{-1}(\Omega - \varphi^{-1}(0)) & \xrightarrow{\quad} & \tilde{V} - p^{-1}(0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega - \varphi^{-1}(0) & \xrightarrow{\quad} & V - \{0\} \end{array}$$

étant cartésien, puisque la flèche de droite est un isomorphisme, il en est de même de celle de gauche.  $\tilde{Z} - \tilde{f}^{-1}(\varphi^{-1}(0))$  est connexe et contenu dans la partie non singulière de  $\tilde{Z}$  puisque isomorphe à un ouvert analytique d'un ouvert de  $\mathbb{C}^2$  . Son adhérence  $\tilde{\tilde{Z}}$  est donc un sous-espace analytique fermé irréductible de  $\tilde{Z}$  de dimension pure 2 . Soit  $\tilde{\tilde{f}} : \tilde{\tilde{Z}} \hookrightarrow \tilde{Z} \xrightarrow{\tilde{f}} \Omega$  .  $\tilde{\tilde{f}}$  est donc une modification et un morphisme propre. Soit  $Z \rightarrow \tilde{\tilde{Z}}$  une résolution des singularités de  $\tilde{\tilde{Z}}$  et soit  $f : Z \rightarrow \Omega$  le morphisme qu'on en déduit. C'est aussi une modification et un morphisme propre et à la fois  $Z$  et  $\Omega$  sont lisses et connexes de dimension 2 .  $f$  est donc une suite d'éclatements de points. Quitte à restreindre  $\Omega$  , il existe  $f_i : Z_i \rightarrow Z_{i-1}$  ,  $i = 1 \dots r$  tel que  $Z_0 = \Omega$  et  $f = f_r \circ f_{r-1} \circ \dots \circ f_1$  et des points  $q_i \in Z_i$  ,  $i = 0 \dots r-1$  tels que  $q_0 = 0, \dots$   $f_i(q_i) = q_{i-1}$  et que  $f_i$  soit l'éclatement de  $q_{i-1}$  sur  $Z_{i-1}$  . Soit  $C_r = f_r^{-1}(q_{r-1})$  ,  $C_r$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1$  , et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\theta} & \tilde{V} \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ \Omega & \xrightarrow{\quad} & V \end{array} :$$

Bien que  $\theta$  ne soit pas propre,  $\theta|_{C_r}$  l'est.  $\theta(C_r)$  est un fermé analytique irréductible dans  $p^{-1}(0) = X$  . Ce n'est pas  $X$  tout entier, car d'après la formule de Hurwitz , ceci impliquerait que le genre de  $X$  et de  $X_0$  serait 0 .  $\theta(C_r)$  est donc un point  $\tilde{x}$  .



$f_r$  induisant un isomorphisme analytique  $Z - C_r \rightarrow Z_{r-1} - q_{r-1}$ ,  $\theta$  fournit une application analytique  $Z_{r-1} - q_{r-1} \rightarrow \tilde{V}$ . Nous allons voir qu'elle se prolonge à  $Z_{r-1}$ , c'est-à-dire qu'une fonction analytique sur  $\tilde{V}$  au voisinage de  $\tilde{x}$  se remonte sur  $Z_{r-1} - q_{r-1}$  en une fonction analytique qui se prolonge analytiquement en  $q_{r-1}$ . D'après le principe d'extension de Riemann, il suffit que cette dernière soit bornée. Or  $f_r$  étant propre, il existe une base de voisinage de  $q_{r-1}$  dont l'image réciproque est un voisinage relativement compact de  $C_r$ .  $\theta$  se factorise donc à travers  $f_{r-1}$ .

Par récurrence, ceci entraîne que  $\theta$  se factorise à travers  $f$  en un morphisme  $\tilde{\varphi} : \Omega \rightarrow \tilde{V}$ . Soit  $\tilde{x} = \tilde{\varphi}(0)$

- ou bien  $\tilde{x}$  est un point non singulier de  $\tilde{V}$ . Alors  $\tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}$  est un isomorphisme au voisinage de  $\tilde{x}$  et  $\tilde{\varphi}$  fournit le relèvement de  $\varphi$  à la résolution minimale souhaitée (sans hypothèse sur la généricité de  $\varphi(0, \tau)$ ) ;

- ou bien  $\tilde{x}$  est un point singulier de  $\tilde{V}$ .  $\tilde{V}$  a alors en  $\tilde{x}$  une singularité torique. Le germe  $\tilde{\varphi} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\tilde{V}, \tilde{x})$  satisfait les hypothèses de § 1, 3.1.1 avec  $e = 1$ . Il existe alors  $\tilde{x}_1 \in X_i$ ,  $i \geq 1$  et, puisque  $\tilde{V}_1$  est la résolution minimale de  $\tilde{V}$ , un germe  $\tilde{\varphi}_1 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\tilde{V}_1, \tilde{x}_1)$  relevant  $\varphi$ .

