

# SÉMINAIRE SUR LES SINGULARITÉS DES SURFACES

## ÉCOLE POLYTECHNIQUE

H. PINKHAM

### Résolution simultanée de points doubles rationnels

*Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique)* (1976-1977), exp. n° 11, p. 1-24

[http://www.numdam.org/item?id=SSS\\_1976-1977\\_\\_\\_\\_A13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A13_0)

© Séminaire sur les singularités des surfaces  
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire sur les singularités des surfaces implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L E S   S I N G U L A R I T E S

D E S   S U R F A C E S

RESOLUTION SIMULTANEE DE POINTS DOUBLES RATIONNELS.

H.   PINKHAM

18 Janvier 1977



Le but de cet exposé (et d'un exposé ultérieur peut-être) est d'étudier, et de généraliser une construction qui a des origines très lointaines (M. Noether [46], Kantor [43], Coble [36], Du Val [12, 39, 40] et qui ré-émerge chez Brieskorn [8, 34] et Tjurina [55]. On ne trouve nulle part tous les aspects de la construction telle qu'elle est présentée ici. Cette construction qui est décrite au § 5 fait intervenir :

i) les surfaces de Del Pezzo obtenues en faisant éclater des points en position presque générale, étudiées dans les exposés de Demazure [38] ;

ii) la résolution simultanée très faible de points doubles rationnels, au sens de Teissier [54] ;

iii) les groupes finis de transformations de Cremona qui sont des groupes de Weyl, et leurs invariants : voir [41], § 46 ou [43].

Nous abordons le problème sous l'angle de la résolution simultanée très faible. Rappelons de quoi il s'agit :  $X_0$  est une singularité (normale) de surface,  $X \rightarrow S$  une déformation de  $X_0$ . Nous disons que  $X \rightarrow S$  admet une résolution simultanée très faible (terminologie de Teissier) s'il existe un morphisme fini surjectif :  $S' \rightarrow S$ , et un triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X_{S'} = X \times_S S' \\ & \searrow & \downarrow \\ & & S' \end{array}$$

tel que  $Y \rightarrow S'$  soit lisse, et  $Y \rightarrow X_{S'}$  soit fibre à fibre une résolution minimale de  $X_{S'}$ .

Nous voulons étudier toutes les résolutions simultanées de toutes les déformations de  $X_0$ . La formulation fonctorielle correcte de ce problème (due à M. Artin [42] et [5]) est donnée au § 3, après des rappels sur la théorie des déformations aux §§ 1 et 2. Nous nous limitons aux singularités rationnelles : en effet nous nous intéressons surtout aux déformations  $X \rightarrow S$  où la fibre générique est lisse : il est facile de voir qu'une telle déformation ne peut admettre une résolution simultanée très faible que si  $X_0$  est rationnelle. Pour le cas non rationnel, on peut consulter [56].

Au paragraphe 4 nous énonçons le résultat central de la théorie qui vient d'être démontré par Lipman [45] (voir aussi [57] où Wahl donne l'argument de "déviissage" qui permet d'utiliser le résultat de Lipman). Nous montrons pourquoi il est facile de démontrer le résultat pour les points doubles ration-

nels  $A_n$  et  $D_n$ . La construction du § 5 à laquelle il est fait allusion plus haut permet de démontrer le théorème pour  $E_6$ ,  $E_7$  et  $E_8$ . Il y a plusieurs autres façons de démontrer ce résultat (en particulier la construction de Brieskorn-Grothendieck [34] utilisant les groupes de Lie), mais celle présentée ici me semble la plus géométrique.

Notation :  $k[\varepsilon]$  est l'anneau des nombres duaux, i.e.  $\varepsilon^2 = 0$ . Nous utilisons "Sp" à la fois pour Spec et Spf.

Pour la plupart des résultats nous serons obligés de prendre  $k$  de caractéristique 0.

