

# SÉMINAIRE SUR LES SINGULARITÉS DES SURFACES

## ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. L. BRYLINSKI

### Éventails et variétés toriques

*Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique)* (1976-1977), exp. n° 15, p. 1-45

[http://www.numdam.org/item?id=SSS\\_1976-1977\\_\\_\\_\\_A17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A17_0)

© Séminaire sur les singularités des surfaces  
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire sur les singularités des surfaces implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L E S   S I N G U L A R I T E S

D E S   S U R F A C E S

E V E N T A I L S   E T   V A R I E T E S   T O R I Q U E S

J. L. BRYLINSKI

22 Mars 1977



## INTRODUCTION.

On verra ici exposée la description des variétés  $X^n$  sur un corps  $k$  algébriquement clos munies d'une action fidèle d'un tore  $T^n$ , en termes de familles de cônes polyédraux dans un espace vectoriel.

Cet exposé suit pour l'essentiel celui de Saint-Donat [2, ch. I]. On n'y parle pas du groupe de Cremona. On a donné toutes les démonstrations que Saint-Donat laisse au lecteur. On a parfois substantiellement modifié les démonstrations qu'il donnait, de manière à éliminer les calculs explicites, et l'emploi de coordonnées. Je signale la démonstration simple du lemme de Gordan.

En plus de la matière de [2, ch. I], on trouvera ici :

- un traitement plus complet des variétés toriques de dimension 2 ;
- une étude topologique des variétés toriques sur le corps  $\mathbb{C}$ , incluant la description du quotient de ces variétés pour l'action du tore compact (c-T) comme compactification d'un espace vectoriel par "adjonction de points idéaux à la Siegel" ;
- la description d'après Demazure [1] du groupe de Picard de ces variétés dans le cas lisse ; la surjectivité de la flèche :  $\text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$  dans le cas  $X$  propre ;
- une étude des morphismes de variétés toriques "avec changement de tore", et un critère de trivialité locale pour ces morphismes.

Il manque à cet exposé l'étude des déformations des variétés toriques. Il n'y a par contre rien à attendre de leurs structures de Hodge mixtes, ni donc de leurs "motifs". En ce qui concerne le fait que ces variétés sont de Cohen-Macaulay, la démonstration de Kushnirenko [4] est la plus constructive : elle sera rédigée dans un prochain exposé.

Il faudrait enfin refaire la théorie, dans le même esprit, sur un corps non algébriquement clos. Pour l'instant, si  $k$  est un corps, et  $T$  un tore sur  $k$ , on ne sait pas trouver une compactification lisse,  $k$ -rationnelle, de  $T$  ; il semble néanmoins que, pour  $\text{car}(k) = 0$ , on puisse par les méthodes de Saint-Donat et Mumford, trouver une telle compactification qui soit de plus  $T$ -équivalente.

## § 1. IMMERSIONS TORIQUES AFFINES.

Soient  $k$  un corps algébriquement clos,  $T$  un tore sur  $k$ . On introduit deux groupes abéliens :

- $M = \text{Hom}_{\text{gr.alg}}(T, \mathbb{G}_m)$ , le groupe des caractères de  $T$  ;
- $N = \text{Hom}_{\text{gr.alg}}(\mathbb{G}_m, T)$ , le groupe des sous-groupes à un paramètre de  $T$ .

Pour  $r \in M$ , on note  $\underline{X}^r$  le caractère correspondant, considéré comme fonction sur  $T$ . Pour  $a \in N$ , on note  $\lambda_a : \mathbb{G}_m \rightarrow T$  le groupe à un paramètre correspondant. On a une dualité parfaite :

$$M \times N \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(r, a) \longmapsto \langle r, a \rangle ,$$

où  $\langle r, a \rangle$  est l'élément  $\underline{X}^r \circ \lambda_a$  de  $\mathbb{Z} = \text{Hom}_{\text{gr.alg}}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m)$ . On a canoniquement :

$\Gamma(\mathcal{O}_T) = k[M]$ , où  $k[M]$  est l'algèbre du groupe  $M$  sur le corps  $k$ .

**Définition 1** : Une immersion équivariante de  $T$  est la donnée d'une variété  $X$  et d'une immersion ouverte dense  $T \hookrightarrow X$  telle que l'action de  $T$  sur lui-même par translation se prolonge en une action sur la variété  $X$ . L'immersion équivariante est dite affine si  $X$  est une variété affine.

Un morphisme entre deux immersions équivariantes  $T \hookrightarrow X$  et  $T \hookrightarrow X'$  est un morphisme  $f : X \rightarrow X'$  qui commute à ces immersions.

Nous nous intéressons d'abord à une immersion équivariante affine  $f : T \hookrightarrow X$  où  $X = \text{Spec}(A)$ . Un morphisme  $T \rightarrow \text{Spec}(A)$  correspond à un morphisme  $f^* : A \rightarrow k[M]$  de  $k$ -algèbres. Le morphisme  $f$  est dense ssi  $f^*$  est injectif ; l'action de  $T$  sur  $X$  existe ssi  $A$  est une sous-algèbre de  $k[M]$ , qui soit graduée de type  $M$ . Ceci revient à dire que  $A = k[S]$ , où  $S$  est un semi-groupe inclus dans  $M$ . Il est clair que  $k[S]$  est une  $k$ -algèbre de type fini ssi  $S$  est un semi-groupe à engendrement fini. Si  $S$  est un tel semi-groupe, le morphisme  $f : \text{Spec}(k[M]) \rightarrow \text{Spec}(k[S])$  est une immersion ouverte ssi il induit un isomorphisme entre les deux points génériques. Ceci signifie que les anneaux  $k[S]$  et  $k[M]$  ont même corps des fractions, et équivaut clairement à la condition que  $S$  engendre  $M$  comme groupe. On a ainsi démontré la

**Proposition 1** : La correspondance  $S \mapsto \text{Spec}(k[S])$  établit une bijection entre

- les semi-groupes  $S \subset M$  à engendrement fini, et qui engendrent  $M$  comme groupe ;
- les classes d'isomorphismes d'immersions équivariantes affines du tore  $T$  ;

- De plus, les morphismes entre immersions équivariantes affines correspondent, de façon contravariante, aux inclusions entre semi-groupes inclus dans  $M$ . ■

**Définition 2** : Soit  $S \subset M$  un semi-groupe ; le saturé  $\bar{S}$  de  $S$  est le semi-groupe  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (\frac{1}{n}S) \cap M$ . On dit que  $S$  est saturé si  $\bar{S} = S$ .

**Proposition 2** : Soit  $S$  un semi-groupe de  $M$ ,  
 (i) si  $S$  est à engendrement fini,  $\bar{S}$  l'est itou ;  
 (ii)  $k[\bar{S}]$  est le normalisé de  $k[S]$ .

**Démonstration** : (i) résulte de (ii) et du fait que la normalisée d'une algèbre de type fini est une algèbre de type fini.

Pour prouver (i), si  $R$  est le normalisé de  $k[S]$  (dans son corps des fractions), on a des inclusions  $k[S] \subset R \subset k[M]$ .

L'action naturelle de  $T(k)$  sur ce diagramme force  $R$  à être un sous-anneau de  $k[M]$ , muni d'une graduation de type  $M$ .

Montrons  $k[\bar{S}] \subset R$  ; en effet, soit  $r \in (\frac{1}{n}S) \cap M$  ; alors  $\underline{X}^r$  satisfait l'équation  $(\underline{X}^r)^n - \underline{X}^{nr} = 0$  de dépendance intégrale sur  $k[S]$ .

Montrons  $R \subset k[\bar{S}]$  ; ces deux anneaux étant gradués de type  $M$ , il suffit de montrer que si un élément  $r$  de  $M$  est tel que  $\underline{X}^r$  vérifie une équation de dépendance intégrale sur  $k[S]$

$$X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 = 0$$

alors  $r \in \bar{S}$ . Mais on peut clairement supposer chaque  $a_i$  homogène de poids  $i r \in M$  ; comme  $k[S]$  est intègre, une de ces  $a_i$  est non nul, donc il existe un entier  $i \geq 1$  tel que  $i r \in S$  ; il en résulte  $r \in (\frac{1}{i}S) \cap M$ , donc  $r \in \bar{S}$ . ■

On se restreindra désormais aux semi-groupes à engendrement fini saturés. Ceux-ci peuvent se décrire en termes géométriques simples. Nous introduisons certains objets simpliciaux dans l'espace vectoriel  $M_{\mathbf{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{R}$ , ou dans  $N_{\mathbf{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{R}$ .

**Proposition et définition 3** : Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$  de dimension finie ; soit  $E_{\mathbf{R}} = E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{R}$ . Pour une partie  $\sigma$  de  $E_{\mathbf{R}}$ , les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) on peut trouver une famille finie  $\ell_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  de formes linéaires sur  $E_{\mathbb{Q}}$  telle que :

$$\sigma = \{x, \ell_i(x) \geq 0, \forall i\} ;$$

(ii) on peut trouver une famille finie  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  d'éléments de  $E_{\mathbb{Q}}$  telle que

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=1}^M \lambda_i x_i / \lambda_i \geq 0 \text{ pour tout } i \right\}.$$

Une partie de  $E_{\mathbb{R}}$  satisfaisant ces conditions est appelée cône polyédral de  $E_{\mathbb{R}}$  (sous-entendu : pour une  $\mathbb{Q}$ -structure donnée).

Démonstration : Soit  $\sigma = \{x, \ell_i(x) \geq 0, \forall i\}$  ; il est clair que  $\sigma$  est un cône convexe fermé de  $E_{\mathbb{R}}$ . On montre que  $\sigma$  satisfait (ii) par récurrence sur  $\dim(E_{\mathbb{Q}})$ . On se ramène alors à supposer  $\sigma$  contenu dans un quadrant. La frontière de  $\sigma$  est clairement  $\bigcup_{i=1, \dots, N} \sigma_i$ , où  $\sigma_i = \{x, \ell_i(x) = 0 \text{ et } \ell_j(x) \geq 0 \text{ pour } j \neq i\}$ . Chaque  $\sigma_i$  satisfait (i) comme partie d'un hyperplan de  $E_{\mathbb{Q}}$ , donc satisfait (ii). D'après une application facile de Krein-Milman, tout point de  $\sigma$  est barycentre de points de  $\sigma_i$  (avec coefficients  $\geq 0$ ), donc  $\sigma$  satisfait (ii).

Soit maintenant  $\sigma = \left\{ \sum_{i=1}^M \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0 \text{ pour tout } i \right\}$ . Sa frontière est une réunion finie de parties du même type dans des hyperplans de  $E_{\mathbb{Q}}$ . Il en résulte que  $\sigma$  est l'intersection de demi-plans découpés dans  $E_{\mathbb{R}}$  par ces hyperplans, donc que  $\sigma$  satisfait (i). ■

Ceci nous incite à définir une structure hiérarchique dans les cônes polyédraux de  $E_{\mathbb{R}}$ . Si  $\sigma = \{x, \ell_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, N\}$  est un tel cône polyédral, une face de  $\sigma$  est une partie  $\sigma'$  de  $\sigma$  de la forme  $\sigma \cap \{x, \ell(x) = 0\}$ , où  $\ell$  est une forme linéaire sur  $E_{\mathbb{Q}}$ ,  $\ell(x) \geq 0$  pour  $x \in \sigma$  ; ou encore  $\sigma' = \sigma \cap \{x, \ell_i(x) = 0 \text{ pour } i \in I\}$  pour une certaine partie  $I$  de  $\{1, \dots, N\}$ . L'intérieur de  $\sigma$  est évidemment le complémentaire dans  $\sigma$  de ses faces de codimension 1.

Nous appliquons notre étude à  $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  et  $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ .

Lemme 1 : Les correspondances : 
$$\left\{ \begin{array}{l} S \mapsto \left\{ \sum_{s \in S} \lambda_s \cdot s, \lambda_s \geq 0, \lambda_s = 0 \text{ pour presque tout } s \right\} \\ \sigma \mapsto \sigma \cap M \end{array} \right.$$

sont deux bijections réciproques entre

- l'ensemble des semi-groupes de  $M$ , à engendrement fini, engendrant  $M$  comme groupe, et saturés ;
- l'ensemble des cônes polyédraux de  $M_{\mathbb{R}}$ .

Démonstration : Le seul point non trivial est que si  $\sigma$  est un cône polyédral

$\sigma \cap M$  est un semi-groupe à engendrement fini (c'est le "lemme de Gordan"). Comme plus haut, on se ramène à supposer  $\sigma$  contenu dans un quadrant ; soient  $\sigma_i = \sigma \cap H_i$  les faces de codimension 1 de  $\sigma$ , en nombre fini, pour des hyperplans  $H_i$  convenables de  $M_{\mathbb{Q}}$ . Par hypothèse de récurrence, les semi-groupes  $\sigma_i \cap M$  sont à engendrement fini. Pour tout  $i$ , soit  $\{x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(j)}\}$  une famille de générateurs de  $\sigma_i \cap M$ . Soit  $K$  l'enveloppe convexe dans  $M_{\mathbb{R}}$  de la réunion de 0 et de tous les  $x_i^{(\ell)}$ . Soit  $\mathcal{Q} = K \cap M$  ; c'est une partie de  $\sigma$  discrète et compacte, donc finie. Montrons qu'elle engendre  $\sigma \cap M$  comme semi-groupe. En effet, soit  $x \in \sigma \cap M$  ; on peut écrire  $x = \sum_{g \in \mathcal{Q}} \lambda_g x_g$ ,  $\lambda_g \geq 0$  puisque  $\mathcal{Q}$  engendre  $M$  comme cône ; il en résulte que si  $n$  est la dimension de  $M$ , on peut trouver un sous-ensemble de  $\mathcal{Q}$  de cardinal  $n$  tel que  $x$  soit barycentre de cet ensemble à coefficients rationnels  $\geq 0$  ; on prendra ce sous-ensemble tel que le cône convexe qu'il engendre soit minimal. Soit  $\{y_1, \dots, y_n\}$  cet ensemble. Alors le simplexe  $\langle y_1, \dots, y_n \rangle$  ne contient pas d'autre point de  $M$  que 0 et les  $y_i$  ; un tel point serait en effet en point de  $K$  qui subdiviserait le simplexe en  $n$  simplexes plus petits, et  $x$  appartiendrait à l'un d'eux : mais alors l'ensemble  $\{y_1, \dots, y_n\}$  ne serait pas minimal au sens précédent. Il est bien connu que ceci entraîne que  $\{y_1, \dots, y_n\}$  est une base de  $M$  ; par conséquent  $x$  est une combinaison linéaire des  $y_i$  à coefficients entiers  $\geq 0$ , et le lemme de Gordan est démontré. ■

Pour des raisons de meilleure variance (qui seront cruciales lors de l'étude du "changement de tore" et des éclatements équivariants), on préfère représenter les semi-groupes saturés de  $M$  par des cônes polyédraux dans  $N_{\mathbb{R}}$  plutôt que dans  $M_{\mathbb{R}}$ .

Si donc  $\sigma$  est un cône polyédral de  $N_{\mathbb{R}}$ , son dual  $\check{\sigma}$  est :  $\check{\sigma} = \{r \in M_{\mathbb{R}} \text{ t.q. } \langle r, x \rangle \geq 0, \forall x \in \sigma\}$ . On déduit facilement de la Proposition 3 que  $\check{\check{\sigma}} = \sigma$ , et que la flèche  $\sigma \mapsto \check{\sigma}$  est une correspondance (ou dualité) entre cônes polyédraux de  $N_{\mathbb{R}}$  (resp. de  $M_{\mathbb{R}}$ ) qui renverse le sens des inclusions, transforme l'opération "intersection" en l'opération "somme convexe", et induit sur les sous-espaces linéaires la dualité ordinaire. En particulier, il revient au même de dire que  $\sigma$  ne contient aucun sous-espace vectoriel propre de  $N_{\mathbb{R}}$ , ou que  $\check{\sigma}$  n'est contenu dans aucun hyperplan de  $M_{\mathbb{R}}$ .

Le lemme 1 a donc pour conséquence immédiate la première phrase du

Théorème 1 : La correspondance  $\sigma \mapsto \text{Spec } k[\check{\sigma} \cap M] = X_{\check{\sigma}}$  établit une bijection entre



- l'ensemble des cônes polyédraux de  $N_{\mathbf{R}}$  qui ne contiennent pas de sous-espace vectoriel propre de  $N_{\mathbf{R}}$  ;

- l'ensemble des (classes d'isomorphisme d') immersions équivariantes affines du tore  $T$  ;

De plus, si  $a \in N$ , on a :  $a \in \sigma$  ssi  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_a(t)$  existe dans  $X_\sigma$ .

Démonstration : Le groupe à un paramètre  $\lambda_a$  correspond à un homomorphisme d'anneaux :  $\lambda_a^* : k[M] \rightarrow k[t, t^{-1}]$  t.q.

$$\lambda_a^*(\underline{X}^r) = t^{\langle r, a \rangle}.$$

L'existence de  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_a(t)$  dans  $X_\sigma$  équivaut à la possibilité de factoriser par  $k[t]$  le morphisme composé  $k[\overset{\vee}{\sigma} \cap M] \rightarrow k[M] \rightarrow k[t, t^{-1}]$ . Il est clair que cette factorisation peut se faire ssi  $\langle r, a \rangle \geq 0, \forall r \in \overset{\vee}{\sigma} \cap M$  i.e. ssi  $a \in \overset{\vee}{\sigma} = \sigma$ . ■

Si  $a \in \sigma$ , on note alors  $\lambda_a(0)$  le point fermé  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_a(t)$  de  $X_\sigma$ .

Nous allons maintenant étudier les orbites sous  $T$  d'une variété du type  $X_\sigma$ , pour  $\sigma$  cône polyédral de  $N_{\mathbf{R}}$ .

Théorème 2 : Pour  $\sigma$  cône polyédral de  $N_{\mathbf{R}}$ , et  $X_\sigma$  la variété "torique" associée, on a les propriétés :

- (a) Soient  $a_1$  et  $a_2$  deux éléments de  $\sigma \cap N$ , alors on a  $\lambda_{a_1}(0) = \lambda_{a_2}(0)$  ssi  $a_1$  et  $a_2$  sont dans l'intérieur d'une même face de  $\sigma$  ;
- (b) dans toute  $T$ -orbite de  $X_\sigma$ , il y a un point unique du type  $\lambda_a(0)$  ;
- (c) il existe une bijection  $\sigma' \mapsto \mathbb{O}^{\sigma'}$  entre faces de  $\sigma$  et  $T$ -orbites de  $X_\sigma$  telle que :

- $\sigma_1 \subset \sigma_2$  ssi  $\overline{\mathbb{O}}^{\sigma_1} \supset \mathbb{O}^{\sigma_2}$
- $\dim(\sigma') + \dim(\mathbb{O}^{\sigma'}) = n = \dim(N_{\mathbf{R}})$  .