On suppose que le genre de  $X_0$  est 0.

2.3. PROPOSITION. - Soit  $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (V, 0)$  un germe de morphisme analytique. On suppose que identifiant  $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2, 0}$  à  $\mathbb{C}[[\xi, \tau]]$ , l'application :

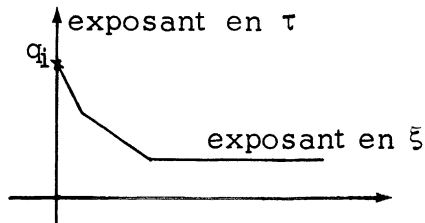
$$\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^2, 0} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{V, 0} \rightarrow \mathbb{C}[[\xi, \tau]] \xrightarrow[\tau \mapsto \tau]{\xi \mapsto 0} \mathbb{C}[[\tau]] ,$$

qu'on en déduit est défini par :

$$z_i = a_i \tau^{q_i} + \dots, \quad a_i \neq 0, \quad i = 0 \dots n \quad \text{où } q_i \text{ est le poids de } z_i .$$

Alors, il existe  $\tilde{x}$  un point de  $X_0$  n'appartenant à  $X_i$ ,  $i \geq 1$  et  $\tilde{\varphi} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\tilde{V}_1, \tilde{x})$  relevant  $\varphi$ , si  $-b_0$  la self-intersection de  $X_0$  est différente de  $-1$ .

Démonstration : Pour chaque série  $z_i(\xi, \tau)$ , construisons le po-



lygone de Newton et soit  $d_i$  l'opposé de l'inverse de la pente du 1er côté.

Soit  $d = \inf_{i=0 \dots n} d_i$ ,  $d$  est ou  $\infty$  ou un nombre rationnel strictement positif.

Dans le premier cas, on peut écrire :

$$z_i(\xi, \tau) = a_i V_i(\xi, \tau) \tau^{q_i} \text{ où } V_i(0, 0) = 1.$$

Soit  $P = (\dots, z_i^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n}, \dots)$ .  $P$  se relève à  $\mathbb{C}\{\xi, \tau\}$  en l'idéal principal  $\tau^{q_0 \dots q_n}$  et  $\varphi$  se factorise par  $\tilde{V}$  l'éclatement de  $P$  en  $\tilde{\varphi}$  tel que  $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{x}$  soit non singulier.

Dans le deuxième cas, soit  $d = \frac{m}{n}$  la forme irréductible de  $d$ .

On peut écrire :

$$z_i = L_i + R_i$$

où  $L_i$  est quasi-homogène de degré  $q_i m$  si on donne à  $\xi$  le poids  $n$  et à  $\tau$  le poids  $m$  et  $R_i$  est somme de monômes de poids strictement plus grands.  $V$  étant stable par l'action de  $\mathbb{C}^*$  est défini par un idéal homogène  $I$ . Soit  $f$  un élément homogène de poids  $q$  de  $I$ . On a :

$$f = \sum c_{A_0 \dots A_n} z_0^{A_0} \dots z_n^{A_n}$$

$$\sum q_i A_i = q$$

$$f(\dots, z_i(\xi, \tau), \dots) \equiv 0.$$

Ceci entraîne que

$$\begin{aligned} & \sum c_{A_0 \dots A_n} (L_0 + R_0)^{A_0} \dots (L_n + R_n)^{A_n} \\ &= \sum c_{A_0 \dots A_n} L_0^{A_0} \dots L_n^{A_n} + \text{somme de monômes en } (\xi, \tau) \text{ de poids } > dm \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

On doit donc avoir  $f(L_0, \dots, L_n) \equiv 0$  et on détermine une application algé-

brique  $\mathbb{C}^2 \rightarrow V$  définie par

$$z_i(\xi, \tau) = L_i(\xi, \tau) = a_i \tau^{q_i} + a_{q_i - n, m}^i \tau^{q_i - n} \xi^m + \dots$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$z_i(\xi, \tau) = a_i \tau^{\alpha_{i1}} \prod_j (\tau^{n - \lambda_j} \xi^m)^{\alpha_{ij}}, \quad i = 0 \dots n, \quad j = 2 \dots k$$

où  $\alpha_{ij}$  sont des entiers positifs ou nuls,  $\lambda_j$  des nombres complexes  $\neq 0$  et où

$$q_i = \alpha_{i1} + n \sum_{j>1} \alpha_{ij}$$

et  $\alpha_{0j}, \dots, \alpha_{nj}$  non tous nuls pour chaque  $j = 2 \dots k$ .