## 1. RAPPELS SUR LES DEFORMATIONS.

Nous exposons très rapidement quelques points de la théorie des déformations (d'après [52] et [44], qui suffisent à nos modestes besoins) pour fixer notre terminologie.

$k$  est un corps et  $\mathcal{C}$  la catégorie des  $k$  algèbres artiniennes locales de corps résiduel  $k$ . Soit  $X_0$  une variété algébrique définie sur  $k$ . Une déformation (infinitésimale) de  $X_0$  sur  $A \in \mathcal{C}$  est un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Sp } k & \longrightarrow & \text{Sp } A \end{array}$$

où le morphisme  $f$  est plat. Nous noterons simplement  $f: X \rightarrow \text{Sp } A$  une telle déformation. Deux déformations  $f_1: X_1 \rightarrow \text{Sp } A$  et  $f_2: X_2 \rightarrow \text{Sp } A$  de  $X_0$  sur  $A$  sont isomorphes s'il existe un  $A$ -isomorphisme  $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$  qui induise l'identité sur la fibre fermée.

On note  $D_{X_0}$  le foncteur qui à  $A \in \mathcal{C}$  associe les classes d'isomorphismes de déformations de  $X_0$  sur  $A$ . On peut étendre  $D_{X_0}$  à  $\hat{\mathcal{C}} = \{k \text{ algèbres complètes locales noethériennes } A \text{ d'idéal maximal } m \mid A/m^n \in \mathcal{C}, \text{ tout } n\}$  par la formule  $D_{X_0}(A) = \varinjlim D_{X_0}(A/m^n)$ .  $D_{X_0}(A)$  s'appelle une déformation formelle.

Pour  $R \in \hat{\mathcal{C}}$ , on note  $h_R$  le foncteur sur  $\mathcal{C}$ ,  $\text{hom}_k(R, \cdot)$ .

Définition : Un foncteur covariant  $F$  sur  $\mathcal{C}$  tel que  $F(k)$  n'ait qu'un seul élément est pro-représentable s'il existe un  $R \in \hat{\mathcal{C}}$  et un  $\xi \in F(R)$ , tel que le morphisme

$$\varphi_\xi : h_R \longrightarrow F$$

induit par  $\xi$  soit un isomorphisme. Ce morphisme s'obtient de la façon suivante : soit  $A \in \mathcal{C}$ ,  $u \in h_R(A)$ .  $u$  se factorise par  $\bar{u} \in \text{Hom}(R/m^n, A)$  pour  $n$  assez grand. On a  $F(\bar{u}) : F(R/m^n) \rightarrow F(A)$ . D'autre part  $\xi$  provient d'un  $\bar{\xi} \in F(R/m^n)$ . Le morphisme  $\varphi_{\xi}$  associe à  $u$  l'élément  $F(\bar{u})(\bar{\xi})$ .

Malheureusement  $D_{X_0}$  n'est que rarement pro-représentable, mais souvent il satisfait à une propriété plus faible.

**Définition** : Un morphisme de foncteurs  $F \rightarrow G$  est lisse, si pour toute surjection  $B \rightarrow A$  dans  $\mathcal{C}$ , le morphisme  $F(B) \rightarrow F(A) \times_{G(A)} G(B)$  est surjectif.

Un couple  $(R, \xi)$ ,  $R \in \hat{\mathcal{C}}$ ,  $\xi \in F(R)$  est versel pour  $F$  si  $\varphi_{\xi} : h_R \rightarrow F$  est lisse. Si de plus  $\varphi_{\xi}$  est un isomorphisme sur les espaces tangents :  $h_R(k[\varepsilon]) \rightarrow F(k[\varepsilon])$ ,  $R$  est semi universel.  $(R, \xi)$  est alors unique à isomorphisme non unique près.

S'il existe un couple  $(R, \xi)$  qui est semi universel pour  $F$ , on dit que  $F$  admet une enveloppe.