(a) Le calcul fait en notre théorème 1 montre que  $\lambda_a(0)$  est défini par l'homomorphisme d'algèbres :  $k[\overset{\vee}{\sigma} \cap M] \rightarrow k$  t.q.

$$\underline{X}^r \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \langle r, a \rangle = 0 \\ 0 & \text{si } \langle r, a \rangle > 0 \end{cases}.$$

Cet homomorphisme est déterminé précisément par le semi-groupe

$\overset{\vee}{\sigma} \cap M \cap \{r \text{ tq } \langle r, a \rangle = 0\}$ , ou encore par le cône somme convexe dans  $M_{\mathbf{R}}$ , de  $\sigma$  et

de  $\mathbf{R}.a$ . Or cette somme convexe a pour plus grand sous-espace vectoriel, l'espace engendré par l'intérieur de la face de  $\sigma$  qui contient  $a$  (on pourra, à cet argument vicieux, préférer celui de Saint-Donat ([2], p. 10)). On remarque d'ailleurs que l'on établit ainsi une bijection entre faces de  $\sigma$  et faces de  $\check{\sigma}$ .

(b) Une orbite  $\mathfrak{O}$  de  $X_\sigma$ , pour l'action de  $T$ , est déterminée par son adhérence  $\overline{\mathfrak{O}}$ , qui est définie par un idéal  $I$  gradué de  $k[\check{\sigma} \cap M]$ , qui est certainement un idéal premier. Cet idéal est donc de la forme  $k[S]$ , où  $S$  est un semi-groupe de  $\check{\sigma} \cap M$  tel que  $S + (\check{\sigma} \cap M) = S$  et que, si deux éléments de  $\check{\sigma} \cap M$  ont pour somme un élément de  $S$ , un de ces deux éléments est dans  $S$ . Il en résulte que le complémentaire de  $S$  dans  $\check{\sigma} \cap M$  est un semi-groupe saturé, et la condition  $S + (\check{\sigma} \cap M) = S$ , montre que c'est l'intersection de  $M$  et d'une face de  $\check{\sigma}$ .

On obtient donc  $\overline{\mathfrak{O}}$  comme suit : on choisit  $\tau$  une face de  $\sigma$ , soit  $\check{\tau}$  la face correspondante de  $\check{\sigma}$ . On a, en regardant la construction de (a)  $\dim(\tau) + \dim(\check{\tau}) = n$ . On a une décomposition :

$$k[\check{\sigma} \cap M] = I \oplus k[\check{\tau} \cap M] .$$

On a :  $\overline{\mathfrak{O}} = \text{Spec}(k[\check{\tau} \cap M])$  ; c'est donc une variété torique (pour un tore quotient de  $T$ ) ; on a un diagramme  $T$ -équivariant

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{r} & \\ X_\sigma & \xleftarrow{i} & \overline{\mathfrak{O}} \end{array}$$

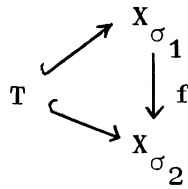
où  $r$  est une rétraction. Soit  $\overline{\mathfrak{O}}^\tau = \text{Spec}(k[\tau \cap M])$  et soit  $\mathfrak{O}^\tau$  son plus petit ouvert invariant sous  $T$  ; on a clairement  $\dim(\mathfrak{O}^\tau) = n - \dim(\tau)$ . De plus, si  $a$  est dans l'intérieur de  $\tau$ , on voit par (a) que  $\lambda_a(0)$  est dans  $\mathfrak{O}^\tau$ . On a ainsi démontré (b) et (c) .

Exemple : Avec les notations du théorème 2,  $\sigma$  lui-même correspond à l'unique orbite fermée de  $X_\sigma$  (qui est l'orbite minimale).

Nous donnerons plus loin une description concrète des orbites dans le cas de la dimension 2.

Etudions maintenant la fonctorialité en  $\sigma$  de la variété  $X_\sigma$ .

Théorème 3 : Soient  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deux cônes polyédraux de  $N_{\mathbf{R}}$  ; il existe un morphisme  $f: X_{\sigma_1} \rightarrow X_{\sigma_2}$  faisant commuter le diagramme



ssi  $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ . Dans ce cas,  $f$  commute à l'action de  $T$  ; c'est une immersion ouverte ssi  $\sigma_1$  une face de  $\sigma_2$ .

Démonstration : Si  $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ , alors  $\check{\sigma}_2 \subseteq \check{\sigma}_1$ , et on a une inclusion  $f^* : k[\check{\sigma}_2 \cap M] \subseteq k[\check{\sigma}_1 \cap M]$  qui procure  $f$  comme requis. Si  $f$  existe, pour tout  $a \in \sigma_1 \cap N$ , le Théorème 1 dit que  $\lambda_a(0)$  existe dans  $X_{\sigma_1}$ , donc que  $\lambda_a(0)$  existe dans  $X_{\sigma_2}$  ; en tant qu'image par  $f$  du précédent, donc que  $a \in \sigma_2 \cap N$ . D'où  $\sigma_1 \cap N \subseteq \sigma_2 \cap N$  et, de là,  $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ .

De plus, si  $\sigma_1$  est une face de  $\sigma_2$ , alors  $X_{\sigma_1}$  est le complémentaire dans  $X_{\sigma_2}$  de l'union des orbites  $\mathcal{O}^\tau$ , pour  $\tau$  face de  $\sigma_2$  non incluse dans  $\sigma_1$ , donc  $X_{\sigma_1}$  est un ouvert de  $X_{\sigma_2}$ . Inversement, supposons  $X_{\sigma_1}$  ouvert dans  $X_{\sigma_2}$ , et soit  $\tau$  une face quelconque de  $\sigma_2$  ; si  $\sigma_1$  rencontre  $\text{Int}(\tau)$ , alors par le Théorème 2, pour  $a \in \sigma_1 \cap \text{Int}(\tau)$ , on a :  $\lambda_a(0) \in X_{\sigma_1} \cap \mathcal{O}^\tau$  d'où  $\mathcal{O}^\tau \subset X_{\sigma_1}$  et  $\tau \subset \sigma_1$  ; donc  $\sigma_1$  est un cône polyédral qui est une union de faces de  $\sigma_2$ , c'est nécessairement une face de  $\sigma_2$ . ■

Venons-en maintenant à l'important critère de lissité des variétés  $X_\sigma$ .

Théorème 4 :  $X_\sigma$  est une variété lisse ssi  $\sigma \cap N$  est engendré par une partie d'une base de  $N$ .

Démonstration : Soit  $a_1, \dots, a_n$  une base de  $N$ , et supposons que pour un certain  $r$  ( $1 \leq r \leq n$ ) on ait  $\sigma = \{ \sum_{i=1}^r \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0 \}$ .

Alors  $X_\sigma = \text{Spec } k[X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_n, X_{r+1}^{-1}, \dots, X_n^{-1}]$  est isomorphe à  $\mathbb{A}_a^r \times \mathbb{A}_m^{n-r}$  donc non singulier.

Supposons réciproquement  $X_\sigma$  lisse ; soit  $N'_R$  le sous-espace vectoriel de  $N_R$  engendré par  $\sigma$ , soit  $N' = N'_R \cap N$ , et choisissons une décomposition  $N = N' \oplus N''$ , d'où  $M = M' \oplus M''$ ,  $T = T' \times T''$  et  $X_\sigma = X'_{\sigma'} \times T''$ , où  $X'_{\sigma'}$  est le  $T'$ -immersion définie par le cône polyédral  $\sigma'$  de  $N'_R$ . Donc  $X'_{\sigma'}$  est non-singulière. On s'est ainsi réduit au cas où  $\sigma$  engendre  $N_R$ , ou encore au cas où  $X_\sigma$  a un point  $T$ -fixe 0. Comme dans la démonstration du Théorème 2, on a :

$$k[S] = k[S - \{0\}] \oplus k, \quad ,$$

et  $I = k[S - \{0\}]$  est l'idéal maximal du point 0. Du lemme de Gordan, il résulte que  $S$  est engendré par ses éléments indécomposables ; comme  $k[S]$  est régulier, on peut trouver  $\underline{X}^{r_1}, \dots, \underline{X}^{r_n}$  qui engendrent  $I$  (avec  $r_i \in S$ ), donc les  $r_i$  engendrent  $S$ , donc forment une base de  $N$  sur  $\mathbb{Z}$ . ■

Exemples : (a) En dimension 1. On a :  $T = \mathbb{G}_m$ ,  $M = \mathbb{Z}$ ,  $N = \mathbb{Z}$ . On a 3  $\sigma$  possibles (essentiellement)

$$* \quad \sigma = \{0\} \quad \text{et} \quad X_\sigma = \mathbb{G}_m = \text{Spec } k[t, t^{-1}]$$

$$* \quad \sigma = \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad X_\sigma = \mathbb{G}_a = \text{Spec } k[t]$$

$$* \quad \sigma = \mathbb{R}_- \quad \text{et} \quad X_\sigma = \mathbb{G}_a = \text{Spec } k[t^{-1}]$$

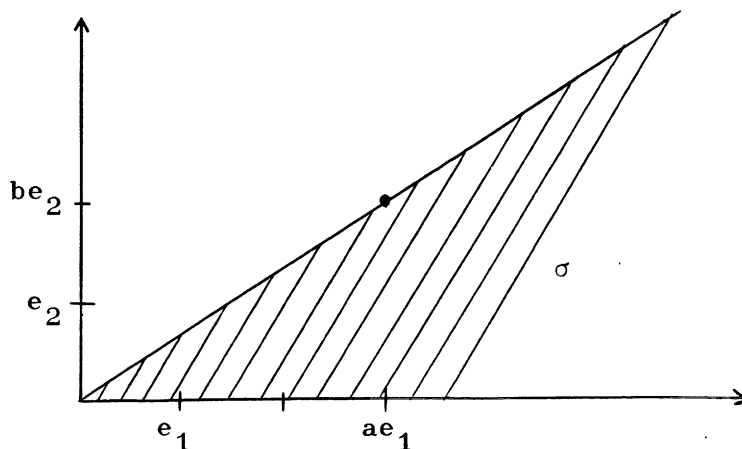
Les notations indiquent quelles sont les deux immersions  $\mathbb{G}_m \hookrightarrow G_a$ . On attendra le § suivant pour obtenir la droite projective par recollement de ces deux copies de  $\mathbb{G}_a = \mathbb{A}^1$ .

(b) En dimension 2. Soit  $\sigma$  un cône polyédral dans  $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ , d'intérieur non vide, ne contenant pas de sous-espace vectoriel propre de  $\mathbb{R}^2$ . On peut trouver une base  $(e_1, e_2)$  de  $N$  telle que :

$$\sigma = \{\lambda e_1 + \mu(ae_1 + be_2) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+\}$$

où  $a$  et  $b$  sont deux entiers tels que  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $(a, b) = 1$ .

D'après le Théorème 4,  $X_\sigma$  est non singulière ssi  $b = 1$ , et alors  $X_\sigma \cong \mathbb{A}_k^2$ . Si  $b > 1$ ,  $X_\sigma$  a un point singulier isolé, qui est le seul point invariant sous  $T = \mathbb{G}_m^2$ .



Si nous introduisons le nouveau réseau  $N_*$  de  $\mathbf{R}^2$  engendré par  $e_1$  et  $ae_1 + be_2$ , et le réseau dual  $M_*$  dans  $\mathbf{R}^2$ , on voit que  $X_{\sigma_*} = \text{Spec } \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M_*]$  est non singulière. De plus l'anneau  $\check{\sigma} \cap M_*$  est muni d'une graduation de type  $M_*/M$ ; or  $M_*/M \cong (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})$ ; si  $b$  ne divise pas la caractéristique de  $k$ , on en déduit une action de  $\mu_b$  sur  $X_{\sigma_*}$ ; le quotient de  $X_{\sigma_*}$  par  $\mu_b$  n'est autre que  $X_\sigma$ .

Explicitons cette action de  $\mu_b$ ; soit  $(r_1, r_2)$  la base duale de  $(e_1, e_2)$ ; le cône  $\sigma$  est engendré par  $r_2$  et  $br_1 - ar_2$ . Par construction  $(r_2, br_1 - ar_2)$  est une base de  $M_*$ . En prenant des coordonnées  $(X, Y)$  adaptées à cette base, on voit que  $X_{\sigma_*} = \text{Spec } \mathbb{C}[X, Y]$  (avec  $X = \underline{X}^{r_2}$ ,  $Y = \underline{X}^{br_1 - ar_2}$ ). L'action de  $\xi \in \mu_b$  s'écrit :  $\xi \cdot (X, Y) = (\xi X, \xi^{-a} Y)$ . Par le lemme de Gordan,  $\check{\sigma} \cap M$  est engendré par les points de  $M$  qui sont dans le triangle des sommets  $0, r_2, br_1 - ar_2$ . Ceci permet de calculer  $\mathbb{C}[\sigma \cap M] = \mathbb{C}[X, Y]^{\mu_b}$ .

Par exemple, si  $a = 1$ , on a :

$$\mathbb{C}[X, Y]^{\mu_b} = \mathbb{C}[XY, X^b, Y^b] = \mathbb{C}[u, v, w]/(vu - w^b) ,$$

ce qui est un point double rationnel de type  $A_{b-1}$ .

Si  $a = -1$ , on a :  $\mathbb{C}[X, Y]^{\mu_b} = \mathbb{C}[X^b, X^{b-1}Y, \dots, Y^b]$  où on reconnaît la forme paramétrique du cône affine sur une courbe rationnelle de degré  $b-1$  dans  $\mathbb{P}^{b-1}$ .

On reviendra plus loin à ces singularités cycliques, pour en décrire un procédé équivariant de désingularisation.

### Description topologique des variétés toriques affines sur $\mathbb{C}$ .

Si  $k = \mathbb{C}$ , on a la suite exacte exponentielle :

$$0 \rightarrow N \rightarrow N_{\mathbb{C}} \rightarrow T \rightarrow 0 ,$$

d'où une décomposition :

$$T \cong (c-T) \times (iN_{\mathbf{R}}) ,$$

où  $i$  est une racine carrée de  $-1$  et où  $(c-T)$  est le tore compact  $N_{\mathbf{R}}/N$ . On dénote par  $\text{ord}$  la projection  $T \rightarrow N_{\mathbf{R}}$  telle que

$$\text{ord}(x + iy \bmod N) = y \text{ pour } x, y \in N_{\mathbf{R}} .$$

Si  $\alpha \in M$ , on a :  $\underline{X}^\alpha(z \bmod N) = e^{2\pi i \langle \alpha, z \rangle}$  pour  $z \in N_{\mathbb{C}}$

d'où  $|\underline{X}^{\tilde{\alpha}}(z)| = e^{-2\pi\langle\alpha, \text{ord } z\rangle}$  pour  $z \in T$ .

Soit  $N_{\sigma}$  l'espace topologique quotient de  $X_{\sigma}$  par l'action de  $c-T$ , pour  $\sigma$  cône polyédral de  $N_{\mathbf{R}}$ . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\text{ord}} & N_{\mathbf{R}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\sigma} & \longrightarrow & N_{\sigma} \end{array}$$

où les flèches horizontales sont propres, et les flèches verticales des immersions à image ouverte. Le groupe de Lie  $N_{\mathbf{R}}$ , identifié à  $T/(c-T)$ , agit encore sur  $N_{\sigma}$ . Décrivons les orbites de cette action. Pour toute face  $\tau$  de  $\sigma$ , soit  $\mathcal{O}^{\tau}$  l'orbite correspondante de  $X_{\sigma}$  (comme dans le Théorème 2). Dans  $X_{\sigma}$ , on définit  $\overline{\mathcal{O}}^{\tau}$  par les équations  $\underline{X}^r = 0$  pour  $r \in \mathcal{V} \cap M$  et  $\langle r, x \rangle > 0$  sur  $\text{Int}(\tau)$ . Si  $x$  est un point de  $X_{\sigma}$ ,  $x$  est dans l'orbite  $\mathcal{O}^{\tau}$  ssi

$$M \cap \mathcal{V} \cap \{r \text{ tq } \underline{X}^r(x) \neq 0\} = M \cap \mathcal{V} \cap L(\tau)^{\perp}$$

où  $L(\tau)$  est le sous-espace vectoriel de  $N_{\mathbf{R}}$  engendré par  $\tau$ .

(Comparer avec la démonstration (a) du Théorème 2).

On en déduit une application  $\text{ord} : \mathcal{O}^{\tau} \rightarrow N_{\mathbf{R}}/L(\tau)$  telle que

$$\langle \text{ord}(x), r \rangle = -\frac{1}{2\pi} \text{Log } |\underline{X}^r(x)|$$

pour  $r \in M \cap \mathcal{V} \cap L(\tau)^{\perp}$ .

Il est clair que  $\underline{\mathcal{O}}(\tau) = N_{\mathbf{R}}/L(\tau)$  apparaît ainsi comme le quotient de  $\mathcal{O}^{\tau}$  par l'action de  $(c-T)$ , donc que  $\underline{\mathcal{O}}(\tau)$  est une orbite de  $N_{\sigma}$  sous l'action de  $N_{\mathbf{R}}$ .

On a ainsi décomposé l'espace topologique  $N_{\sigma}$  en l'union des strates  $\underline{\mathcal{O}}(\tau)$ ; pour décrire la topologie de  $N_{\sigma}$ , il suffit de montrer comment "recoller" ces strates. Si  $y$  est un élément de  $N_{\mathbf{R}}/L(\tau)$ , on note  $y + \infty \cdot \tau$  le point correspondant de  $N_{\sigma}$ . On décrira la condition pour qu'une suite  $(x_n)$  de points de  $N_{\mathbf{R}}$  converge dans  $N_{\sigma}$  vers  $y + \infty \cdot \tau$ . Puisque la projection de  $X_{\sigma}$  sur  $N_{\sigma}$  est propre, c'est vrai ssi il existe une suite  $z_n$  dans  $T$  telle que  $\text{ord}(z_n) = x_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z$ , avec  $z \in \mathcal{O}^{\tau}$  et  $\text{ord}(z) = y$ .