Soit encore  $f$  un élément quelconque de poids  $q$  de  $I$ . On a

$$\begin{aligned} & \sum c_{A_0 \dots A_n} a_0^{A_0} \dots a_n^{A_n} \tau^{\sum A_i (q_i - n \sum_{j>1} \alpha_{ij})} \prod_{j>1} (\tau^{n - \lambda_j} \xi^m)^{\sum A_i \alpha_{ij}} \equiv 0 \\ & = \tau^q \left( \sum c_{A_0 \dots A_n} \frac{a_0^{A_0} \dots a_n^{A_n} \prod_{j>1} (\tau^{n - \lambda_j} \xi^m)^{\sum A_i \alpha_{ij}}}{\sum_{i, j>1} A_i \alpha_{ij} (\tau^n)^i} \right). \end{aligned}$$

La fraction rationnelle en  $(\tau, \xi)$ , (1), écrite dans la parenthèse est donc elle-même nulle.

Considérons l'application  $\mathbb{C}[\tau_1, \xi_1] \rightarrow \mathbb{C}[\tau, \xi]$  qui envoie  $\tau_1$  sur  $\tau^n$  et  $\xi_1$  sur  $\xi^m$ . C'est une injection. Elle s'étend au corps des fractions en une application également injective. Or la fraction rationnelle (1) est l'image de (2)

$$\sum c_{A_0 \dots A_n} \frac{a_0^{A_0} \dots a_n^{A_n} \prod_{j>1} (\tau_1^{n - \lambda_j} \xi_1^m)^{\sum A_i \alpha_{ij}}}{\sum_{i, j>1} A_i \alpha_{ij} \tau_1^i}.$$

(2) est donc aussi identiquement nulle, ainsi que la fraction obtenue après multiplication par  $\tau_1^q$ . Or, ce n'est autre, puisque  $q = \sum q_i A_i$ ,

que

$$\sum c_{A_0 \dots A_n} a_0^{A_0} \dots a_n^{A_n} \tau_1^{\sum A_i (q_i - \sum_{j>1} \alpha_{ij})} \prod_{j>1} (\tau_1 - \lambda_j \xi_1)^{\sum A_i \alpha_{ij}}$$

$$= f(\dots, a_i \tau_1^{q_i - \sum_{j>1} \alpha_{ij}} \prod_j (\tau_1 - \lambda_j \xi_1)^{\alpha_{ij}}, \dots) .$$

Ceci détermine donc une autre application algébrique  $\Phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow V$  définie par

$$z_i(\xi, \tau) = a_i \tau^{q_i - \sum_{j>1} \alpha_{ij}} \prod_{j>1} (\tau - \lambda_j \xi)^{\alpha_{ij}} = \Lambda_i(\xi, \tau) , i = 0 \dots n$$

où  $\Lambda_i(\xi, \tau)$  sont des polynômes homogènes de degré  $q_i$  si on donne à  $\xi$  et  $\tau$  le degré 1 .

2.3.1. LEMME. - Soit  $f : Z \rightarrow \mathbb{C}^2$  l'éclatement de centre 0 ,  
 $p : \tilde{V} \rightarrow V$  l'éclatement normalisé de  $(\dots, z_i^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n}, \dots)$  .  
Il existe  $\Phi_1 : Z \rightarrow \tilde{V}$  tel que  $p \circ \Phi_1 = \Phi \circ f$  .

Démonstration :  $Z$  étant normal, il suffit de montrer que  $\Phi \circ f$  se factorise à travers l'éclatement, ou encore que  $P = (\dots, z_j^{q_0 \dots \hat{q}_j \dots q_n}, \dots)$  se remonte sur  $Z$  en un Idéal inversible. Or  $Z$  est recouvert par 2 cartes  $Z_1$  et  $Z_2$  . Soit  $(\xi', \tau')$  (resp.  $(\xi'', \tau'')$ ) un système de coordonnées sur  $Z_1$  (resp.  $Z_2$ ) tel que  $\xi \circ f|_{Z_1} = \xi' \tau'$  ,  $\tau \circ f|_{Z_1} = \tau'$  (resp.  $\xi \circ f|_{Z_2} = \xi''$  ,  $\tau \circ f|_{Z_2} = \xi'' \tau''$ ) et on a :

$$z_i^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n} \circ \Phi \circ f|_{Z_1} = a_i^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n} \tau'^{q_0 \dots q_n} \prod_{j>1} (1 - \lambda_j \xi')^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n \alpha_{ij}} .$$

Sur  $Z_1$  le diviseur exceptionnel  $C$  a pour équation  $\tau' = 0$  . En un point  $c$  de  $C$  de coordonnées  $\tau' = 0$  ,  $\xi'$  différent de tous les

$1/\lambda_j$  ,  $j>1$  ,  $P \cdot \mathcal{O}_{Z,c} = \tau'^{q_0 \dots q_n} \mathcal{O}_{Z,c}$  . Au point  $c_j$  de coordonnées

$$\tau' = 0 , \xi' = 1/\lambda_j , P \cdot \mathcal{O}_{Z,c_j} = \tau'^{q_0 \dots q_n (1 - \lambda_j \xi')} \inf_i q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n \alpha_{ij}$$

$$z_i^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n} \circ \Phi \circ f|_{Z_2} = a_i^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n} \xi^{q_0 \dots q_n} \tau^{q_0 \dots (q_i - \sum_{j>1} \alpha_{ij}) \dots q_n} \prod_{j>1} (\tau^{-\lambda_j})^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n \alpha_{ij}} .$$

Sur  $Z_2$ , le diviseur exceptionnel  $C$  a pour équation  $\xi = 0$ . Au point  $c = (0,0)$  qui est le seul qui reste à examiner

$$P.O_{Z,C} = \xi^{q_0 \dots q_n} \tau^{\inf_i q_0 \dots (q_i - \sum_{j>1} \alpha_{ij}) \dots q_n} .$$

2.3.2. LEMME. - Le fermé algébrique irréductible de  $X = p^{-1}(0)$  image du diviseur exceptionnel  $C$  de  $f$  n'est pas  $X$  tout entier.

Démonstration : Supposons que  $\Phi_1(C) = X$  et soit  $\varphi_1 : C \rightarrow X$  le morphisme algébrique surjectif nécessairement fini et plat qu'on en déduit. Soit  $n$  le degré de  $\varphi_1$ . Soient  $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_k$  les points de  $C$  où  $\varphi_1$  est ramifié et soit  $e_i$  l'indice de ramification de  $\varphi_1$  en  $\tilde{y}_i$ . Puisque  $C$  et  $X$  sont des courbes projectives non singulières de genre 0, la formule de Hurwitz entraîne que

$$2 = 2n - \sum_{i=1 \dots k} (e_i - 1)$$

ou

$$\sum_{i=1 \dots k} (e_i - 1) = 2(n-1) .$$

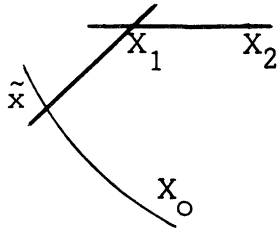
Soit  $\tilde{y}$  un point quelconque de  $C$ ; si  $\varphi_1(\tilde{y})$  est un point non singulier de  $\tilde{V}$ ,  $\tilde{V}$  coïncide avec la résolution minimale de  $V$  au voisinage de ce point; si  $\varphi_1(\tilde{y})$  est un point singulier de  $\tilde{V}$ ,  $\tilde{V}$  y a une singularité torique. Soit  $\tilde{x}$  le point du cycle exceptionnel de  $\tilde{V}_1$  appartenant à  $X_O$  la transformée stricte de  $X$  au-dessus de  $\varphi_1(\tilde{y})$  et considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 (X_0, \tilde{x}) & \xrightarrow{\quad} & (\tilde{V}_1, \tilde{x}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (X, \varphi_1(\tilde{y})) & \xrightarrow{(1)} & (\tilde{V}, \varphi_1(\tilde{y})) \\
 \uparrow & & \uparrow \tilde{\pi}_1 \\
 (C, \tilde{y}) & \xrightarrow{\quad} & (Z, \tilde{y})
 \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des immersions.

Ensemblistement,  $C$  s'envoie sur  $X$  qui se relève en  $X_0$ .

Soient  $X_1, X_2, \dots$  les composantes de  $\pi^{-1}(0)$  qui s'envoient sur  $\varphi_1(\tilde{y})$  par le morphisme canonique  $\tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}$ .



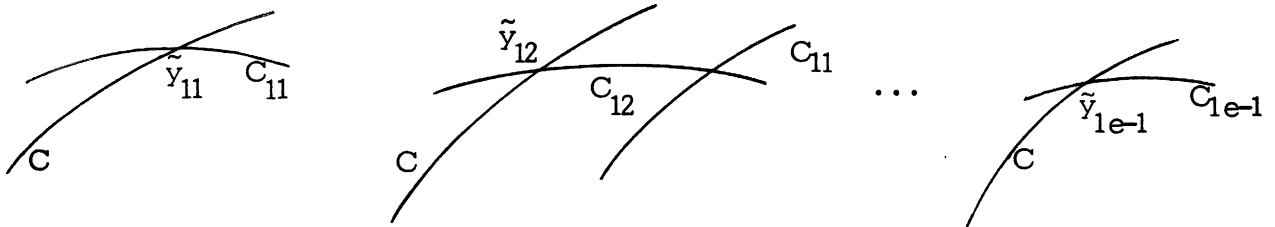
On peut supposer ces composantes indexées de façon que  $\tilde{x} \in X_0 \cap X_1$ .  $X_0$  est alors une courbe lisse transverse à  $X_1$  en  $\tilde{x}$ . La flèche (1) est un disque testant "générique" au sens de §1, 2.3.3,

puisque  $(X_0, \tilde{x}) \rightarrow (X, \varphi_1(\tilde{y}))$  est un isomorphisme. La flèche