On doit donc avoir :

$$|\underline{X}^r(z_n)| = e^{-2\pi\langle r, x_n \rangle} \quad \text{pour } r \in M$$

$$|\underline{X}^r(z)| = e^{-2\pi\langle r, y \rangle} \quad \text{pour } r \in \mathcal{V} \cap M \cap L(\tau)^{\perp}$$

et 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\underline{X}^r(z_n)| = |\underline{X}^r(z)| \quad \text{pour } r \in \check{\sigma} \cap M .$$

Pour simplifier la discussion, on choisit une décomposition :

$N_{\mathbf{R}} = N'_{\mathbf{R}} \oplus L(\tau)$  , et on écrit :  $x_n = u_n + v_n$  . On obtient les deux conditions :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle r, u_n \rangle = \langle r, y \rangle \quad \text{pour } r \in \check{\sigma} \cap M, r \text{ nul sur } L(\tau) ,$$

et 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle r, v_n \rangle = +\infty \quad \text{pour } r \in \check{\sigma} \cap M, r \text{ nul sur } N'_{\mathbf{R}} \text{ et } r > 0 \text{ sur } \text{Int}(\tau).$$

On en déduit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = y$  ssi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = y$  dans  $N'_{\mathbf{R}} = N_{\mathbf{R}}|L(\tau)$  et  $\forall w \in L(\tau)$

$z_n \in \tau + w$  pour  $n$  grand.

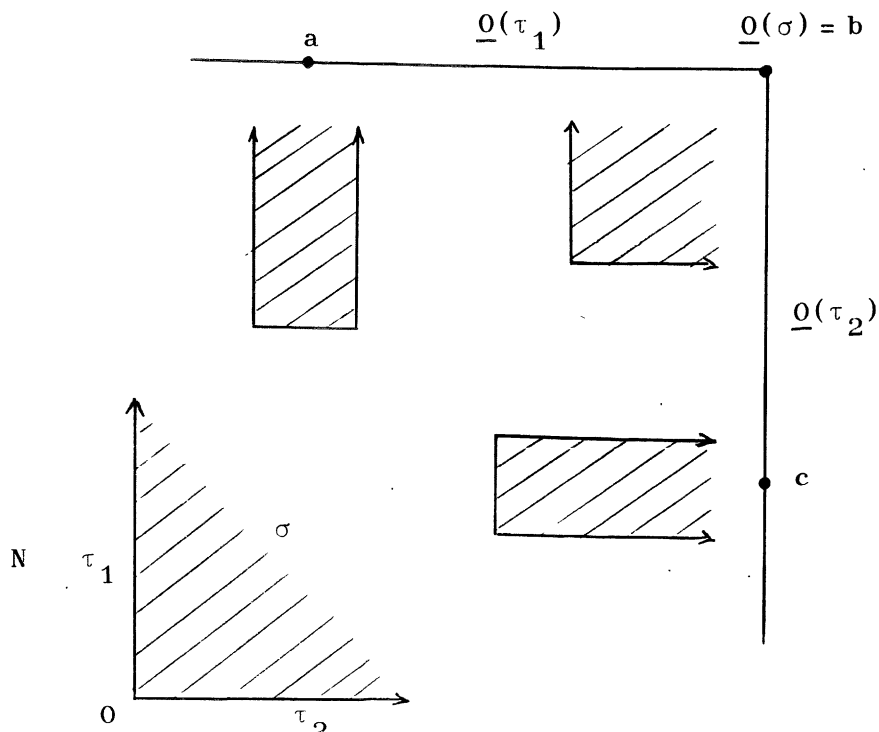
Un système fondamental de voisinages de  $y + \infty \cdot \tau$  dans  $N_{\mathbf{R}}$  est donc fourni par les  $U_{\varepsilon, w}$  avec :

$$U_{\varepsilon, w} = y + w + B_{\varepsilon} + \tau$$

où  $w \in L(\tau)$  et  $B_{\varepsilon}$  est une boule de rayon  $\varepsilon$  centrée en 0, pour une métrique euclidienne sur  $N_{\mathbf{R}}$  .

On décrit de même le recollement entre deux orbites  $\underline{0}(\tau)$  et  $\underline{0}(\tau')$ , lorsque  $\tau$  est une force de  $\tau'$ , ce qui est clairement suffisant pour décrire la topologie de  $N_{\sigma}$  .

On fera le dessin de  $N_{\sigma}$  lorsque  $N = \mathbf{R}^2$  et  $\sigma = \mathbf{R}_+^2$  .



Les régions hachurées décrivent des voisinages typiques des points a, b, c dans  $N_\sigma$ .

On trouvera plus de détails dans [3, p. 1-8].

La topologie de  $N_\sigma$  ne permet pas de reconstruire celle de  $X_\sigma$ . Néanmoins, on peut déterminer le type d'homotopie de  $X_\sigma$  par la construction suivante. Soit toujours  $L(\sigma)$  l'espace vectoriel engendré par  $\sigma$  dans  $N_{\mathbf{R}}$ , et soit  $V_{\mathbf{R}}(\sigma)$  son orthogonal dans  $M_{\mathbf{R}}$ ; c'est le plus grand espace vectoriel contenu dans  $\sigma$ ; l'unique orbite fermée de  $X_\sigma$ , à savoir  $\mathfrak{O}^\sigma$  (voir le Théorème 2) s'identifie au tore quotient de  $T$  par le sous-tore défini par  $L(\sigma) \cap N$ : le tore  $\mathfrak{O}^\sigma$  a donc pour groupe de caractères  $V(\sigma) \cap M$ ; dans la démonstration du Théorème 2, on a donné une rétraction holomorphe de  $X_\sigma$  sur  $\mathfrak{O}^\sigma$ . En particulier, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow L(\sigma) \cap N \longrightarrow N \longrightarrow \pi_1(X_\sigma) \longrightarrow 0$$

et l'algèbre de cohomologie entière de  $X_\sigma$  est l'algèbre extérieure sur le dual du  $\mathbb{Z}$ -module libre  $N/L(\sigma) \cap N$ , qui s'identifie à  $V(\sigma) = M \cap V_{\mathbf{R}}(\sigma)$ .

## § 2. IMMERSIONS TORIQUES GÉNÉRALES.

Le but est de décrire les immersions équivariantes d'une tore  $T$  en se servant des immersions affines du § 1 comme de morceaux d'un puzzle. On veut ensuite décrire de façon constructive, un procédé de résolution équivariante des singularités des variétés.

On commence par énoncer un résultat de Sumihiro, pour la démonstration duquel nous ne saurions mieux faire que de renvoyer à [2, p. 20-23].

**Théorème 5 (Sumihiro)** : Soit  $X$  une variété normale sur laquelle agit un tore  $T$ ; alors tout point de  $X$  admet un voisinage ouvert affine, invariant sous  $T$ . Soit donc  $X$  une variété normale sur  $k$ ,  $T \curvearrowright X$  une immersion équivariante. Le Théorème 5 nous dit qu'on peut recouvrir  $X$  par des ouverts affines  $U_\alpha$  invariants sous  $T$ ; le Théorème 1 dit que chaque  $U_\alpha$  est du type  $X_{\sigma_\alpha}$  pour un certain cône polyédral  $\sigma_\alpha$  de  $N_{\mathbf{R}}$ . Puisque  $X$  est une variété, c'est un schéma séparé; pour tous  $\alpha, \beta$ , les flèches  $X_{\sigma_\alpha} \cap X_{\sigma_\beta} \rightarrow X_{\sigma_\alpha}$  et  $X_{\sigma_\alpha} \cap X_{\sigma_\beta} \rightarrow X_{\sigma_\beta}$  sont donc des immersions ouvertes; comme  $X_{\sigma_\alpha} \cap X_{\sigma_\beta}$  est le produit fibré de  $X_{\sigma_2}$  et  $X_{\sigma_\beta}$  dans la catégorie des immersions équivariantes de  $T$ , le Théorème 3 montre que



$X_{\sigma_\alpha} \cap X_{\sigma_\beta} = X_{\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta}$ . Il en résulte que  $\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta$  doit être une face de  $\sigma_\alpha$  et de  $\sigma_\beta$ .

Si donc l'on considère la famille des cônes polyédraux  $\sigma$  de  $N_{\mathbf{R}}$  tels que l'on ait un diagramme T-équivariant

$$\begin{array}{ccc} T & \hookrightarrow & X_\sigma \\ & \searrow & \downarrow i_\sigma \\ & & X \end{array}$$

où  $i_\sigma$  est une immersion ouverte, on voit que cette famille qu'on notera  $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$  jouit de plein droit des propriétés suivantes :

- (i)  $A$  est un ensemble fini ;
- (ii) si  $\sigma$  est une face de  $\sigma_\alpha$ , on a :  $\sigma = \sigma_\beta$  pour un  $\beta \in A$  ;
- (iii) pour tous  $\alpha, \beta \in A$ ,  $\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta$  est une face de  $\sigma_\alpha$  et de  $\sigma_\beta$ .

**Définition** : Un éventail de  $N_{\mathbf{R}}$  est une famille  $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de cônes polyédraux de  $N_{\mathbf{R}}$  satisfaisant les propriétés (i), (ii), (iii).

**Remarque** : Si on élimine la propriété (i), ce qui est parfois utile, on obtient des schémas toriques qui ne sont plus de type fini, mais seulement localement de type fini.

Nous regrettons que Mumford ne soit pas un "fan" de cette terminologie due à Demazure [1, p. 557].

Si on se donne un éventail  $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $N_{\mathbf{R}}$ , on construit un schéma  $X$  à partir de  $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_{\sigma_\alpha}$ , par recollement de  $X_{\sigma_\alpha}$  et  $X_{\sigma_\beta}$  le long de  $X_{\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta}$  ; la propriété (i) entraîne que  $X$  est de type fini ; on note  $X_{\{\sigma_\alpha\}}$  la variété normale ainsi obtenue. C'est clairement une immersion équivariante du tore  $T$ .

Enonçons donc le

**Théorème 6** : (i) La flèche :  $\{\sigma_\alpha\} \mapsto X_{\{\sigma_\alpha\}}$  établit une bijection entre éventails de  $N_{\mathbf{R}}$  et les classes d'isomorphisme d'immersions équivariantes normales de  $T$  ;

(ii) la flèche qui à chaque  $\sigma_\alpha$  associe l'unique  $T$ -orbite fermée de  $X_{\sigma_\alpha}$ , notée  $\mathbb{O}^{\sigma_\alpha}$ , établit une bijection entre l'ensemble des  $\sigma_\alpha$  et l'ensemble des  $T$ -orbites de  $X_{\{\sigma_\alpha\}}$  ; cette bijection renverse le sens des inclusions entre adhérences d'orbites.

Démonstration : Il nous faut démontrer (ii). Mais si  $\emptyset$  est une T-orbite, le Théorème 5 montre qu'elle est contenue dans un ouvert affine invariant sous T, donc dans un  $X_{\sigma_\alpha}$  ; cette orbite est donc du type  $\emptyset^{\sigma_\beta}$  pour  $\sigma_\beta$  une face de  $\sigma$  ; mais alors  $\sigma_\beta$  est dans l'éventail, à cause de la propriété (ii), et  $\emptyset^{\sigma_\beta}$  est l'unique orbite fermée de  $X_{\sigma_\beta}$ . ■

Théorème 7 : Soient  $\{\sigma_\alpha\}$  et  $\{\sigma'_\beta\}$  deux éventails de  $N_{\mathbb{R}}$ . Il existe un morphisme  $f: X_{\{\sigma_\alpha\}} \rightarrow X_{\{\sigma'_\beta\}}$  d'immersions toriques ssi pour tout  $\alpha$ , il existe  $\beta$  tel que  $\sigma_\alpha \subseteq \sigma'_\beta$ .

Si cette condition est réalisée,  $f$  est surjectif ssi  $\bigcup \sigma_\alpha$  rencontre  $\text{Int}(\sigma'_\beta)$  pour tout  $\beta$ .

Démonstration : Si  $f$  existe, pour tout  $\alpha$ , l'image de l'orbite  $\emptyset^{\sigma_\alpha}$  est contenue dans un ouvert affine du type  $X_{\sigma'_\beta}$  ; si  $x$  est un point de  $X_{\sigma_\alpha}$ , son orbite est adhérente à  $\emptyset^{\sigma_\alpha}$ , donc l'orbite de  $f(x)$  est adhérente à  $X_{\sigma'_\beta}$ , et  $X_{\sigma'_\beta}$  étant ouvert et invariant sous T, contient  $f(x)$ .

On en déduit :  $f(X_{\sigma_\alpha}) \subset X_{\sigma'_\beta}$ , d'où  $\sigma_\alpha \subseteq \sigma'_\beta$  par le Théorème 3. La réciproque est immédiate.

Si  $f$  existe, pour tout  $\alpha$ , il existe un unique  $\beta$  tel que  $\text{Int}(\sigma_\alpha) \subset \text{Int}(\sigma'_\beta)$ , et on a :  $f(\emptyset^{\sigma_\alpha}) = \emptyset^{\sigma'_\beta}$  d'après le Théorème 2. Le deuxième énoncé du théorème en résulte immédiatement. ■

Enonçons maintenant les critères de propreté "absolue" et "relative".

Théorème 8 : (a)  $X_{\{\sigma_\alpha\}}$  est une variété complète ssi  $\bigcup \sigma_\alpha = N_{\mathbb{R}}$  ;

(b) avec les notations du Théorème 7, le morphisme  $f: X_{\{\sigma_\alpha\}} \rightarrow X_{\{\sigma'_\beta\}}$  est propre ssi  $\bigcup \sigma_\alpha = \bigcup \sigma'_\beta$ .

Démonstration : On applique le critère valuatif :  $X_{\{\sigma_\alpha\}}$  est complet ssi tout point  $f: \text{Spec } k((t)) \rightarrow X_{\{\sigma_\beta\}}$  se prolonge à  $\text{Spec } k[[t]]$ . Il est clair qu'on ne perd rien à supposer  $f$  lui-même à valeurs dans l'ouvert dense T, donc donné par un homomorphisme d'algèbres

$$f^* : k[M] \rightarrow k((t)) .$$

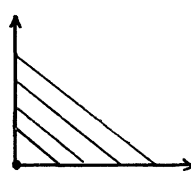
Soit  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{Z}$  la forme linéaire telle que  $\varphi(r) = \text{ord}_0(f(\underline{X}^r))$ . On voit que le prolongement existe ssi il existe un  $\alpha$  de la famille telle que  $\varphi$  soit  $\geq 0$  sur

$\bigvee_{\alpha} \cap M$ , ou sur  $\bigvee_{\alpha} \sigma_{\alpha}$  (c'est la même chose). Ceci revient à demander que  $\varphi$  soit dans  $\bigvee_{\alpha} \sigma_{\alpha} = \sigma_{\alpha}$ . Comme  $\varphi$  peut être quelconque, le critère valuatif équivaut au fait que l'union des  $\sigma_{\alpha}$  contienne tout élément de  $N$ , ce qui démontre (a).

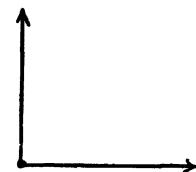
Le critère valuatif dans le cas de  $f: X_{\{\sigma_{\alpha}\}} \rightarrow X_{\{\sigma'_{\beta}\}}$  montre que  $f$  est propre ssi tout élément de  $N \cap (\bigcup \sigma'_{\beta})$  appartient à  $N \cap (\bigcup \sigma_{\alpha})$ , d'où (b). ■

### Exemple de la dimension 2.

On rappelle que les éventails

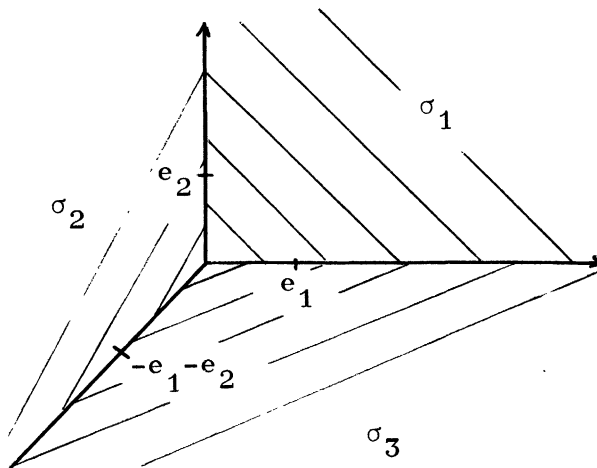


et



corres-

pondent respectivement à  $\mathbb{C}^2$  et à  $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ ; voici des exemples d'éventails qui recouvrent  $\mathbb{R}^2$ , donc tels que les variétés toriques associées soient complètes. Voici d'abord le plan projectif de  $\mathbb{P}^2$ .



Cette variété est en effet recouverte par 3 ouverts  $X_i = X_{\sigma_i}$  avec :

$$X_1 = \text{Spec } \mathbb{C}[X, Y]$$

$$X_2 = \text{Spec } \mathbb{C}[XY, X^{-1}]$$

$$X_3 = \text{Spec } \mathbb{C}[XY, Y^{-1}] .$$

On retrouve la description standard du plan projectif.

On se contentera d'étudier les éventails  $\{\sigma_{\alpha}\}$  de  $\mathbb{R}^2$  qui sont tels que la variété  $X_{\{\sigma_{\alpha}\}}$  soit propre et lisse. Ceci signifie

$$- \bigcup \sigma_{\alpha} = \mathbb{R}^2 ;$$

$$- \text{chaque } \sigma_{\alpha} \text{ est du type } \mathbb{R}_+ x + \mathbb{R}_+ y, \text{ où } (x, y) \text{ est une base de } \mathbb{Z}^2.$$

On peut donc indexer les  $\sigma$  par  $\mathbb{Z}/m$ , pour un entier  $m \geq 3$  et trouver des  $y_i \in \mathbb{Z}^2$

(pour  $i \in \mathbb{Z}/m$ ) de sorte que :

- pour  $i \in \mathbb{Z}/m$ , on a :  $\sigma_i = \mathbf{R}_+ y_{i-1} + \mathbf{R}_+ y_i$  ;
- $(y_{i-1}, y_i)$  est une base de  $\mathbb{Z}^2$  ;
- on a :  $\mathbf{R}_+ y_i = \sigma_i \cap \sigma_{i+1}$  .