$(C, \tilde{y}) \rightarrow (\tilde{V}, \varphi_1(\tilde{y}))$  satisfait les hypothèses de §1, 3.1.1 où

$e$  = indice de ramification de  $\varphi_1$  en  $\tilde{y}$ . On en déduit que si  $e = 1$

$(Z, \tilde{y}) \rightarrow (\tilde{V}, \varphi_1(\tilde{y}))$  admet un relèvement à  $(\tilde{V}_1, \tilde{x})$ . Si  $\tilde{y} = \tilde{y}_1$  par exemple, désignons par  $Z_{11}$  l'éclatement de  $\tilde{y}_1$ , par  $C_{11}$  le nouveau diviseur exceptionnel obtenu et notons  $C$  (par abus de notation) la transformée stricte de  $C$ . Soit  $\tilde{y}_{11}$  le point de  $C_{11}$  sur  $C$ . Soient  $Z_{12}$  l'éclatement de  $\tilde{y}_{11}$ ,  $C_{12}$  le nouveau diviseur exceptionnel obtenu et notons encore  $C$  et  $C_{11}$  les transformées strictes de  $C$  et  $C_{11}$ .



etc...

D'après 3.1.1,  $(Z_{1e-1}, \tilde{y}_{1e-1}) \rightarrow (\tilde{V}, \varphi_1(\tilde{y}))$  se relève à  $\tilde{V}_1$ .

D'autre part, le morphisme  $C \rightarrow X$  obtenu après transformée stricte étant

isomorphe à  $\varphi_1$ , ses seuls points de ramification sont les transformées strictes de  $\tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_k$ . Finalement, on construit  $f_1 : Z_1 \rightarrow Z$  obtenu par suite finie d'éclatements de points tel que, désignant par  $C_1$  la transformée stricte de  $C$

$$(C_1, C_1) \geq -1 - \sum_{i=1 \dots k} (e_i - 1) = -1 - 2(n-1) = -2n+1$$

et tel qu'au voisinage de tout point  $\tilde{y}_1$  de  $C_1$ ,  $(Z_1, \tilde{y}) \rightarrow (\tilde{V}, \phi_1 \circ f_1(\tilde{y}))$  se relève à  $\tilde{V}_1$ .  $C_1$  étant compact, il existe  $U_1$  un voisinage de  $C_1$  et  $\theta : U_1 \rightarrow \tilde{V}_1$  tel que  $\pi \circ \theta = p \circ \phi_1 \circ f_1|_{U_1}$  (un éclatement fait diminuer la self intersection de  $-1$ ).

Toujours à cause de la compacité de  $C_1$  et bien que  $\theta$  ne soit pas propre, nous pouvons appliquer la formule de projection :

$$\theta_*(C_1, \theta^*X_O) = (\theta_*(C_1), X_O) .$$

Nous allons montrer que  $\theta^*X_O = C_1 + \sum n_i \Gamma_i$ , où  $n_i$  sont des entiers non négatifs.

Soit  $h : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (V, 0)$  le disque testant défini par

$$z_i(\tau) = \Lambda_i(0, \tau) = a_i \tau^{q_i}, \quad i = 0 \dots n .$$

Soit  $\tilde{h}$  son relèvement à  $\tilde{V}$  et soit  $\tilde{x} = \tilde{h}(0)$ .  $\tilde{x}$  est un point de  $X$  où  $\tilde{V}$  est non singulier. Soit  $g : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  le disque testant défini par

$$\xi \circ g = 0, \quad \tau \circ g = \tau \quad (*)$$

On a  $\phi \circ g = h$ . Soit  $\tilde{g}$  le relèvement de  $g$  à  $Z$  et soit  $\tilde{y} = \tilde{g}(0)$ . On a  $\phi_1 \circ \tilde{g} = \tilde{h}$  et donc  $\phi_1(\tilde{y}) = \tilde{x}$ .  $\tilde{x}$  étant non singulier sur  $\tilde{V}$ ,  $\tilde{y}$  n'est pas un des points de  $C$  qu'on a dû faire éclater.  $\tilde{g}_1$  le relèvement de  $g$  à  $Z_1$  est donc tel que  $\tilde{y}_1 = \tilde{g}_1(0) \in C_1$  et il existe un système de coordonnées  $(\xi', \tau')$  sur  $Z_1$  au voisinage de  $\tilde{y}_1$  tel que  $\tau' = 0$  soit l'équation de  $C_1$  et que

$$\xi' \circ \tilde{g}_1 = 0, \quad \tau' \circ \tilde{g}_1 = \tau .$$

D'autre part, soient  $\tilde{h}_1$  le relèvement de  $h$  à  $\tilde{V}_1$  et  $\tilde{x}_1 = \tilde{h}_1(0)$ . Il existe un système de coordonnées  $(u, v)$  sur  $\tilde{V}_1$  au voisinage de