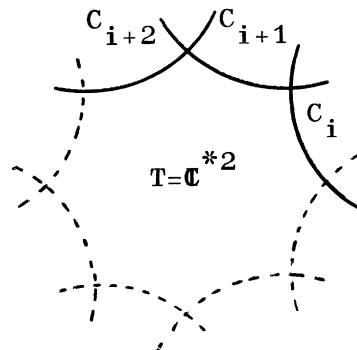
On ne perd rien à supposer que  $(y_0, y_1)$  est la base standard de  $\mathbb{Z}^2$ . Pour tout  $i$ , on peut écrire

$$\begin{pmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ y_i \end{pmatrix}$$

ce qui montre que l'éventail est décrit par la famille des  $a_i \in \mathbb{Z}$  assujettis à la condition :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} = \text{Id} \quad .$$

Alors  $X_{\{\sigma_i\}} - T$  est l'union d'orbites de dimension 1, soit  $C_i^0 = \mathbb{O}(\mathbf{R}_+ y_i)$ , et d'orbites de dimension 0. Les adhérences  $C_i$  des  $C_i^0$  sont des droites projectives;  $C_i$  et  $C_{i+1}$  se coupent transversalement en l'orbite  $\mathbb{O}(\mathbf{R}_+ y_i + \mathbf{R}_+ y_{i+1})$  de dimension 0, et  $C_i$  et  $C_j$  ne se coupent pas si  $i$  et  $j$  ne sont pas consécutifs. D'où la figure

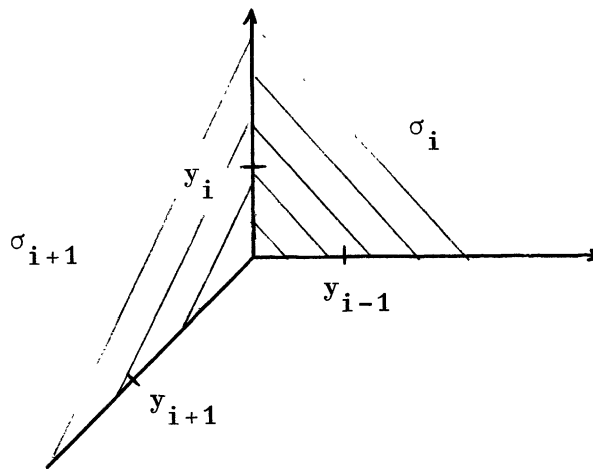


Proposition :  $a_i = (C_i \cdot C_i)$ , self-intersection de  $C_i$  dans la surface lisse  $X = X_{\{\sigma_i\}}$ .

Démonstration : On peut supposer que  $(y_{i-1}, y_i)$  est égal à  $(e_1, e_2)$ , base standard de  $\mathbb{Z}^2$ . Alors on a :  $y_{i+1} = -e_1 - a_i e_2$ . On a :

$$X_{\sigma_i} = \text{Spec } k[X, Y]$$

$$X_{\sigma_{i+1}} = \text{Spec } k[X^{-1}, X^{-a_i} Y] \quad .$$



Déterminons dans ces deux ouverts l'idéal  $\mathfrak{J}$  de la courbe  $C_i$  :

dans  $X_{\sigma_i}$ , on a  $\mathfrak{J}|_{X_{\sigma_i}} = (Y)$  ;

dans  $X_{\sigma_{i+1}}$ , on a  $\mathfrak{J}|_{X_{\sigma_{i+1}}} = (X^{-a_i} Y)$  .

La courbe  $C_i$  est recouverte par deux cartes affines

$$U_1 = C_i \cap X_{\sigma_i} = \text{Spec } k[X]$$

$$U_2 = C_i \cap X_{\sigma_{i+1}} = \text{Spec } k[X^{-1}] \quad .$$

L'idéal  $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$  est engendré par  $Y$  dans la première carte, et par  $X^{-a_i} Y$  dans la deuxième. Il est donc représenté comme faisceau inversible sur  $C_i$ , par le

1-cocycle à valeurs dans  $\mathcal{O}_{C_i}^*$  qui vaut  $X^{-a_i}$  sur  $U_1 \cap U_2$  ; on a donc :

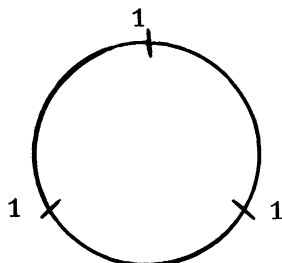
$c_1(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) = -a_i$  . Or  $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$  est le dual du faisceau normal  $\mathfrak{N}$  à  $C_i$  dans  $X$ . On a alors :

$$(C_i \cdot C_i) = c_1(\mathfrak{N}) = -c_1(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) = a_i \quad . \quad \blacksquare$$

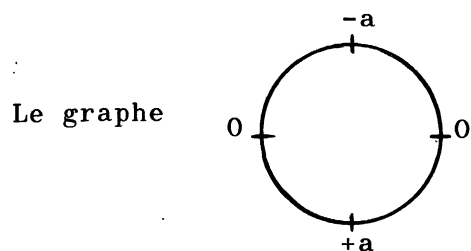
A une famille  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}/m}$  comme plus haut, on associe un graphe pondéré à  $m$  sommets et  $m$  arêtes :

- les sommets correspondant aux courbes  $C_i$  et affectés du poids  $a_i$  ;
- les arêtes correspondant aux points  $C_i \cap C_{i+1}$  joignant les sommets correspondant à  $C_i$  et à  $C_{i+1}$ .

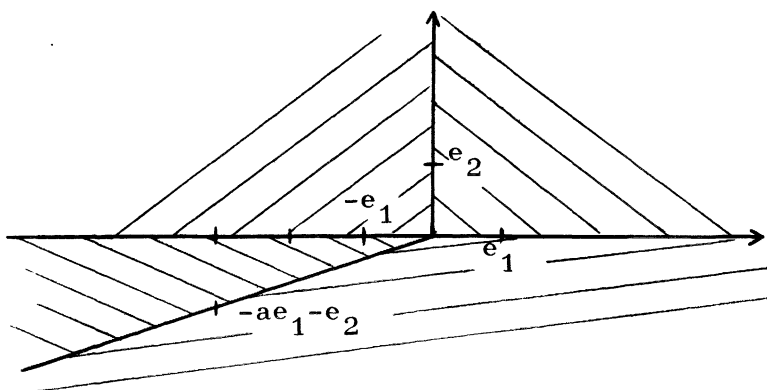
Voici, par exemple, le graphe correspondant à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  :



Voici un autre exemple.



correspond à l'éventail



et on vérifie que la variété torique correspondante n'est autre que  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a))$ , le fibré en droites projectives sur  $\mathbb{P}_1$  obtenu en compactifiant fibre par fibre l'espace total du fibré  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a)$ .

Espaces projectifs (tordus).

Rappelons que  $\mathbb{P}_k^n = \text{Proj } k[X_0, \dots, X_n]$  est recouvert par les ouverts  $U_i = U_{X_i} = \{x \in \mathbb{P}_k^n \text{ tq } X_i(x) \neq 0\}$ . On a donc :

$$U_i = \text{Spec} \left[ \frac{X_0}{X_i}, \frac{X_1}{X_i}, \dots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right] .$$

On fait agir sur  $\mathbb{A}_k^{n+1} = \text{Spec } k[X_0, \dots, X_n]$  le tore  $\mathbb{G}_m^{n+1}$  de façon diagonale ; l'action se descend à  $\mathbb{P}_k^n$ , et se factorise par le tore  $T$  quotient de  $\mathbb{G}_m^{n+1}$  par le sous-tore  $\mathbb{G}_m$  des homothéties. En posant  $\frac{X_i}{X_0} = x_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ , on identifie  $U_0$  à  $\mathbb{A}_k^n$  et  $T$  à  $\mathbb{G}_m^n$ . On a :  $U_\sigma = X_\sigma$  pour  $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$ . Avec ces conventions, pour  $1 \leq i \leq n$ , on a :

$$U_i = \text{Spec } k[x_i^{-1}, x_1 x_i^{-1}, \dots, x_{i-1} x_i^{-1}, x_{i+1} x_i^{-1}, \dots, x_n x_i^{-1}]$$

d'où  $U_i = X_{\sigma_i}$ , avec

$$\sigma_i = \mathbb{R}_+ \cdot \left( -\sum_{1 \leq j \leq n} e_j \right) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \mathbb{R}_+ \cdot e_j .$$

Si on pose  $e_0 = -\sum_{1 \leq i \leq n} e_i$ , l'éventail est la famille des cônes polyédraux  $\sigma_I$ , pour  $I$  sous-ensemble de  $\{0, \dots, n\}$  de cardinal  $\leq n$ , à savoir :

$$\sigma_I = \sum_{i \in I} \mathbb{R}_+ \cdot e_i .$$

Du point de vue simplicial, l'éventail  $\{\sigma_I\}$  est le bord du cône polyédral  $\mathbb{R}_+^{n+1}$ .

Si on garde l'éventail  $\{\sigma_I\}$  de  $\mathbb{R}^n$ , mais si on change le réseau  $\mathbb{Z}^n = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathbb{Z} \cdot e_i$ , en le remplaçant par un réseau isogène  $N = \bigoplus_{0 \leq i \leq n} \mathbb{Z} \cdot (\lambda_i e_i)$  avec  $\lambda_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ , on obtient une variété complète, généralement singulière, qui est localement quotient de  $\mathbb{A}_k^n$  pour l'action d'un groupe cyclique. On reconnaît aisément dans cette variété l'espace projectif tordu, quotient de  $\mathbb{A}_k^{n+1}$  par l'action diagonale d'un groupe  $\mathbb{G}_m$ .

$$x \in \mathbb{G}_m \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ x & & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & x & & \\ 0 & & & \lambda_n \\ & & x & \end{pmatrix}$$

La méthode décrite plus loin permet donc de désingulariser ces espaces projectifs tordus. Par ailleurs, la description précédente montre qu'un tel espace projectif tordu est quotient de  $\mathbb{P}_k^n$  par l'action d'un groupe abélien fini.

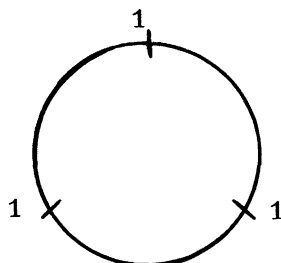
#### Topologie des variétés toriques.

On suppose  $k = \mathbb{C}$  ; on veut étudier la topologie de la variété torique

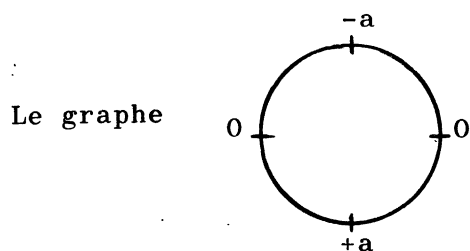
A une famille  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}/m}$  comme plus haut, on associe un graphe pondéré à  $m$  sommets et  $m$  arêtes :

- les sommets correspondant aux courbes  $C_i$  et affectés du poids  $a_i$  ;
- les arêtes correspondant aux points  $C_i \cap C_{i+1}$  joignant les sommets correspondant à  $C_i$  et à  $C_{i+1}$ .

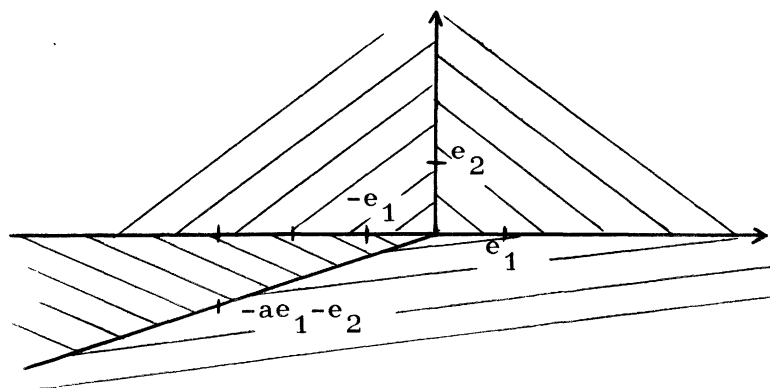
Voici, par exemple, le graphe correspondant à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  :



Voici un autre exemple.



Le graphe correspond à l'éventail



et on vérifie que la variété torique correspondante n'est autre que  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a))$ , le fibré en droites projectives sur  $\mathbb{P}_1$  obtenu en compactifiant fibre par fibre l'espace total du fibré  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a)$ .

Espaces projectifs (tordus).

Rappelons que  $\mathbb{P}_k^n = \text{Proj } k[X_0, \dots, X_n]$  est recouvert par les ouverts  $U_i = U_{X_i} = \{x \in \mathbb{P}_k^n \text{ tq } X_i(x) \neq 0\}$ . On a donc :

$$U_i = \text{Spec} \left[ \frac{X_0}{X_i}, \frac{X_1}{X_i}, \dots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right] .$$



On fait agir sur  $\mathbb{A}_k^{n+1} = \text{Spec } k[X_0, \dots, X_n]$  le tore  $\mathbb{G}_m^{n+1}$  de façon diagonale ; l'action se descend à  $\mathbb{P}_k^n$ , et se factorise par le tore  $T$  quotient de  $\mathbb{G}_m^{n+1}$  par le sous-tore  $\mathbb{G}_m$  des homothéties. En posant  $\frac{X_i}{X_0} = x_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ , on identifie  $U_0$  à  $\mathbb{A}_k^n$  et  $T$  à  $\mathbb{G}_m^n$ . On a :  $U_\sigma = X_\sigma$  pour  $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$ . Avec ces conventions, pour  $1 \leq i \leq n$ , on a :

$$U_i = \text{Spec } k[x_i^{-1}, x_1 x_i^{-1} \dots, x_{i-1} x_i^{-1}, x_{i+1} x_i^{-1}, \dots, x_n x_i^{-1}]$$

d'où  $U_i = X_{\sigma_i}$ , avec

$$\sigma_i = \mathbb{R}_+ \cdot \left( -\sum_{1 \leq j \leq n} e_j \right) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \mathbb{R}_+ \cdot e_j .$$

Si on pose  $e_0 = -\sum_{1 \leq i \leq n} e_i$ , l'éventail est la famille des cônes polyédraux  $\sigma_I$ , pour  $I$  sous-ensemble de  $\{0, \dots, n\}$  de cardinal  $\leq n$ , à savoir :

$$\sigma_I = \sum_{i \in I} \mathbb{R}_+ \cdot e_i .$$

Du point de vue simplicial, l'éventail  $\{\sigma_I\}$  est le bord du cône polyédral  $\mathbb{R}_+^{n+1}$ .

Si on garde l'éventail  $\{\sigma_I\}$  de  $\mathbb{R}^n$ , mais si on change le réseau  $\mathbb{Z}^n = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathbb{Z} \cdot e_i$ , en le remplaçant par un réseau isogène  $N = \bigoplus_{0 \leq i \leq n} \mathbb{Z} \cdot (\lambda_i e_i)$  avec  $\lambda_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ , on obtient une variété complète, généralement singulière, qui est localement quotient de  $\mathbb{A}_k^n$  pour l'action d'un groupe cyclique. On reconnaît aisément dans cette variété l'espace projectif tordu, quotient de  $\mathbb{A}_k^{n+1}$  par l'action diagonale d'un groupe  $\mathbb{G}_m$ .

$$x \in \mathbb{G}_m \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ x & & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & x & & \\ 0 & & & \lambda_n \\ & & & x \end{pmatrix}$$

La méthode décrite plus loin permet donc de désingulariser ces espaces projectifs tordus. Par ailleurs, la description précédente montre qu'un tel espace projectif tordu est quotient de  $\mathbb{P}_k^n$  par l'action d'un groupe abélien fini.

#### Topologie des variétés toriques.

On suppose  $k = \mathbb{C}$  ; on veut étudier la topologie de la variété torique

$X = X_{\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}}$ , où  $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$  est un éventail de  $N_{\mathbf{R}}$ . Pour chaque  $\alpha$ , on sait que la flèche  $\pi_1(T, 1) \rightarrow \pi_1(X_{\sigma_\alpha}, 1)$  est surjective, de noyau  $L(\sigma_\alpha) \cap N$ , où  $L(\sigma_\alpha)$  est l'espace vectoriel engendré par  $\sigma_\alpha$  dans  $N_{\mathbf{R}}$ . Le recouvrement ouvert  $\{X_{\sigma_\alpha}\}$  de  $X$  est fini stable par intersections ; le théorème de Van Kampen dit que  $\pi_1(X, 1)$  est le quotient du produit libre des  $\pi_1(X_{\sigma_\alpha}, 1)$  pour  $\alpha \in A$ , par les identifications déduites des flèches  $\pi_1(X_{\sigma_\beta}, 1) \rightarrow \pi_1(X_{\sigma_\alpha}, 1)$  pour  $\sigma_\beta$  de  $\sigma_\alpha$ . Il s'ensuit que la flèche  $\pi_1(T, 1) \rightarrow \pi_1(X, 1)$  est surjective, et que son noyau est  $L(U_{\sigma_\alpha}) \cap N$ , où  $L(U_{\sigma_\alpha})$  est le sous-espace vectoriel de  $N_{\mathbf{R}}$  engendré par  $\bigcup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha$ . En particulier, si  $X$  est complète, i.e. si  $\bigcup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha = N_{\mathbf{R}}$ ,  $X$  est simplement connexe.

Pour calculer la cohomologie entière de  $X$ , soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$  les éléments de  $A$  tels que les faces  $\sigma_{\alpha_i}$  soient maximales dans l'éventail  $\{\sigma_\alpha\}$ . On pose pour simplifier :  $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$ . Les  $X_{\sigma_i}$  forment un recouvrement ouvert de  $X$ , d'où une suite spectrale de type cohomologique

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq \ell} H^q(X_{\sigma_{i_1}} \cap \dots \cap X_{\sigma_{i_p}}, \mathbb{Z})$$

$$\Downarrow$$

$$H^{p+q-1}(X, \mathbb{Z})$$

Avec les notations du § 1, on a :  $H^q(X_{\sigma_{i_1}} \cap \dots \cap X_{\sigma_{i_p}}, \mathbb{Z}) = \Lambda^q(V(\sigma_{i_1} \cap \dots \cap \sigma_{i_p}))$ . Comme application de cette suite spectrale, calculons  $\chi(X)$

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n \dim H^n(X, \mathbb{Z}) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q-1} \dim(E_1^{p,q})$$

$$\text{d'où } \chi(X) = \sum_p (-1)^{p-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq \ell} \left( \sum_q (-1)^q \dim \Lambda^q(V(\sigma_{i_1} \cap \dots \cap \sigma_{i_p})) \right)$$

Or pour  $W$  un  $\mathbb{Z}$ -module libre,  $\sum_q (-1)^q \dim \Lambda^q(W)$  est nul si  $W \neq 0$  et vaut 1 si  $W = 0$ . Or  $V(\sigma_{i_1} \cap \dots \cap \sigma_{i_p}) = 0$  ssi  $\sigma_{i_1} \cap \dots \cap \sigma_{i_p}$  engendre  $N_{\mathbf{R}}$  comme espace vectoriel, donc ssi  $p = \ell$ . On trouve donc :  $\chi(X) = \ell$  ; ce résultat se déduit d'ailleurs du fait que les  $\sigma_i$  ( $1 \leq i \leq \ell$ ) sont les points de  $X$  invariants par  $T$ , donc par un groupe à un paramètre bien choisi du groupe de Lie  $T$ .