$\tilde{x}_1$  tel que  $v = 0$  soit l'équation de  $X_0$  et que

$$u \circ \tilde{h}_1 = 0, \quad v \circ \tilde{h}_1 = \tau. \quad (**)$$

On a aussi  $\theta \circ \tilde{g}_1 = \tilde{h}_1$  et écrivant que

$$u \circ \theta = R(\xi', \tau'), \quad v \circ \theta = S(\xi', \tau')$$

on doit avoir compte tenu de (\*) et (\*\*)

$$R(0, \tau) = 0 \quad \text{et} \quad S(0, \tau) = \tau$$

et il existe  $R_1(\xi', \tau')$  et  $S_1(\xi', \tau')$  dans  $\mathbb{C}\{\xi', \tau'\}$  tels que

$$R(\xi', \tau') = \xi'^k R_1(\xi', \tau'), \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 1$$

$$S(\xi', \tau') = \tau' + \xi' S_1(\xi', \tau').$$

Or localement, l'image de  $C_1$  est tout  $X_0$ . Celle-ci est décrite paramétriquement par  $u = \xi'^k R_1(\xi', 0)$ ,  $v = \xi' S_1(\xi', 0)$ ;  $v = 0$  étant l'équation de  $X_0$  on doit avoir  $R_1(\xi', 0) \neq 0$  et  $S_1(\xi', 0) = 0$ . Il existe donc  $S_2(\xi', \tau') \in \mathbb{C}\{\xi', \tau'\}$  tel que  $S_1 = \tau' S_2(\xi', \tau')$  et  $S(\xi', \tau') = \tau'(1 + \xi' S_2(\xi', \tau'))$ . Ceci montre qu'au voisinage de  $\tilde{y}_1$  l'image réciproque du diviseur  $X_0$  est  $C_1$  et que  $\theta^* X_0 = C_1 + \sum n_i \Gamma_i$ . On en déduit que

$$(C_1, C_1) + \sum n_i (C_1, \Gamma_i) = n(X_0, X_0)$$

et que

$$n(X_0, X_0) \geq (C_1, C_1)$$

puisque  $(C_1, \Gamma_i) > 0$ . Comme  $(C_1, C_1) \geq -2n+1$ ,  $n(X_0, X_0) \geq -2n+1$  et  $(X_0, X_0) \geq -2 + \frac{1}{n}$ . Comme  $(X_0, X_0) = -b_0$  est un entier négatif, cette inégalité entraîne que  $-b_0 = -1$  contrairement à l'hypothèse. L'image de  $C$  par  $\tilde{\pi}_1$  est donc un point.

**2.3.3. LEMME.** - Si  $\varphi_1 : C \rightarrow X$  n'est pas surjectif, ou bien  $\Lambda_i(\xi, \tau) = a_i \tau^{q_i}$ ,  $i=0 \dots n$  ou bien il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \neq 0$  tel que  $\Lambda_i(\xi, \tau) = a_i (\tau - \lambda \xi)^{q_i}$ .

Démonstration : Soit  $q : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$  l'éclatement de l'idéal



$Q = (\dots, z_i^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n}, \dots)$  et  $\Phi_2 : Z \rightarrow \mathcal{X}$  ; le morphisme obtenu en composant le morphisme canonique  $\tilde{V} \rightarrow \mathcal{X}$  avec  $\Phi_1$  . Puisque  $Q$  est engendré par une suite régulière,  $q^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}^n$  et  $\varphi_2 : C \simeq \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$  induit par  $\varphi_1$  est décrit par :

$$(\xi; \tau) \longmapsto \left( \dots; a_i^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n} \tau^{q_0 \dots (q_i - \sum_{j>1} \alpha_{ij}) \dots q_n} \prod_j (\tau - \lambda_j \xi)^{q_0 \dots \hat{q}_i \dots q_n \alpha_{ij}}; \dots \right)$$

et puisque l'image de  $C$  par  $\varphi_1$  est un point, il en est de même de celle par  $\varphi_2$  . Ceci entraîne que  $q_k \alpha_{ij} = q_i \alpha_{kj}$  ,  $k = 0 \dots n$  ,  $i = 0 \dots n$  ,  $j > 1$  . (On remarque que ceci est d'ailleurs la condition pour que  $Q$  se remonte sur  $\mathbb{C}^2$  en un idéal inversible.) Il existe donc  $p_j \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha_{ij} = p_j q_i$  et  $q_0, \dots, q_n$  étant le système des poids de  $z_0, \dots, z_n$  , on a en fait  $p_j \in \mathbb{N}$  . Ou bien  $p_j = 0$  ,  $j > 1$  et  $\Lambda_1(\xi, \tau) = a_i \tau^{q_i}$  , ou bien, puisque  $q_i - \sum_{j>1} \alpha_{ij} = q_i - q_i (\sum_{j>1} p_j)$  doit être un entier positif ou nul, il y a un seul  $\lambda_j$  non nul et  $\alpha_{ij} = q_i$  , de sorte que