On peut utiliser la suite spectrale pour montrer que la flèche

$\text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$  est surjective lorsque les  $\sigma_i$  sont de dimension  $n$  (donc en particulier, lorsque  $\{\sigma_\alpha\}$  est un éventail complet). Notons d'abord que ceci entraîne  $V(\sigma_i) = 0$  et  $H^q(X_{\sigma_{\alpha_i}}) = 0$  pour  $q \geq 1$ , d'où  $E_1^{1,q} = 0$  pour  $q \geq 1$ . On a donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow E_\infty^{3,0} \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow E_\infty^{2,1} \longrightarrow 0.$$

Par ailleurs, montrons que  $E_2^{3,0} = 0$ . En effet  $E_2^{p,0}$ , pour  $p \geq 1$  est un groupe de cohomologie de la suite :

$$E_1^{p-1,0} \xrightarrow{d_1} E_1^{p,0} \xrightarrow{d_1} E_1^{p+1,0}.$$

Or on a :  $E_1^{p,0} = \Lambda^p(\mathbb{Z}^\ell)$ , et  $d_1$  est la différentielle extérieure, d'où  $E_2^{p,0} = 0$  pour  $p \geq 1$ .

On a donc :  $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong E_\infty^{2,1}$ . Il est clair que  $E_\infty^{2,1} = E_2^{2,1}$ . Comme  $E_1^{1,1} = 0$ , on a :  $E_2^{2,1} = \ker(d_1 : E_1^{2,1} \rightarrow E_1^{3,1})$ . On a :  $E_1^{2,1} = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq \ell} V(\sigma_{i_1} \cap \sigma_j)$ .

Un élément  $(x_{i,j} \in V(\sigma_i \cap \sigma_j))_{1 \leq i < j \leq \ell}$  est dans  $\ker d_1$  ssi  $x_{i,j} + x_{j,k} = x_{i,k}$  pour  $1 \leq i < j < k \leq \ell$ .

Or, remarquons que pour  $r \in M$ ,  $\underline{X}^r$  est inversible sur  $X_{\sigma_i} \cap X_{\sigma_j}$  ssi  $r \in V(\sigma_i \cap \sigma_j)$  ; il en résulte que la famille  $(\underline{X}^{x_{i,j}} \in \Gamma \subset (X_{\sigma_i} \cap X_{\sigma_j}, \mathcal{O}_X^*))$  est un 1-cocycle du recouvrement de Zariski  $\{X_{\sigma_i}\}$  à valeurs dans  $\mathcal{O}_X^*$  ; ce 1-cocycle représente un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $X$ , et on laisse au lecteur le soin de ne pas vérifier que  $c_1(\mathcal{L})$  correspond à  $(x_{i,j})$  par l'isomorphisme entre  $H^2(X, \mathbb{Z})$  et  $E_2^{2,1}$ .

Ceci montre que la flèche  $\text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$  est surjective. De plus, le faisceau  $\mathcal{L}$  est par construction T-linéarisé, donc la flèche  $\text{Pic}_T(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$  est également surjective.

Dans le cas général, où les  $\sigma_i$  ne sont plus supposés être de dimension  $n$ , je conjecture que  $\text{Pic}_T(X)$  et  $\text{Pic}(X)$  ont même image dans  $H^2(H, \mathbb{Z})$ . Je conseille de comparer ceci à la démonstration du Théorème 12 et à la remarque qui la suit.

Nous passons à la description des faisceaux cohérents d'idéaux fractionnaires, T-linéarisés, sur une variété  $X_{\{\sigma_\alpha\}}$  associée à un éventail  $\{\sigma_\alpha\}$  de  $N_{\mathbf{R}}$ .

Soit  $T \xrightarrow{i} X$  l'inclusion canonique, où  $X = X_{\{\sigma_\alpha\}}$ . L'image directe  $i_*(\mathcal{O}_T)$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent contenu dans le faisceau constant  $K(X)$  des fonctions rationnelles sur  $X$  (c'est en effet la réunion de ses sous-Modules cohérents). De plus  $i_*(\mathcal{O}_T)$  est muni d'une action naturelle de  $T$ .

Soit donc  $\mathfrak{F}$  un sous- $\mathcal{O}_X$ -Module de  $i_*(\mathcal{O}_T)$ , invariant sous  $T$ , qu'on supposera trivial sur  $T$ , comme l'action simplement transitive de  $T$  sur lui-même le permet. On lui associe une fonction  $\text{ord } \mathfrak{F} : \bigcup \sigma_\alpha \rightarrow \mathbf{R}$  de la façon suivante.

Fixons-nous un  $\sigma_\alpha$  et soit  $a \in N \cap \sigma_\alpha$ , et  $\lambda_a : \text{Spec } k[X] \rightarrow X_{\sigma_\alpha}$  l'extension du groupe à 1-paramètre  $\lambda_a$  fournie par le Théorème 1. L'image réciproque  $\lambda_a^* \mathfrak{F}$  est un faisceau d'idéaux fractionnaires sur  $k[X]$ ; soit  $\text{ord } \mathfrak{F}(a)$  la valuation en 0 de ce faisceau.

Calculons explicitement  $\text{ord } \mathfrak{F}(a)$ ; remarquons que la restriction de  $\mathfrak{F}$  à  $X_{\sigma_\alpha}$  est un faisceau du type  $\tilde{J}_\alpha$ , où  $J_\alpha$  est un module  $M$ -gradué, de type fini sur l'anneau  $R_\alpha = \text{Spec } k[\bigvee_{\sigma_\alpha} \cap M]$ . On peut donc écrire :  $J_\alpha = \sum_{i=1}^N R_\alpha \cdot \underline{X}^{r_i}$  où les  $r_i$  sont dans  $M$ . Par conséquent  $\lambda_a^* \tilde{J}_\alpha$  est défini par le  $k[X]$ -module  $\sum_i k[X] \cdot X^{\langle r_i, a \rangle}$ . D'où la formule :

$$\text{ord } \mathfrak{F}(a) = \inf_{1 \leq i \leq N} \langle r_i, a \rangle ,$$

qui permet d'étendre  $\text{ord } \mathfrak{F}$  à  $\sigma_\alpha$ . Il est clair que  $\text{ord } \mathfrak{F}$  est ainsi bien définie sur  $\bigcup \sigma_\alpha$ , et ne dépend que du faisceau  $\mathfrak{F}$ . Elle a les propriétés suivantes :

- (i)  $\text{ord } \mathfrak{F}(\lambda x) = \lambda \cdot \text{ord } \mathfrak{F}(x)$  pour  $\lambda \in \mathbf{R}^+$ ;
- (ii)  $\text{ord } \mathfrak{F}$  est continue et linéaire par morceaux ;
- (iii)  $\text{ord } \mathfrak{F}(N \cap (\bigcup \sigma_\alpha)) \subset \mathbf{Z}$  ;
- (iv)  $\text{ord } \mathfrak{F}$  est convexe sur chaque  $\sigma_\alpha$ .

Inversement, soit  $f : \bigcup \sigma_\alpha \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction satisfaisant ces conditions, et pour chaque  $\alpha$  considérons le  $\Gamma(\mathcal{O}_{X_{\sigma_\alpha}})$ -module gradué

$$(J_f)_\alpha = \bigoplus_{\substack{r \in M \\ r \geq f \text{ sur } \sigma_\alpha}} k \cdot \underline{X}^r .$$

Nous atteignons maintenant le

Théorème 9 : I. Soit  $f$  une fonction satisfaisant les conditions (i), (ii), (iii), (iv). Alors les  $(\tilde{J}_f)_\alpha$  se recollent en un faisceau cohérent,  $T$ -invariant, d'idéaux fractionnaires, soit  $\mathfrak{F}_f$ . De plus,  $\mathfrak{F}_f$  est un faisceau d'idéaux complet au sens de Zariski.

II. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (a)  $\text{ord}(\mathfrak{F}_f) = f$  ;
- (b)  $\mathfrak{F}_{\text{ord } \mathfrak{F}}$  est la clôture intégrale de  $\mathfrak{F}$  ;
- (c) les applications :  $\mathfrak{F} \mapsto \text{ord } \mathfrak{F}$  et  $f \mapsto \mathfrak{F}_f$  sont deux bijections réciproques entre l'ensemble des sous- $\mathcal{O}_X$ -Modules cohérents de  $i_*(\mathcal{O}_T)$ , invariants sous  $T$  et complets ;
- (d) on a  $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_f$  ssi  $(\text{ord } \mathfrak{F} \geq f)$  ;
- (e)  $\text{ord}(\mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2) = \text{ord}(\mathfrak{F}_1) + \text{ord}(\mathfrak{F}_2)$  ;
- (f)  $\mathfrak{F}/X_{\sigma_\alpha} = \mathcal{O}_{X_{\sigma_\alpha}}$  ssi  $\text{ord } \mathfrak{F} = 0$  sur  $\sigma_\alpha$  ;
- (g)  $\mathfrak{F}_{f_1}$  et  $\mathfrak{F}_{f_2}$  sont isomorphes comme  $\mathcal{O}_X$ -Modules ssi  $f_1 - f_2$  est linéaire sur  $\bigcup_{\sigma_\alpha}$ .

III. (a)  $\mathfrak{F}^{-1} = \mathfrak{F}_g$ , où  $g$  est l'interpolation convexe de la fonction convexe  $-\text{ord}(\mathfrak{F})$  sur  $\bigcup_{\alpha} \text{Sk}^1(\sigma_\alpha)$ , le squelette d'ordre 1 de l'éventail  $\bigcup_{\alpha} \sigma_\alpha$ .

(b)  $(\mathfrak{F}^{-1})^{-1} = \mathfrak{F}$  ssi  $\mathfrak{F}$  est complet et si  $\text{ord } \mathfrak{F}$  est l'interpolation convexe d'une fonction  $\bigcup_{\alpha} \text{Sk}^1(\sigma_\alpha) \rightarrow \mathbb{Z}$  ;

(c)  $\mathfrak{F}$  est inversible ssi  $\text{ord } \mathfrak{F}$  est linéaire sur chaque  $\sigma_\alpha$  ; les diviseurs de Weil correspondent bijectivement aux fonctions  $\bigcup_{\alpha} \text{Sk}^1(\sigma_\alpha) \rightarrow \mathbb{Z}$  ;

(d) le bidual  $\check{\Omega}_X^n$  du faisceau canonique  $\Omega_X^n$  est isomorphe à  $\mathfrak{F}_k$ , où  $k$  est l'interpolation convexe de la fonction constante de valeur  $-1$  sur  $\bigcup_{\alpha} \text{Sk}^1(\sigma_\alpha)$ .

Remarque : On note qu'ici une fonction d'un cône convexe de  $N_{\mathbf{R}}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$  est convexe ssi  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ .

Si  $\sigma$  est un cône polyédral de  $N_{\mathbf{R}}$ , alors  $\text{Sk}^1(\sigma)$  est l'ensemble des vecteurs primitifs de ses faces de dimension 1. Si  $h: \text{Sk}^1(\sigma) \rightarrow \mathbf{R}$  est une fonction, son interpolation convexe à  $\sigma$  est la plus petite fonction convexe  $\tilde{h}: \sigma \rightarrow \mathbf{R}$  qui soit  $\geq h$  sur  $\text{Sk}^1(\sigma)$  ; on a donc :

$$\tilde{h}(x) = \inf_{\substack{\ell \in M \\ \ell \geq h \text{ sur } \text{Sk}^1(\sigma)}} \ell(x) .$$

L'interpolation convexe à  $\bigcup_{\alpha} \sigma_{\alpha}$  d'une fonction sur  $\bigcup_{\alpha} \text{Sk}^1(\sigma_{\alpha})$  se fait séparément sur chaque  $\sigma_{\alpha}$ .

Démonstration du Théorème 9 :

I. Soit  $f$  une fonction :  $\bigcup_{\alpha} \sigma_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}$  comme dans l'énoncé ; pour tout  $\alpha$ , d'après (ii) et (iv), on peut trouver une famille finie  $r_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) d'éléments de  $M$  telle que  $f(x) = \inf_{1 \leq i \leq k} \langle r_i, x \rangle$  pour  $x \in \sigma_{\alpha}$ . On a donc :

$$(J_f)_{\alpha} = \bigoplus_{\substack{r \geq \inf(r_i) \\ \text{sur } \sigma_{\alpha}}} k \cdot X^r.$$

On va montrer que  $(J_f)_{\alpha}$  est la fermeture intégrale de l'idéal fractionnaire

$\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \underline{X}^{r_i} \cdot R_{\alpha}$ . Soit  $\tau_i = \{x \in \sigma_{\alpha} \text{ tq } f(x) = r_i(x)\}$ . Il est clair que  $\tau_i$  est un cône polyédral, et que  $\bigcup_{\alpha} \tau_i = \sigma_{\alpha}$ . D'après le Théorème 7, on a un morphisme

$X_{\{\tau_i\}} \rightarrow X_{\sigma_{\alpha}}$  ; par les Théorèmes 7 et 8, ce morphisme est propre et surjectif.

pour  $r \in M$ ,  $\underline{X}^r$  est entier sur  $\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \underline{X}^{r_i} \cdot R_{\alpha}$  ssi le même énoncé est vrai sur  $X_{\{\tau_i\}}$ , i.e. ssi, sur chaque  $X_{\tau_i}$ ,  $\underline{X}^r$  est entier sur l'idéal fractionnaire engendré par les  $\underline{X}^{r_j}$  ( $1 \leq j \leq k$ ). Mais sur  $\sigma_i$ , on a :  $r_i \leq r_j$  pour  $1 \leq j \leq k$ , donc  $\underline{X}^{r_j - r_i}$  est holomorphe sur  $X_{\sigma_i}$ , et l'idéal fractionnaire  $(\underline{X}^{r_j})$  est engendré par  $\underline{X}^{r_i}$  ; donc sur  $X_{\sigma_i}$ , on a :  $\underline{X}^r$  est entier sur  $(\underline{X}^{r_j})$  ssi  $\underline{X}^{r - r_i}$  est holomorphe, i.e. ssi  $r(x) \geq r_i(x)$  pour  $x \in \sigma_i$ . On voit donc que  $\underline{X}^r$  est entier sur  $\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \underline{X}^{r_i} \cdot R_{\alpha}$ , ssi  $r(x) \geq f(x)$  pour  $x \in \sigma_{\alpha}$ , d'où notre assertion.

Si  $\sigma_{\beta}$  est une face de  $\sigma_{\alpha}$ , on a alors :  $(J_f)_{\beta} = \Gamma(X_{\sigma_{\beta}}, (\tilde{J}_f)_{\alpha})$  puisque la clôture intégrale d'un faisceau cohérent d'idéaux fractionnaires sur  $X_{\sigma_{\alpha}}$  (à savoir l'idéal engendré par les  $\underline{X}^{r_i}$ ) est un faisceau cohérent d'idéaux fractionnaires. Les recollement des  $(\tilde{J}_f)_{\alpha}$  est donc possible.

II. Est complètement trivial.

III. (a) Soit  $r \in M$  ; on a :  $\underline{X}^r \in \mathfrak{F}^{-1}|_{X_{\sigma_{\alpha}}}$  ssi  $\underline{X}^r \cdot \mathfrak{F}|_{X_{\sigma_{\alpha}}} \subset \mathcal{O}_{X_{\sigma_{\alpha}}}$ . D'après II,

(d), ceci équivaut à  $r \geq -\text{ord } \mathfrak{F} \text{ sur } \sigma_{\alpha}$ , donc à  $r \geq g$ , où  $g$  est l'interpolation convexe de  $-\text{ord } \mathfrak{F} \text{ sur } \sigma_{\alpha}$ .

(b) est une conséquence triviale de (a).

(c) On a une base du groupe des diviseurs de Weil T-invariants formée des  $\overline{0}_x$ , pour  $x \in \bigcup_{\alpha} \text{Sk}^1(\sigma_{\alpha})$ , puisque  $X$  est normale. Sur chaque  $\sigma$ , le faisceau

d'idéaux de  $\overline{\mathfrak{O}}_x$  contient tous les  $\underline{X}^r$  tels que  $\langle r, x \rangle > 0$  ; l'ordre de ce diviseur est donc l'interpolation convexe d'une fonction de Dirac-Kronecker sur  $\bigcup_{\alpha} \text{Sk}^1(\sigma_{\alpha})$ .

(d) Comme  $X$  est normale, Si  $X_{\text{reg}}$  est l'ouvert régulier de  $X$ , et  $j: X_{\text{reg}} \rightarrow X$ , on a :  $\widehat{\Omega}_X^n = j_*(\Omega_{X_{\text{reg}}}^n)$ . Il suffit de montrer que la forme holomorphe  $\omega$  de Haar sur  $T$  a un pôle d'ordre 1 le long de chaque  $\overline{\mathfrak{O}}^x$ , pour  $x \in \text{Sk}^1(\sigma_{\alpha})$ . Or on a :  $X_{\sigma_{\alpha}} = \text{Spec}(k[\check{\sigma}_{\alpha} \cap M])$ , l'idéal de  $\overline{\mathfrak{O}}^x$  est  $I^x = k[\tau]$ , où  $\tau = \{r \in \check{\sigma}_{\alpha} \cap M \text{ tq } \langle r, x \rangle > 0\}$ . Il existe  $r \in \tau$  tel que  $\langle r, x \rangle = 1$ , cet  $r$  est une uniformisante de l'anneau local de  $X_{\sigma_{\alpha}}$  en  $\overline{\mathfrak{O}}^x$ . Complétons  $r$  en une base  $(r = r_1, r_2, \dots, r_n)$  de  $M$  telle que  $\langle r_i, x \rangle = 0$ , pour  $i = 2, \dots, n$ . Alors  $\omega$  est un multiple constant de  $\frac{d\underline{X}^r}{\underline{X}^r} \wedge \frac{d\underline{X}^{r_2}}{\underline{X}^{r_2}} \wedge \dots \wedge \frac{d\underline{X}^{r_n}}{\underline{X}^{r_n}}$ . Or les  $\underline{X}^{r_i}$  forment un système de coordonnées locales au voisinage d'un point général de  $\overline{\mathfrak{O}}^x$ , d'où le résultat. ■

Théorème 10 : Soit  $X = X_{\{\sigma_{\alpha}\}}$ , soit  $\mathfrak{F}$  un faisceau cohérent d'idéaux fractionnaires  $T$ -invariant sur  $X$ . Soit  $B_{\mathfrak{F}}(X)$  l'éclatement normalisé de  $\mathfrak{F}$ . Alors  $B_{\mathfrak{F}}(X)$  est une  $T$ -variété décrite par la subdivision de  $\{\sigma_{\alpha}\}$  en les plus grands cônes polyédraux où la fonction  $\text{ord}(\mathfrak{F})$  est linéaire.

Démonstration : Comme  $\mathfrak{F}$  est  $T$ -invariant, il est clair que  $T$  agit sur le diagramme  $B_{\mathfrak{F}}(X) \rightarrow X$ . Comme  $\mathfrak{F}$  est inversible sur l'ouvert  $T$  de  $X$ , on voit que l'éclatement normalisé est un isomorphisme au-dessus de  $T$ , de sorte que l'on a une immersion équivariante  $T \hookrightarrow B_{\mathfrak{F}}(X)$ . On note que pour un cône polyédral  $\tau \subset U_{\sigma_{\alpha}}$ , l'image réciproque de  $\mathfrak{F}$  sur  $X_{\tau}$  est un faisceau inversible ssi  $\text{ord}(\mathfrak{F})$  est linéaire sur  $\tau$ , d'après le Théorème 9, III, (c). On conclut en utilisant la propriété universelle d'un éclatement normalisé.

Théorème 11 : Soit  $X = X_{\{\sigma_{\alpha}\}}$  ; il existe un faisceau cohérent  $T$ -invariant  $\mathfrak{F}$  d'idéaux fractionnaires sur  $X$  tel que  $B_{\mathfrak{F}}(X)$  soit lisse.

Démonstration : On rappelle qu'un simplexe de  $N_{\mathbb{R}}$  est un cône polyédral du type  $\sigma = \{\sum \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0\}$  où les  $x_i \in N$  sont linéairement indépendants dans  $N$ . La multiplicité d'un simplexe  $\sigma$  est l'indice du groupe  $\sum \mathbb{Z} \cdot x_i$  dans  $(\sum \mathbb{R} \cdot x_i) \cap N$ . Un simplexe  $\sigma$  est de multiplicité 1 ssi  $\{x_i\}$  fait partie d'une base de  $N$ , i.e. ssi la variété  $X_{\sigma}$  est lisse (Théorème 4).

On doit trouver une fonction  $f: \bigcup \sigma_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant (i), (ii), (iii), (iv) telle que les polyèdres associés à  $f$  (i.e. les plus grands polyèdres où  $f$

est linéaire) soient des simplexes de multiplicité 1 ; notons qu'on peut assouplir la condition (iii) en la remplaçant par :  $\text{ord } \mathfrak{F}(N \cap (\cup \sigma_\alpha)) \subset \mathbb{Q}$ .

On raisonnera par induction sur le nombre de  $\sigma_\alpha$  (en partant de 0). Soit donc  $\sigma_{\alpha_0}$  un cône polyédral de dimension maximale, et supposons donnée sur  $\cup_{\alpha \neq \alpha_0} \sigma_\alpha$  une fonction  $f_0$  satisfaisant les conditions requises ; le lemme qui suit permet de trouver sur  $\cup \sigma_\alpha$  une fonction  $f$  qui satisfait aux conditions (i)-(iv), et dont les polyèdres associés soient des simplexes.

**Lemme 1** : Soit  $\sigma$  un cône polyédral, soit  $f_0$  une fonction sur  $\partial\sigma$ , linéaire par morceaux et convexe sur chaque face de  $\partial\sigma$ , et soit  $x_0 \in N \cap \text{int}(\sigma)$  ; définissons sur  $\sigma$  une fonction  $f$  par :

$$f(\alpha x_0 + \beta y) = \alpha C + \beta f_0(y) \quad \text{pour } y \in \partial\sigma, \alpha, \beta \geq 0,$$

où  $C$  est une constante rationnelle.

Si  $C$  est assez grand, la fonction  $f$  est convexe et ses polyèdres associés sont de la forme  $\langle \tau, x_0 \rangle$ , où les  $\tau$  sont les polyèdres  $\tau$  de  $\partial\sigma$  associés à  $f_0$ .

**Démonstration** : Soit  $\{\tau_i\}$  la famille des cônes polyédraux de  $\partial\sigma$  associés à  $f_0$ , soit  $\{\tau'_\alpha\}_{\alpha \in A}$  une subdivision finie telle que pour tous  $\alpha, \beta \in A$ , il existe  $i \in I$  tel que  $\tau'_\alpha + \tau'_\beta \subset \tau_i + \mathbb{R}_+ x_0$ .

Pour  $x \in \tau'_\alpha$  et  $y \in \tau'_\beta$ , on a :  $x + y = \lambda(x, y) \cdot x_0 + z(x, y)$  où  $\lambda(x, y) \in \mathbb{R}_+$  et  $z(x, y) \in \tau_i$ . Il est clair que  $\lambda(x, y)$  et  $z(x, y)$  sont linéaires en le couple  $(x, y)$ .

On voit que :

$$\begin{aligned} f(x + y + (\alpha + \beta)x_0) - f(x + \alpha x_0) - f(y + \beta x_0) \\ = C \cdot \lambda(x, y) + f_0(z) - f_0(x) - f_0(y) \end{aligned}$$

On prétend qu'il existe  $K \geq 0$  tel que :

$$K\lambda(x, y) \geq f_0(x) + f_0(y) - f_0(z(x, y))$$

En effet, chaque membre est linéaire en le couple  $(x, y) \in \tau'_\alpha \times \tau'_\beta$ . La forme linéaire  $\lambda(x, y)$  est  $\geq 0$ . Si  $\lambda(x, y) = 0$ , alors  $x + y \in \tau_i \subset \partial\sigma$ . Mais alors  $z(x, y) = x + y$  et la forme linéaire de droite est  $\leq 0$ , d'où l'existence de  $K$ .

Si  $C$  est supérieur à toutes ces constantes  $K(\tau'_\alpha, \tau'_\beta)$ , alors  $f$  est convexe. Si  $C$  est supérieur au double de toutes ces constantes, montrons que



les polyèdres associés à  $f$  sont du type  $\langle \tau_i, x_0 \rangle$ .

Tout d'abord, il est clair que  $f$  est linéaire sur chaque  $\langle \tau_i, x_0 \rangle$ .  
Supposons qu'il existe  $x \in \tau_i$ ,  $y \in \tau_j$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$  tels que

$$f(x + y + (\alpha + \beta)x_0) = f(x + \alpha x_0) + f(y + \beta x_0) \quad .$$

On suppose  $x \in \tau'_\alpha$ ,  $y \in \tau'_\beta$  comme avant.

Par hypothèse, on a :  $C \cdot \lambda(x, y) = -f_0(z(x, y)) + f_0(x) + f_0(y)$

$$C \cdot \lambda(x, y) = -f_0(z(x, y)) + f_0(x) + f_0(y) \leq \frac{C}{2} \cdot \lambda(x, y) \quad .$$

On en déduit  $\lambda(x, y) = 0$  et  $f_0(x + y) = f_0(x) + f_0(y)$ , mais ceci n'est possible que si  $\tau'_\alpha$  et  $\tau'_\beta$  sont dans un même  $\tau_i$ . ■

L'application répétée du Lemme 1 permet de trouver des fonctions  $f$  sur  $\bigcup_\alpha \sigma_\alpha$ , satisfaisant les conditions (i)-(iv), telles que les polyèdres associés à  $f$  soient des simplexes ; pour une telle fonction  $f$ , on pose :

$$\text{mult}(f) = \sup_{\tau \text{ associé à } f} \text{mult}(\tau) \quad .$$

On peut trouver un tel  $f$  tel que  $\text{mult}(f) = 1$ .

Lemme 2 : Soit  $f$  une fonction positive, convexe, rationnelle, linéaire par morceaux, sur un cône polyédral  $\sigma$ , et soit  $\{\tau_i\}$  ses polyèdres associés. Soit  $x_0 \in N \cap \sigma$ , et soit  $T$  l'éventail consistant en - les faces  $\tau_i$  qui ne contiennent pas  $x_0$  ;

- les cônes polyédraux du type  $\langle \tau_i, x_0 \rangle$  si  $\tau_i$  ne contient pas  $x_0$ , mais est face d'un  $\tau_j$  qui contient  $x_0$ .

Alors

(i)  $T$  est un éventail qui raffine  $\{\sigma\}$  ;

(ii) pour  $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ , soit  $f_{x_0, \varepsilon}$  la fonction sur  $\sigma$  qui vaut

-  $f$  sur une face  $\tau_i$  telle que

$x_0 \notin \tau_i$  ;

-  $f + \varepsilon g$  sur  $\langle \tau_i, x_0 \rangle$ , où  $g$  est une

forme linéaire telle que  $g(x_0) = 1$  et  $g/\tau_i = 0$ .

Alors, pour  $\varepsilon$  assez petit,  $f_{x_0, \varepsilon}$  est une fonction convexe rationnelle sur  $\sigma$ , dont les polyèdres associés sont les éléments de  $T$ .

Démonstration : (i) Soit  $\tau_0$  l'unique polyèdre associé à  $f$  qui contient  $x_0$  dans son intérieur ; alors  $T$  s'obtient par une subdivision barycentrique de  $\tau_0$ .

(ii) On dit qu'un cône polyédral est du type 1 si  $\tau_i$  est un polyèdre maximal parmi ceux associés à  $f$ , et si  $\tau_i$  ne contient pas  $x_0$ . On dit que  $\tau_i$  est du type 2 si  $\tau_i$  ne contient pas  $x_0$ , et est une face de codimension 1 d'un polyèdre maximal  $\tau_j$  qui contient  $x_0$ .

Il est clair que les  $\tau_i$  de type 1 et les  $\langle \tau_j, x_0 \rangle$ , pour  $\tau_j$  de type 2, sont les éléments maximaux de  $T$ . Il est clair aussi que  $f_{x_0, \varepsilon}$  est linéaire sur chaque  $\tau_i$  pour  $\tau_i$  du type 1 et sur chaque  $\langle \tau_j, x_0 \rangle$ , pour  $\tau_j$  du type 2.

On se donne une subdivision finie  $\{\tau'_\alpha\}$  de  $\{\tau_i\}$  telle que si  $\tau'_\alpha \subset \tau_i$  et  $\tau'_\beta \subset \tau_j$ , et si l'un des deux polyèdres  $\tau_i$  ou  $\tau_j$  est du type 2, alors il existe un polyèdre  $\tau_k$  du type 1 ou du type 2 tel que  $\tau'_\alpha + \tau'_\beta \subset \langle \tau_k, x_0 \rangle$ .

On partagera l'étude en cinq cas :

1er cas :  $\tau_i$  et  $\tau_j$  sont du type 1.

Alors  $\tau_i$  et  $\tau_j$  sont des éléments de  $T$ . Si donc  $x \in \tau_i$  et  $y \in \tau_j$ , on a :

$f_{x_0, \varepsilon}(x) = f(x)$  et  $f_{x_0, \varepsilon}(y) = f(y)$  par définition et par construction :

$f_{x_0, \varepsilon}(x+y) \geq f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ . L'égalité n'est possible que si  $x$  ou  $y$  est dans  $\tau_i \cap \tau_j$ .

2nd cas :  $\tau_i$  est du type 1,  $\tau_j$  et  $\tau_k$  sont du type 2.

Pour  $x \in \tau'_\alpha$  et  $y \in \tau'_\beta$ , on a :  $x+y = \lambda(x,y) \cdot x_0 + z(x,y)$ , où  $\lambda(x,y) \in \mathbb{R}_+$ ,  $z(x,y) \in \tau_k$  ; et  $\lambda$  et  $z$  sont linéaires en le couple  $(x,y)$ . On a :

$$f_{x_0, \varepsilon}(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f_{x_0, \varepsilon}(y + \xi x_0) = \varepsilon \xi + f(y + \xi x_0) \quad .$$

$$\text{Par ailleurs : } f_{x_0, \varepsilon}(x + y + \xi x_0) = \varepsilon(\xi + \lambda(x,y)) + f(x + y + \xi x_0) \quad .$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f_{x_0, \varepsilon}(x + y + \xi x_0) - f_{x_0, \varepsilon}(x) - f_{x_0, \varepsilon}(y + \xi x_0) \\ = \varepsilon \lambda(x,y) + f(x + y + \xi x_0) - f(x) - f(y + \xi x_0) \quad . \end{aligned}$$

On a toujours :  $\lambda(x,y) \geq 0$  et  $f(x + y + \xi x_0) \geq f(x) + f(y + \xi x_0)$  .

Si l'expression plus haut est nulle, on a :  $\lambda(x,y) = 0$  (puisque  $\varepsilon > 0$ ) et  $f(x + y + \xi x_0) = f(x) + f(y + \xi x_0)$ . Comme  $\tau_i$  et  $\langle \tau_j, x_0 \rangle$  sont dans deux polyèdres associés à  $f$ , on en déduit que  $y \in \tau_i$  ou  $x \in \langle \tau_j, x_0 \rangle$  .

3ème cas :  $\tau_i$  est du type 1,  $\tau_j$  est du type 2,  $\tau_k$  est du type 1.

Pour  $(x,y) \in \tau'_\alpha \times \tau'_\beta$ , on a alors :

$$f_{x_0, \varepsilon}(x + y + \xi x_0) = f(x + y + \xi x_0)$$

donc :

$$f_{x_0, \varepsilon}(x + y + \xi x_0) - f_{x_0, \varepsilon}(x) - f_{x_0, \varepsilon}(y + \xi x_0) \\ = f(x + y + \xi x_0) - f(x) - f(y + \xi x_0) - \varepsilon \xi .$$

On remarque que  $(x, y, \xi) \mapsto f(x + y + \xi x_0) - f(x) - f(y + \xi x_0)$  est  $\geq 0$  et linéaire en le triple  $(x, y, \xi)$ , donc s'écrit sous la forme  $h(x, y) + k\xi$  où  $h$  est linéaire et où  $k \geq 0$ . Si on avait  $k = 0$ , en faisant  $y = 0$ , on en déduirait  $f(x + \xi x_0) = f(x) + \xi(x_0)$ , et  $f$  serait linéaire sur le polyèdre  $\langle \tau_i, x_0 \rangle$ , qui est strictement plus grand que  $\tau_i$ , ce qui est impossible. Donc  $k > 0$ . Si on suppose  $\varepsilon < k$ , alors on a toujours  $f_{x_0, \varepsilon}(x + y + \xi x_0) \geq f_{x_0, \varepsilon}(x) + f_{x_0, \varepsilon}(y + \xi x_0)$ . Si on a égalité sous ces conditions, alors  $\xi = 0$  et on trouve  $f(x + y + \xi x_0) = f(x) + f(y + \xi x_0)$ , ce qui contredit la définition de  $\tau_i$  et de  $\tau_j$ , à moins que  $y \in \tau_i$  ou  $x \in \langle \tau_j, x_0 \rangle$ .

4ème cas :  $\tau_i, \tau_j$  et  $\tau_k$  sont du type 2.

Alors pour  $(x, y) \in \tau'_\alpha \times \tau'_\beta$ , on a, avec les notations habituelles :

$$f_{x_0, \varepsilon}(x + \xi x_0) = f(x + \xi x_0) + \xi \varepsilon$$

$$f_{x_0, \varepsilon}(y + \eta x_0) = f(y + \eta x_0) + \eta \varepsilon$$

$$x + y = z(x, y) + \lambda(x, y) \cdot x_0 \text{ avec } z(x, y) \in \tau_k, \lambda(x, y) \in \mathbb{R}_+ .$$

De plus

$$f_{x_0, \varepsilon}(x + y + (\xi + \eta)x_0) = f(x + y + (\xi + \eta)x_0) + (\xi + \eta)\varepsilon$$

et on conclut facilement à l'inégalité de convexité de  $f_{x_0, \varepsilon}$ , et aux cas possibles d'égalité (à savoir  $x, y \in$  un polyèdre  $\tau_\ell$  qui contient  $x_0, \tau_i$  et  $\tau_j$ ).

5ème cas :  $\tau_i, \tau_j$  de type 2 et  $\tau_k$  de type 1.

On doit procéder comme pour l'étude du 3ème cas.

On conclut de cette étude que les  $\tau_i$  du type 1 et les  $\langle \tau_j, x_0 \rangle$  sont les polyèdres associés à la fonction convexe  $f_{x_0, \varepsilon}$  pourvu que  $\varepsilon$  soit assez petit. ■

On part maintenant de  $f : \bigcup \sigma_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfaisant les propriétés (i) à (iv), telle que ses polyèdres associés soient des simplexes. On peut supposer  $f \geq 0$  sur  $\bigcup \sigma_\alpha$ . On rappelle que la multiplicité de  $f$  est le nombre

$$\text{mult}(f) = \sup_{\tau \text{ polyèdre associé à } f} (\text{mult } \tau) .$$

On se sert du lemme 2, dans le cas  $\text{mult } \tau > 1$ , pour trouver une fonction  $g$  jouissant des propriétés susdites, mais où le nombre de polyèdres à  $g$  de multiplicités  $\text{mult}(f) \geq \text{mult}(g)$  a eu d'au moins une unité. A cet effet, dans l'ensemble des polyèdres associés à  $f$  tels que  $\text{mult}(\tau) = \text{mult}(f)$ , soit  $\tau$  un élément minimal pour la relation d'inclusion. Pour hypothèse  $\tau$  est du type  $\tau = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$ . On sait que  $\mu = \text{mult}(f) = \text{mult}(\tau)$  est l'ordre du groupe quotient  $G_\tau$  de  $(\sum \mathbb{R} \cdot x_i) \cap N$  par  $\sum \mathbb{Z} \cdot x_i$ . Pour  $\tau_i = \langle x_1, \dots, x_i, \dots, x_k \rangle$  face de  $\tau$  de codimension 1, on a un carré exact commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \sum_{\substack{1 \leq j \leq k \\ j \neq i}} \mathbb{Z} \cdot x_j & \longrightarrow & (\sum_{\substack{1 \leq j \leq k \\ j \neq i}} \mathbb{R} \cdot x_j) \cap N & \longrightarrow & G_{\tau_i} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \sum_{1 \leq j \leq k} \mathbb{Z} \cdot x_j & \longrightarrow & (\sum_{1 \leq j \leq k} \mathbb{R} \cdot x_j) \cap N & \longrightarrow & G_\tau \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & G_\tau / G_{\tau_i} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Comme  $\# G_{\tau_i}$  est strictement inférieur à  $\# G_\tau$  d'après la propriété minimale de  $\tau$ , on a :  $G_\tau / G_{\tau_i} \neq 1$ , soit  $G_\tau / G_{\tau_i} = \mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z}$  pour  $m_i > 1$ .