$$\Lambda_1(\xi, \tau) = a_i (\tau - \lambda_1 \xi)^{q_i} .$$

Revenons maintenant à la considération de  $\varphi$  . Puisque

$$q_i = \alpha_{i1} + n \prod_{j>1} \alpha_{ij} = \alpha_{i1} + n q_i ,$$

on doit avoir  $\alpha_{i1} = 0$  ,  $i = 0 \dots n$  et  $n = 1$  , ce qui entraîne que :

$$L_i(\xi, \tau) = a_i (\tau - \lambda_1 \xi^m)^{q_i} , \text{ pour tout } i$$

puisque'on a supposé  $d = \frac{m}{n} = m < \infty$  .

Effectuons le changement de variable  $\tau_1 = \tau - \lambda_1 \xi^m$  ,  $\xi_1 = \xi$  . Les hypothèses de 2.3 ne sont pas affectées avec ces nouvelles variables. La construction des polygones de Newton des  $z_i(\tau_1 + \lambda_1 \xi_1^m, \xi_1)$  nous fournit  $d_1$  ou  $\infty$  ou rationnel strictement plus grand que  $d$  . Dans le 1er cas, on obtient immédiatement le relèvement  $\tilde{\varphi}$  , dans le 2e cas, un

nouveau changement de variables  $\tau_2 = \tau_1 - \lambda_2 \xi_1^{m_2}$ ,  $\xi_2 = \xi_1$ ,  $m_2 > m$ , etc... Si aucun des  $d$  fournit par les polygones de Newton n'est infini, on construit de proche en proche un changement de variable formel

$$\tau_\infty = \tau - \lambda_1 \xi^m - \lambda_2 \xi^{m_2} - \dots, \quad \xi_\infty = \xi$$

tel que  $z_i(\tau_\infty + \sum \lambda_i \xi_\infty^{m_i}, \xi_\infty) = a_i V_i(\xi_\infty, \tau_\infty) \tau_\infty^{q_i}$  où  $V_i(0,0) = 1$ . Il reste à voir que ce changement de variable est en fait analytique. Soit  $(X_i, 0)$  le germe de courbe analytique de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  défini par l'équation  $z_i(\xi, \tau)$ ,  $(\hat{X}_i, 0)$  le germe de courbe algébrique de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  défini par la même équation vu comme série formelle. Nous venons de montrer que  $(\hat{X}_i, 0)_{\text{red}}$  est un germe de courbe algébrique non singulier indépendant de  $i$ .

$(X_i, 0)_{\text{red}}$  est donc un germe de courbe analytique non singulier indépendant de  $i$ . L'équation  $\tau = \sum \lambda_i \xi^{m_i}$  définissant  $(\hat{X}_i, 0)_{\text{red}}$  dans  $(\mathbb{C}^2, 0)$  définit donc aussi  $(X_i, 0)_{\text{red}}$  et  $\tau - \sum \lambda_i \xi^{m_i} \in \mathbb{C}\{\xi, \tau\}$ .

2.4. Remarque : On a montré en fait que  $z_i(0, \tau) = a_i \tau^{q_i} + \dots$ ,  $a_i \neq 0$ , il existe  $\tau + \sum \lambda_i \xi^{m_i} \in \mathbb{C}\{\xi, \tau\}$  tel que  $z_i(\tau + \sum \lambda_i \xi^{m_i}, \xi) = a_i V_i(\xi, \tau) \tau^{q_i}$  où  $V_i(0,0) = 1$ ,  $V_i \in \mathbb{C}\{\xi, \tau\}$  pourvu que  $(X_0, X_0) \neq -1$ , ce qui signifie exactement que  $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (V, 0)$  se relève à la résolution canonique.

ex.1 : Soit  $V$  défini par  $x^3 + y^3 + z^4 = 0$ . La résolution minimale de  $V$  est obtenu en éclatant une fois l'origine. Le cycle exceptionnel est composé de  $3\mathbb{P}^1$  se coupant transversalement 2 à 2 en un même point. La résolution canonique de  $V$  est obtenu en éclatant ce point. L'application  $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow V$  défini

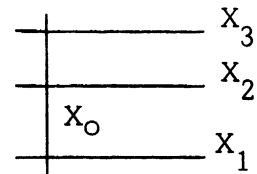
$$x = -2\tau(\tau^2 + 3\xi^2)(\tau + \xi)$$

$$y = -2\tau(\tau^2 + 3\xi^2)(\tau - \xi)$$

$$z = -2\tau(\tau^2 + 3\xi^2)$$

se relève à la résolution minimale (puisque  $z(\xi, \tau)$  engendre l'idéal  $x(\xi, \tau)$ ,  $y(\xi, \tau)$ ,  $z(\xi, \tau)$ ) et non à la résolution canonique.