La flèche composée  $((\sum_{1 \leq j \leq k} \mathbb{R} \cdot x_j) \cap N) \longrightarrow \mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z}$  est l'image dans  $\mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z} \simeq m_i^{-1} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$  de la  $i$ -ème coordonnée d'un élément de  $\sum_{1 \leq j \leq k} \mathbb{R} \cdot x_j$ .

Contemplant l'homomorphisme de groupes abéliens :  $G_\tau \rightarrow \prod_{1 \leq i \leq k} (\mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z})$ .

Puisque chaque projection est un homomorphisme non trivial, il existe  $g \in G_\tau$  tel que  $g$  ait une image non nulle dans chaque  $\mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z}$ . En remontant  $g$  à  $(\sum \mathbb{R} \cdot x_j) \cap N$ , et en effectuant une division euclidienne par  $\sum \mathbb{Z} \cdot x_j$ , on trouve un élément  $x$  de  $N$  qui s'écrit  $x = \sum_{1 \leq i \leq k} \alpha_i \cdot x_i$  avec  $0 < \alpha_i < 1$ . On voit tout de suite que  $\langle x, \tau_i \rangle$  a pour multiplicité  $\alpha_i \text{mult}(\tau) < \text{mult}(\tau)$ .

On applique alors le Lemme 2 à  $f|_{\tau}$  et à  $x \in \tau$  ; on obtient ainsi une nouvelle fonction  $g$ , qui coïncide avec  $f$  sur  $\partial\tau$ , ce qui permet de la prolonger à  $\cup \sigma_{\alpha}$ . Il est clair que  $g$  satisfait les propriétés (i)-(iv). Les polyèdres associés à  $g$  sont encore des simplexes ; le seul changement est que  $\tau$  lui-même a été remplacé par les  $\langle \tau, x_i \rangle$ , qui sont de multiplicité strictement plus petite.

L'itération de ce procédé permet de trouver un  $g$  de multiplicité  $\text{mult}(g) < \text{mult}(f)$ , ce qui achève la démonstration du Théorème 11. ■

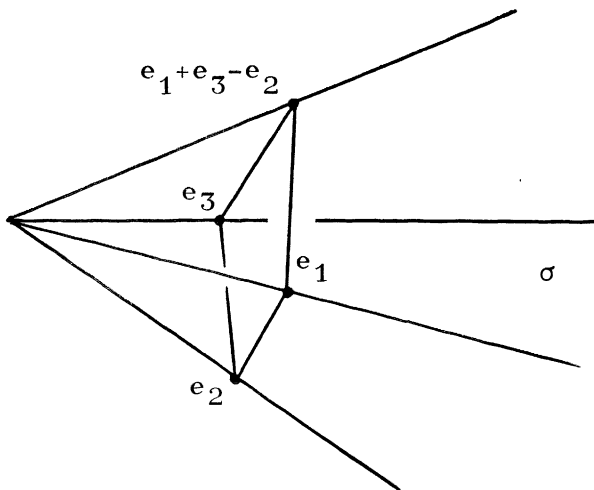
Illustrons ce procédé de désingularisation équivariante. Tout d'abord pour résoudre une variété toroïdale  $X$  de dimension 2, on se ramène au cas où  $X = X_{\sigma}$ , pour  $\sigma = \langle x_1, x_2 \rangle$  un secteur rationnel de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $K$  est l'enveloppe convexe de  $\{0, x_1, x_2\}$  dans  $\mathbb{R}^2$ , et  $\mathcal{E} = N \cap K$ , il résulte de notre démonstration du lemme de Gordan (cf. Lemme 1) que  $\mathcal{E}$  engendre le semi-groupe  $\sigma \cap \mathbb{Z}^2$ , et que les points de  $\mathcal{E}$  subdivisent  $\sigma$  en une union de secteurs  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ , chacun étant tel que la variété  $X_{\sigma_i}$  soit non-singulière. Il est clair que  $Y = X_{\{\sigma_i\}}$  est la résolution minimale de  $X_{\sigma}$ . La description complète du diviseur exceptionnel (composantes, intersections, self-intersections) résulte de l'étude, déjà faite, de la variété  $Y$ . On construira sans peine une fonction  $f: \sigma = \cup \sigma_i \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $Y = B_{\mathcal{F}_f}(X)$ .

Voici, d'après Saint-Donat, un exemple en dimension 3. On prend le cône polyédral  $\sigma = \langle e_1, e_2, e_3, e_1 - e_2 + e_3 \rangle$ . On a

$$X_{\sigma} = \text{Spec}(R_{\sigma}) \quad ,$$

$$\text{où } R_{\sigma} = k[X_1, X_2, X_1 X_2, X_2 X_3, X_3] \simeq k[X_1, Y_1, X_3, Y_3] / (X_1 Y_3 - X_3 Y_1) \quad .$$

$X_{\sigma}$  est donc le cône sur la quadrique  $X_1 Y_3 = X_3 Y_1$  de  $\mathbb{P}^3$ .



On a deux moyens simples de subdiviser  $\sigma$  en deux simplexes de multiplicité 1, au moyen du cône de dimension 2  $\langle e_1, e_3 \rangle$  ou du cône de dimension 2  $\langle e_2, e_1 + e_3 - e_2 \rangle$ . Ces deux subdivisions sont associées aux fonctions convexes sur  $\sigma$

$$f = \inf(e_1^*, e_1^* + e_2^*) \quad \text{resp.} \quad g = \inf(e_1^*, e_3^*) .$$

Les deux idéaux associés sont les idéaux des cônes au-dessus des deux droites de la quadrique.

### Compléments sur les diviseurs sur les variétés toroïdales lisses.

Soit  $X = X_{\{\sigma_\alpha\}}$  une variété toroïdale lisse, et soit  $\text{Sk}^1(\sigma)$  le 1-squelette de l'éventail  $\{\sigma_\alpha\}$ . Soit  $\text{Pic}_T(X)$  le groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles T-équivariants sur X.

Proposition : On a une suite exacte

$$M \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^{\text{Sk}^1\{\sigma_\alpha\}} \longrightarrow \text{Pic}_T(X) \longrightarrow 0 ,$$

où, pour  $r \in M$ ,  $\varphi(r)$  est le diviseur principal défini par  $\underline{X}^r$ , et où  $\mathbb{Z}^{\text{Sk}^1\{\sigma_\alpha\}}$  est identifié, par le Théorème 9, au groupe des diviseurs de Weil T-invariants sur X. ■

Théorème 12 : L'homomorphisme naturel de groupes :  $\text{Pic}_T(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$  est un isomorphisme lorsque X est lisse.

Démonstration : Soit L un faisceau inversible sur  $X = X_{\{\sigma_\alpha\}}$ . Chaque  $X_{\sigma_\alpha}$  est isomorphe à une variété du type  $\mathbb{A}_d^k \times \mathbb{A}_m^{n-k}$  d'après le Théorème 4, donc  $\text{Pic}(X_{\sigma_\alpha}) = 0$ . La restriction de L à  $X_{\sigma_\alpha}$  est donc libre, et L est défini par un 1-cocycle  $b_{\alpha,\beta}$  du recouvrement ouvert  $\{X_{\sigma_\alpha}\}$  à valeurs dans le faisceau  $\mathcal{O}_X^*$ .

Comme  $T = X_{\{0\}}$  est le plus petit ouvert du recouvrement, si on pose  $a_\alpha = b_{\{0\}, \sigma_\alpha}$ , on a :  $b_{\alpha,\beta} = a_\alpha \times a_\beta^{-1}$  sur  $X_{\sigma_\alpha} \cap X_{\sigma_\beta}$ ; de plus  $a_\alpha$  est un élément inversible de  $k[M]$ , donc on peut écrire :  $a_\alpha = c_\alpha \cdot \underline{X}^{r_\alpha}$  où  $c_\alpha \in k^*$  et  $r_\alpha \in M$ . Au cobord près du 0-cocycle  $\alpha \mapsto c_\alpha$ , le 1-cocycle est défini par  $b_{\alpha,\beta} = \underline{X}^{r_\beta - r_\alpha}$ . Mais le faisceau L défini par ce 1-cocycle est clairement T-équivariant. La flèche  $\text{Pic}_T(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$  est donc surjective. Son injectivité est claire. ■

Remarque : Demazure [1, p. 565-567] étend ce résultat à des schémas toroïdaux

sur  $\mathbb{Z}$ . Notons que le même résultat doit être vrai si  $X$  est singulière, mais nous ne savons le montrer (par voie transcendante) que lorsque  $k$  est de caractéristique nulle et  $X$  complète.

Théorème 13 : Soit  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_f$  un faisceau  $T$ -équivariant d'idéaux fractionnaires sur  $X = X_{\{\sigma_\alpha\}}$ .

(a)  $\mathfrak{F}$  est engendré par ses sections globales ssi on a :

$$f = \inf_{r \in M, r \geq f \text{ sur } \bigcup \sigma_\alpha} (r) .$$

Dans ce cas,  $f$  est convexe.

(b) Si  $\mathfrak{F}$  est inversible, alors  $\mathfrak{F}$  est ample ssi  $f$  est strictement convexe, i.e. pour chaque  $\alpha_0$ , il existe  $r \in M \otimes \mathbb{Q}$  tel que :

- $f \leq r$  sur  $\bigcup \sigma_\alpha$  ;
- $\sigma_{\alpha_0} = \{x \in \bigcup \sigma_\alpha \text{ tq } f(x) = r(x)\}$  .

Démonstration : (a)  $\Gamma(X, \mathfrak{F}_f)$  est engendré par les  $\underline{X}^r$  tels que  $r \geq f$  sur  $\bigcup \sigma_\alpha$  ; pour chaque  $\alpha$ , la restriction de  $\mathfrak{F}_f$  à  $X_{\sigma_\alpha}$  est engendrée par les  $\underline{X}^r$  tels que  $r \geq f$  sur  $\sigma_\alpha$  .

(b) Il est clair que  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_f$  est ample ssi les ouverts  $U_{\underline{X}}$  du type  $U = \{x \in X \text{ tq } \underline{X}_x \text{ engendre } \mathfrak{F}_x^{\otimes n}\}$ , pour  $n \geq 1$  et  $\underline{X}$  section de  $\mathfrak{F}^{\otimes n}$  sur  $X$ , forment un recouvrement affine de  $X$ . Mais cette condition est vérifiée ssi tout  $X_{\sigma_\beta}$  est de ce type, pour un certain  $\underline{X}^{r_\beta}$  et un certain  $n_\beta$  ; mais alors  $r = \frac{r_\beta}{n_\beta}$  est l'élément de  $M \otimes \mathbb{Q}$  qui convient. ■

Remarque : Demazure [1, p. 567-570] a montré que sur une variété toroïdale lisse, tout faisceau ample est très ample.

On trouvera dans Demazure [1, p. 584-588] et dans [2, p. 152-153] des exemples de variétés toroïdales lisses, complètes de dimension 3 qui ne sont pas projectives. Notons que de telles variétés ont des modifications qui sont projectives.

Pour  $X$  une variété toroïdale, on sait que  $X$  est Cohen-Macaulay. On en connaît deux démonstration :

1) celle de HÜCHSTER [5] qui est de nature combinatoire et, semble-t-il, constructive ; cette démonstration a été reprise par KUSHNIRENKO [4] ;

2) celle de KEMPF [2, p. 41-52] qui utilise des techniques d'algèbre homologique.

Pour montrer qu'une résolution  $T$ -équivariante  $f: Y \rightarrow X$  est rationnelle,

il suffit, d'après [2, p. 50] et le fait que  $X$  est Cohen-Macaulay, de montrer le résultat suivant :

Proposition : Si  $f: Y \rightarrow X$  est une résolution  $T$ -équivariante de  $X$ , alors l'homomorphisme naturel de faisceaux :  $f_* \Omega_Y^n \rightarrow \Omega_X^n$  est un isomorphisme.

Démonstration : Soit  $\tau$  la forme de Haar sur le tore. On doit considérer une forme différentielle  $\omega$  holomorphe sur  $X_{\text{reg}}$ , et montrer que  $f^* \omega$  est holomorphe sur  $Y$  tout entier. On peut pour cela supposer  $\omega$  de la forme :  $\omega = \underline{X}^r \cdot \tau$ , pour  $r \in \mathbb{M}$ . Mais  $\omega$  est holomorphe sur  $X_{\text{reg}}$  ssi  $\langle r, x \rangle > 0$  pour tout  $x \in \text{Sk}^1(X)$ . Si  $X = \bigcup \sigma_\alpha$ , cela entraîne  $r > 0$  sur  $\bigcup \sigma_\alpha - \{0\}$ , donc  $\langle r, y \rangle > 0$  pour tout  $y \in \text{Sk}^1(Y)$  et  $f^* \omega$  est holomorphe sur  $Y$ . ■

### § 3. MORPHISMES TOROIDAUX AVEC CHANGEMENT DE TORE

On se propose de décrire les propriétés des diagrammes du type

$$\begin{array}{ccc} T & \hookrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ T' & \hookrightarrow & X' \end{array}$$

où  $T \hookrightarrow X$  et  $T' \hookrightarrow X'$  sont des immersions toroïdales.  $f: T \rightarrow T'$  est un homomorphisme surjectif de tores sur  $k$ .

On décomposera l'étude en deux parties :

- (1)  $f$  est une isogénie ;
- (2)  $\ker(f)$  est sans facteur direct du type  $\mu_\ell$ .

#### Etude des isogénies toroïdales.

Soient  $T$  un tore sur  $K$  ;  $M, N$ , etc. les groupes associés à  $T$ . Une isogénie  $f: T \rightarrow T'$  est définie par un sous-groupe d'indice fini  $M'$  de  $M$ . Le groupe fini  $G = M/M'$  est le groupe de Galois de l'isogénie  $f$ .

Les groupes associés à  $T'$  sont  $M' \subset M$  et  $N' \supset N$  ; on identifie  $M_{\mathbb{Q}}$  à  $M'_{\mathbb{Q}}$ , etc. Un éventail  $\{\sigma_\alpha\}$  de  $N_{\mathbb{R}}$  définit deux immersions toroïdales  $T \hookrightarrow X$  et  $T' \hookrightarrow X'$ , et un diagramme

$$\begin{array}{ccc} T & \hookrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ T' & \hookrightarrow & X' \end{array}$$



qui est T-invariant en un sens évident. Le morphisme  $f$  est un revêtement surjectif ramifié de groupe  $G$ . Son lieu de ramification est un diviseur de Weil invariant sous  $T$ . On explicite donc  $f: X \rightarrow X'$  complètement en calculant l'indice de ramification  $e(f; x)$  de  $f$  le long du diviseur  $\overline{0}^x$  de  $X$ , pour  $x \in \text{Sk}^1\{\sigma_\alpha\}$ . Or, on obtient une uniformisante locale de  $\overline{0}^x$  (en son point général) en prenant un caractère  $\underline{X}^r$ , pour  $r \in M'$  et  $\langle r, x \rangle = 1$ . Soit  $m$  le plus petit entier tel que  $m \cdot x \in N$ ; alors  $f^{-1}(\overline{0}^x) = \overline{0}^{m \cdot x}$  comme ensemble; il est clair que  $m \cdot x$  est un élément primitif de  $N$ ; comme  $\langle r, mx \rangle = m$ , on a :  $f^{-1}(\overline{0}^x) = m \cdot \overline{0}^{m \cdot x}$  comme diviseurs de Weil sur  $X$ , donc  $e(f; x) = m$ , ce qui conclut notre étude.

Cas où  $\ker(f)$  est sans torsion.

On a donc une suite exacte de tores sur  $k$  :  $1 \rightarrow T'' \xrightarrow{i} T \xrightarrow{f} T' \rightarrow 1$  d'où des suites exactes  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f^*} M \xrightarrow{i^*} M'' \rightarrow 0$ ,  $0 \rightarrow N'' \xrightarrow{i} N \xrightarrow{f} N' \rightarrow 0$ , avec les notations évidentes. On se donne 2 immersions équivariantes  $T \hookrightarrow X = X_{\{\sigma_\alpha\}}$  et  $T' \hookrightarrow X' = X_{\{\tau_\beta\}}$ .

Proposition : Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T & \hookrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ T' & \hookrightarrow & X' \end{array}$$

ssi pour tout  $\alpha$ , il existe  $\beta$  tel que  $f(\sigma_\alpha) \subset \tau_\beta$ .

Démonstration : Comme dans la démonstration du Théorème 7, si le prolongement existe, pour tout  $\alpha$ , soit  $\mathbb{O}$  l'orbite fermée de  $X_{\sigma_\alpha}$ ;  $f(\mathbb{O})$  est une  $\tau'$ -orbite de  $X'$ , donc c'est l'orbite fermée de  $X'_{\tau_\beta}$  pour un certain  $\beta$ ; si  $x$  est un point de  $X_{\sigma_\alpha}$ , l'orbite de  $x$  est adhérente à  $\mathbb{O}$  donc l'orbite de  $f(x)$  est adhérente à  $f(\mathbb{O})$ , donc contenue dans  $X'_{\tau_\beta}$ ; d'où  $f(X_{\sigma_\alpha}) \subset X'_{\tau_\beta}$ ; soit alors  $a \in N \cap \sigma_\alpha$ , et montrons que  $f(a) \in \tau_\beta$ ; si en effet  $f(a) \neq 0$ , alors le sous-groupe à 1 paramètre  $\lambda_a$  se prolonge en  $\lambda_a : \mathbb{G}_a \rightarrow X$ , d'où un prolongement  $f \circ \lambda_a$  de  $\lambda_{f(a)}$  à  $\mathbb{G}_a$ , ce qui entraîne :  $f(a) \in \tau_\beta$ .

La réciproque est claire. ■

On cherche maintenant à étudier les fibres de  $f: X \rightarrow X'$ , et à obtenir un critère pour que  $f$  soit une fibration algébrique. On vient de voir que les

conditions  $f(\sigma_\alpha) \subset \tau_\beta$  et  $f(\overline{\sigma}_\alpha) \supset \overline{\tau}_\beta$  étaient équivalentes. On en déduit que  $f(\overline{\sigma}_\alpha) = \overline{\tau}_\beta$  ssi  $f(\sigma_\alpha)$  est contenu dans  $\tau_\beta$  mais dans aucune face de  $\tau_\beta$ . En particulier, pour  $T' = \mathbb{O}^{\{0\}}$  on trouve que  $f^{-1}(T')$  est l'union des  $\overline{\sigma}_\alpha$  pour  $f(\sigma_\alpha) = \mathbb{O}$  i.e.  $\sigma_\alpha \subset N''_{\mathbf{R}}$ . Au-dessus de  $T'$ , le morphisme  $f$  est un produit, et la fibre typique est la  $T''$ -immersion torique  $X'' = \sup_{f(\sigma_\alpha) = \mathbb{O}} \overline{\sigma}_\alpha$ .

Par ailleurs, montrons que pour tout  $\beta$ , l'image inverse schématique  $f^{-1}(\overline{\tau}_\beta)$  est réduite. Supposons d'abord que  $\overline{\tau}_\beta$  soit un diviseur, c'est-à-dire  $\tau_\beta = \mathbf{R}^+ \cdot y$ , où  $y$  est un élément primitif de  $N'$ ; soit  $s \in M'$  tel que  $\langle s, y \rangle = 1$ , alors  $\underline{X}^s$  est une équation locale de  $\overline{\tau}_\beta$ ; si  $x$  est un élément de  $\text{Sk}^1(\{\sigma_\alpha\})$ ,  $\overline{\tau}_\beta \cdot x$  est un diviseur  $T$ -invariant de  $X$ ; et  $\underline{X}^s$  a pour ordre  $\langle s, f(x) \rangle$  au point générique de  $\overline{\tau}_\beta$ ; si  $f(\overline{\tau}_\beta \cdot x) \subset \overline{\tau}_\beta$  alors  $f(x) = m \cdot y$ , pour  $m$  entier; comme  $x$  est primitif et  $f$  surjectif, on a  $m = 1$ , donc  $\underline{X}^s$  est d'ordre  $\langle s, y \rangle = 1$  au point générique de  $\overline{\tau}_\beta$ ; donc  $f^{-1}(\overline{\tau}_\beta)$  est réduit. Par induction sur la dimension de  $\tau_\beta$ , on déduit que  $f^{-1}(\overline{\tau}_\beta)$  est réduite pour tout cône  $\tau_\beta$  de l'éventail de  $X'$ .

On voit facilement que  $f$  est surjectif ssi  $f(\cup \sigma_\alpha)$  rencontre l'intérieur de chaque  $\tau_\beta$ .

**Définition** : Soit  $f: N \rightarrow N'$  comme plus haut. On suppose donnés un éventail  $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $N_{\mathbf{R}}$  et un éventail  $\{\tau_\beta\}_{\beta \in B}$  de  $N'_{\mathbf{R}}$  tels que  $\forall \alpha \in A, \exists \beta \in B$  tq  $f(\sigma_\alpha) \subset \tau_\beta$ .

On dit que  $f$  est une fibration d'éventails si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i)  $\forall \alpha \in A, \exists \beta \in B$  tq  $f(\sigma_\alpha) = \tau_\beta$ ;
- (ii) l'application  $\sigma_\alpha \mapsto (f(\sigma_\alpha), \sigma_\alpha \cap N''_{\mathbf{R}})$  est une bijection de  $A$  sur  $B \times C$ , où  $C$  est l'éventail  $\{\sigma_\alpha \text{ tq } f(\sigma_\alpha) = \mathbb{O}\}$ .

**Remarque** : Si  $f$  est une fibration d'éventails, alors  $f = \cup \sigma_\alpha \rightarrow \cup \tau_\beta$  est surjective et pour tout  $\alpha \in A$ , on a :

$$\dim(\sigma_\alpha) = \dim(f(\sigma_\alpha)) + \dim(\sigma_\alpha \cap N''_{\mathbf{R}}) .$$

**Théorème** : Avec les notations précédentes,  $f: X \hookrightarrow X'$  est une fibration algébrique localement triviale ssi  $f: N \rightarrow N'$  est une fibration d'éventails.

**Démonstration** : Supposons que  $f: N \rightarrow N'$  est une fibration d'éventails. Pour tout  $\beta \in B$ , on montrera que  $f$  est un produit au-dessus de  $X'_\beta$ ; notons d'abord

que  $f^{-1}(X'_{\tau_\beta})$  est l'union des  $X_{\sigma_\alpha}$  pour  $f(\sigma_\alpha) = \tau_\beta$  (on utilise la propriété (i) de la définition d'une fibration d'éventails). Il existe un unique  $\alpha_0 \in A$  tel que  $f(\sigma_{\alpha_0}) = \tau_\beta$  et  $\sigma_{\alpha_0} \cap N''_{\mathbf{R}} = \{0\}$  (on a utilisé la propriété (ii)). Quitte à remplacer  $N'$  par le réseau engendré par  $\tau_\beta \cap N'$ , et à remplacer  $N$  par l'image réciproque de ce réseau par  $f$ , on peut supposer que  $\tau_\beta$  engendre  $N'_{\mathbf{R}}$  comme espace vectoriel. Soit  $V_\beta$  le sous-espace vectoriel de  $N_{\mathbf{R}}$  engendré par  $\sigma_{\alpha_0}$ ; la restriction de  $f$  à  $V_\beta$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur  $N'_{\mathbf{R}}$ , qui envoie  $N \cap V_\beta$  bijectivement sur  $N'$  et  $\sigma_{\alpha_0}$  bijectivement sur  $\tau_\beta$ . Soit  $g$  l'application inverse, considérée comme application de  $N'_{\mathbf{R}}$  vers  $N_{\mathbf{R}}$ . Il est clair que  $g$  scinde la suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow N'' \xrightarrow{i} N \xrightarrow{f} N' \longrightarrow 0 \quad .$$

On voit que  $g$  définit un isomorphisme  $N' \times N'' \xrightarrow{(i,g)} N$  d'où des isomorphismes

$T' \times T'' \rightarrow T$ , etc.

Soit maintenant  $\alpha \in A$  tel que  $f(\sigma_\alpha) = \tau_\beta$ . Soit  $x \in \tau_\beta$ , et considérons  $\sigma_\alpha \cap f^{-1}(x)$  dans l'espace affine  $f^{-1}(x)$ ; il existe un seul choix d'une origine dans  $f^{-1}(x)$  pour lequel  $\sigma_\alpha \cap f^{-1}(x)$  s'identifie au cône polyédral  $\sigma_\alpha \cap N''_{\mathbf{R}}$  de  $N''_{\mathbf{R}}$ . Je prétends que  $g(x)$  est cette origine. En effet, supposons que  $g(x)$  soit point intérieur d'une face  $\sigma''$  de  $\sigma_\alpha \cap N''_{\mathbf{R}}$ , avec  $\dim(\sigma'') \geq 1$ . Soit  $\sigma$  l'élément unique de l'éventail  $\{\sigma_\alpha\}$  tel que  $\sigma \cap N''_{\mathbf{R}} = \sigma''$  et  $f(\sigma) = \tau_\beta$ , par la propriété (ii) des fibrations d'éventails. Alors  $g(x)$  est un point intérieur de  $\sigma$ , mais  $\sigma_{\alpha_0}$  est une face stricte de  $\sigma$ , d'où une contradiction. On a montré ainsi l'égalité :

$$\sigma_\alpha \cap f^{-1}(x) = g(x) + (\sigma_\alpha \cap N''_{\mathbf{R}}) \quad \text{pour } x \in \tau_\beta .$$

Mais ceci signifie que l'isomorphisme  $N'_{\mathbf{R}} \times N''_{\mathbf{R}} \xrightarrow{(i,g)} N_{\mathbf{R}}$  induit une bijection de  $\tau_\beta \times (\sigma_\alpha \cap N''_{\mathbf{R}})$  sur  $\sigma_\alpha$  d'où un isomorphisme  $X'_{\tau_\beta} \times X''_{\sigma_\alpha \cap N''_{\mathbf{R}}} \xrightarrow{\approx} X_{\sigma_\alpha}$  induit par  $(i,g)$ ; ces isomorphismes se recollent automatiquement pour donner un isomorphisme  $X'_{\tau_\beta} \times f^{-1}(1) \xrightarrow{\approx} f^{-1}(X'_{\tau_\beta})$  (on utilise encore une fois la propriété (ii)), ce qui montre qu'il existe une trivialisatation  $T$ -équivariante du morphisme  $f$  au-dessus de  $X'_{\tau_\beta}$ .

Supposons maintenant que  $f: X \rightarrow X'$  est une fibration algébrique localement triviale. En particulier  $f$  est ouverte, donc pour tout  $\alpha \in A$  l'image  $X'_{f(\sigma_\alpha)}$  de  $X_{\sigma_\alpha}$  est ouverte dans  $X'$ , donc  $X'_{f(\sigma_\alpha)} = X_{\tau_\beta}$  pour un certain  $\beta \in B$ , d'où

la propriété (i). De plus, pour tout  $\alpha \in A$ , il est clair que  $\sigma_\alpha \cap f^{-1}(0)$  est une face de  $\sigma_\alpha$ , donc un élément de l'éventail associé à  $X_1$ .

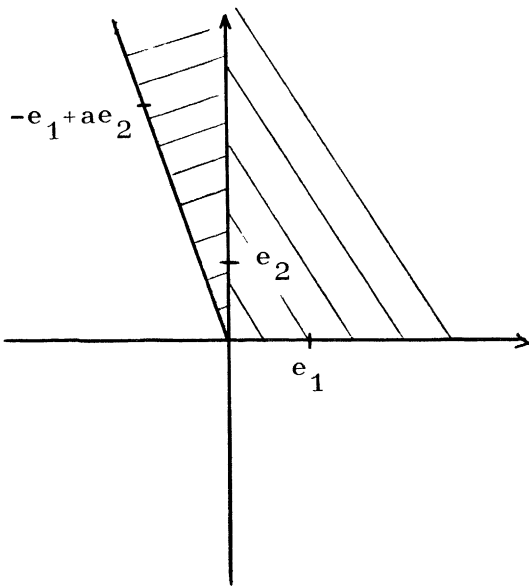
Pour tout  $\beta \in B$ ,  $f^{-1}(\tau_\beta)$  n'est autre, en vertu des considérations qui précèdent la définition des fibrations d'éventails et de la propriété (i), que l'union des  $\sigma_\alpha$  pour  $f(\sigma_\alpha) = \tau_\beta$ . La seule donnée de la variété  $f^{-1}(\tau_\beta)$  permet de reconstruire les  $\tau_\beta$ ; ceux-ci forment en effet la stratification canonique de  $f^{-1}(\tau_\beta)$  au sens suivant : on définit cette stratification par récurrence sur la dimension d'une  $k$ -variété  $W$ ; si  $W$  est un point,  $W$  est l'unique strate; si  $W$  est de dimension  $n \geq r$ , son lieu singulier  $\text{Sing}(W)$  est une sous-variété de dimension  $\leq n-1$ ; les strates de  $W$  sont de 2 types :

- les composantes connexes de  $W - \text{Sing}(W)$ ;
- les strates de  $\text{Sing}(W)$ .

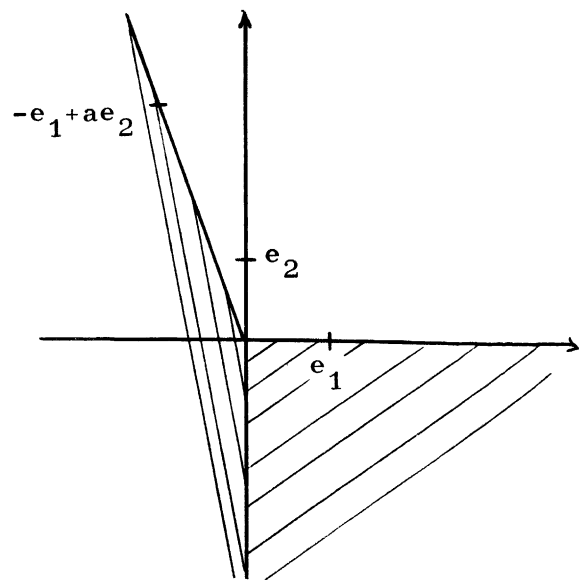
Pour toute variété  $W$ , soit  $n(W)$  le nombre de ses strates canoniques. Pour  $\beta \in B$ , posons  $n(\beta) = n(f^{-1}(\tau_\beta))$ ; alors  $n(\beta) = n(f^{-1}(x))$  pour  $x \in \tau_\beta$ , et  $n(\beta)$  est le cardinal de l'ensemble des  $\alpha$  tels que  $f(\sigma_\alpha) = \tau_\beta$ . Si  $f: X \rightarrow X'$  est une fibration localement triviale, alors  $n(f^{-1}(x))$  est constant sur  $X'$ , donc  $n(\beta)$  est constant sur  $B$ . La propriété (ii) en découle immédiatement. ■

Nous voulons appliquer ce Théorème à la construction de fibrés holomorphes de rang 1 sur une variété torique  $X$ . L'immersion torique  $T \hookrightarrow X$  correspond à un éventail  $\{\sigma_\alpha\}$  de  $N_{\mathbf{R}}$ . La fibre typique doit être  $\mathbb{A}^1$ , qui correspond au cône polyédral  $\mathbf{R}_+$  de  $\mathbf{R}$ . On considère le tore  $T \times \mathbb{G}_m$ , dont le groupe des groupes à 1 paramètre est  $N \oplus \mathbb{Z}$ . Selon le Théorème, l'éventail de  $N_{\mathbf{R}} \oplus \mathbb{R}$  doit être du type suivant. Pour chaque  $\alpha$ , on choisit un cône polyédral  $\tau_\alpha$  de  $N_{\mathbf{R}} \oplus \mathbb{R}$  tel que sa projection sur  $N_{\mathbf{R}}$  soit  $\sigma_\alpha$  et son intersection avec  $\mathbf{R}$  réduite à  $\{0\}$ . Ceci donnera le complémentaire de la section nulle du fibré. On ajoute à l'éventail les cônes polyédraux  $\tau_\alpha + (0 \times \mathbf{R}_+)$  de  $N_{\mathbf{R}} \oplus \mathbb{R}$ . Il est clair qu'on obtient ainsi une fibration d'éventails, qui décrit un fibré holomorphe de rang 1 sur  $X$ , muni d'une action de  $T \times \mathbb{G}_m$ . Remarquons qu'en ajoutant les cônes polyédraux  $\tau_\alpha + (\mathbb{G} \times \mathbf{R}_-)$  à notre éventail, on compactifie ce fibré en un fibré en droites projectives sur  $X$ .

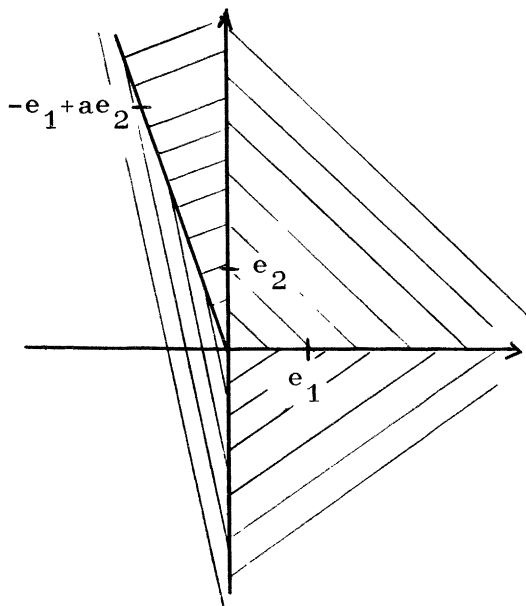
Dans le cas de  $X = \mathbb{P}_1$ , on obtient les figures suivantes :



Fibré  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-a)$



Fibré  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a)$



Fibré  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a)) \rightarrow \mathbb{P}_1$ , dont les fibres sont des droites projectives.

Etudions de même les fibrés holomorphes de rang 1 sur l'espace projectif  $\mathbb{P}_n$ . Rappelons l'éventail de  $\mathbb{R}^n$  qui définit  $\mathbb{P}_n$ . Soit  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base canonique de  $\mathbb{Z}^n$ ; l'éventail de  $\mathbb{P}_n$  est un éventail complet; les faces de plus grande dimension sont  $\sigma_0 = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{R}_+ \cdot e_i$ , et pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\sigma_i = \mathbb{R}_+ \cdot \left( -\sum_{1 \leq j \leq n} e_i \right) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \mathbb{R}_+ \cdot e_j \quad .$$

On décrit toutes les faces par un sous-ensembles de  $\{0, 1, \dots, n\}$  de cardinal au

plus  $n$ , à savoir

$$\sigma_I = \sum_{i \notin I} \mathbf{R}_+ \cdot \mathbf{e}_i, \quad \text{avec} \quad \mathbf{e}_0 = -\sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{e}_i.$$

Pour construire toutes les faces  $\tau_I$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$  comme plus haut, il suffit, pour chaque  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  de se donner un élément de  $\mathbf{R}^{n+1}$  du type  $\mathbf{e}_i + \lambda_i(0, 1)$  pour  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ . Ceci permet de construire le fibré en question, qui ne dépend que de la famille d'entiers  $\lambda_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ). On vérifie, sauf erreur, que ce fibré a pour première classe de Chern le déterminant  $(n+1) \times (n+1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ & & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ \lambda_i & \lambda_2 & \dots & \lambda_n & \lambda_0 \end{vmatrix}$$

qui est le déterminant des vecteurs  $\mathbf{e}_i + \lambda_i(0, 1)$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$ ; or ce déterminant vaut  $-\sum_{i=0}^{i=n} \lambda_i$ .

L'étude, par cette méthode, de fibrés holomorphes de rang quelconque sur un espace projectif, reste à faire.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Demazure, Sous-groupes de rang maximum du groupe de Cremona, Ann. Sc. E.N.S. 4ème série, t. 3, fasc. 4 (1970).
- [2] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, Toroidal embeddings, Lect. Notes in Math. 339, Springer 1973.
- [3] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, Y. Tai, Smooth compactification of locally symmetric varieties, Math. Sci. Press, Brookline Mass. 1975.
- [4] A. G. Kushnirenko, Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, Inv. Math. 32 (1976) 1-31.
- [5] M. Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials and polytopes, Ann. of Math. 96 (1972).



Erratum à l'exposé de J.L. Brylinski.

"Gerardo Gonzalez-Sprinberg m'a signalé que la démonstration du Lemme 1 (p. 4 et 5) était fausse. Il convient à mon sens de la modifier comme suit :

"Le seul point non trivial est que si  $\sigma$  est un cône polyédral  $\sigma \cap M$  est un semi-groupe à engendrement fini (c'est le "lemme de Gordan"). Comme plus haut, on se ramène à supposer  $\sigma$  contenu dans un quadrant. Soient  $x_i'$  les éléments primitifs des arêtes de  $\sigma$  ; les  $x_i$  sont en nombre fini, puisque  $\sigma$  est un cône polyédral ; donc le semi-groupe  $S$  engendré par les  $x_i$  est de type fini. Cela dit, les  $x_i$  engendrent le cône  $\sigma$ . Il est alors clair que  $\sigma \cap M$  est le saturé de  $S$ . Donc  $\sigma \cap M$  est de type fini d'après la proposition 2 (p. 3). ■" "