Soit  $f : Z \rightarrow \mathbb{C}^2$  l'éclatement de 0. Il existe  $\phi : Z \rightarrow \tilde{V}_1$  tel que  $\pi \circ \phi = \psi \circ f$ . Soit  $\pi^{-1}(0) = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3$  ;



Soit  $C = f^{-1}(0)$  ;  $\varphi^{-1}(0) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\tau = 0$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\tau + i\sqrt{3}\xi = 0$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\tau - i\sqrt{3}\xi = 0$ . Soit  $\tilde{\Gamma}_i$  la transformée stricte de  $\Gamma_i$ ,  $i = 1 \dots 3$ ,  $\phi(\tilde{\Gamma}_i) = X_i$ ,  $i = 1 \dots 3$  et  $\phi^*(X_0) = C$  (en tant que cycle). Ici  $n = \deg \varphi_1 : C \rightarrow X_0 = 1$  et  $(C, C) = -1 = (X_0, X_0)$ .

ex. 2 : Soit  $V$  défini par  $x^2 + y^2 + z^3 = 0$  la singularité  $A_2$ . La résolution minimale est obtenue en éclatant une fois l'origine. Le cycle exceptionnel est composé de  $2\mathbb{P}^1$  se coupant transversalement en un point. La résolution canonique de  $V$  est obtenue en éclatant ce point. L'application  $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow V$  défini par

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left[ \frac{9}{8} \tau^3 + \frac{3}{4} \tau^2 \xi + \frac{3}{2} \tau \xi^2 + \xi^3 \right] = \frac{1}{2} (\tau^3 + (\frac{1}{2} \tau + \xi)^3) \\ y &= \frac{1}{2i} \left[ \frac{7}{8} \tau^3 - \frac{3}{4} \tau^2 \xi - \frac{3}{2} \tau \xi^2 - \xi^3 \right] = \frac{1}{2i} (\tau^3 - (\frac{1}{2} \tau + \xi)^3) \\ z &= -\frac{1}{2} \tau^2 - \tau \xi = -\tau (\frac{1}{2} \tau + \xi) \end{aligned}$$

ne se relève ni à la résolution minimale, ni à la résolution canonique.

Soit  $f : Z \rightarrow \mathbb{C}^2$  l'éclatement de 0 et  $\varphi_1 : C = f^{-1}(0) \rightarrow X = p^{-1}(0)$  l'application qu'on déduit. Son degré  $n$  est 3. Il y a 2 pts de ramification  $y_1$  et  $y_2$  d'indice de ramification 2 chacun. Soit  $Z_1$  l'espace obtenu en faisant éclater  $y_1$  et  $y_2$ .  $C_1$  la transformée stricte de  $C$ ,  $C_{11}$  et  $C_{12}$  les 2 nouveaux diviseurs exceptionnels. Il existe un voisinage de  $C_1$  dans  $Z_1$ ,  $U_1$  et  $\theta : U_1 \rightarrow \tilde{V}_1$  tel que  $\pi \circ \theta = \varphi \circ f \circ f_1|_{U_1}$ . Soit  $\pi^{-1}(0) = X_0 \cup X_1 \cup X_2$ .  $C_{11}$  s'envoie sur  $X_1$ ,  $C_{12}$  s'envoie sur  $X_2$  et  $\theta^* X_0 = C_1$ . On a

$$(C_1, C_1) = -3 = n(X_0, X_0) .$$

ex. 3 : Soit  $V$  défini par  $x^2 + y^3 + z^5 = 0$ ,  $x$  est de poids 15,  $y$  de poids 10,  $z$  de poids 126. L'application  $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow V$  défini

$$x = -t^{12}(t+\xi)^{10}(2t+\xi)^8$$

$$y = -t^8(t+\xi)^7(2t+\xi)^5$$

$$z = -t^5(t+\xi)^4(2t+\xi)^3$$

ne se relève pas à la résolution minimale qui coïncide avec la résolution canonique.

## REFERENCES

- [1] BRIESKORN - Rationale Singularitäten komplexer Flächen. Inventiones Math. 1968, vol.4.
- [2] KEMPF-KNUDSON - MUMFORD - SAINT DONAT - Toroidal Embeddings Lecture. Notes 339.
- [3] P. ORLIK - Serfert manifolds. Lecture notes 291.
- [4] G. GONZALEZ-SPRINBERG - Eventails en dimension 2 et transformé de Nash. Publications du Centre de Mathématiques de l'E.N.S. 45, rue d'Ulm, Paris.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I  
 LA FACULTÉ DE SCIENCES  
 MATHÉMATIQUES PURES  
 INSTITUT FOURIER

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier  
 dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble  
 associé au C.N.R.S.  
 B.P. 116  
 38402 ST MARTIN D'HERES (France)