**Proposition** : Si  $X_0$  est affine avec une singularité isolée ; ou lisse avec  $\dim_k H^1(X_0, \Theta_{X_0})$  fini ; ou propre ;  $D_{X_0}$  admet une enveloppe.

On démontre ce résultat à l'aide du critère de Schlessinger [52]. L'hypothèse garantit (dans chacun des trois cas) que l'espace tangent à  $D_{X_0}$  est de dimension finie.

Nous pouvons donc appliquer ce résultat à  $Y_0$  et  $X_0$ , où  $\pi : Y_0 \rightarrow X_0$  est la résolution d'une singularité de surface (au sens de [50]). Soient  $(S, \xi)$  (resp.  $(T, \phi)$ ) une déformation semi universelle pour  $D_{X_0}$  (resp.  $D_{Y_0}$ ) et  $m_S$  (resp.  $m_T$ ) l'idéal maximal de  $S$  (resp.  $T$ ). On écrit aussi  $Y \rightarrow \text{Sp } T$  et  $X \rightarrow \text{Sp } S$  pour  $\xi$  et  $\phi$  respectivement.

L'espace tangent de  $D_{Y_0}$  est isomorphe à  $H^1(Y_0, \Theta_{Y_0})$  ; les obstructions au relèvement de déformations de  $Y_0$  sur  $k[\varepsilon]$  à des ordres supérieurs se trouvent dans  $H^2(Y_0, \Theta_{Y_0})$ . Comme cet espace est nul, puisque  $Y_0$  n'est pas propre,  $T$  est un anneau de séries formelles sur  $k$ .

Considérons maintenant  $D_{X_0}$ . Traditionnellement on note  $T_{X_0}^1$  l'espace tangent de  $D_{X_0}$ . Si on écrit  $X_0 = \text{Sp}(B)$ ,  $B$  un anneau local complet, et  $B = P/I$ ,  $P$  un anneau de séries formelles, on a la suite exacte de modules : (on pose  $\mathbb{A} = \text{Sp } P$ , et  $N_{X_0} = \text{Hom}_B(I/I^2, B)$ )

$$0 \longrightarrow \Theta_{X_0} \longrightarrow \mathbb{A}|_{X_0} \longrightarrow N_{X_0} \longrightarrow T_{X_0}^1 \longrightarrow 0 \quad .$$

Chacun des trois faisceaux de gauche est de profondeur 2 au point fermé, puisque ce sont des duals ([25], lemme 1). Donc  $H^0(X_0, F) = H^0(U, F)$  dans chaque cas, où  $U$  est le complémentaire du point fermé. D'autre part on a la suite exacte de faisceaux sur  $U$  :

$$0 \longrightarrow \Theta_U \longrightarrow \Theta_{\mathbb{A}|U} \longrightarrow N_U \longrightarrow 0$$

puisque  $U$  est lisse, donc par la suite exacte de cohomologie on obtient :

Proposition (Schlessinger [25]) : On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow T_{X_0}^1 \longrightarrow H^1(U, \Theta_U) \longrightarrow H^1(U, \Theta_{\mathbb{A}|U}) .$$

D'autre part,  $H^1(U, \Theta_U)$  classifie les déformations de  $U$  sur  $k[\varepsilon]$  (il est possible que cet espace soit de dimension infinie), et l'inclusion  $T_{X_0}^1 \hookrightarrow H^1(U, \Theta_U)$  est induite par la restriction d'une déformation de  $X_0$  à  $U$ .

En général la base  $S$  de la déformation semi universelle de  $X_0$  n'est pas lisse. C'est cependant le cas lorsque  $X_0$  est une intersection complète.

## 2. CONTRACTION DE DEFORMATIONS POUR LES SINGULARITES RATIONNELLES.

Soient  $X_0$  une surface possédant un certain nombre de singularités rationnelles  $P_1, \dots, P_m$ , et  $Y_0$  une résolution  $\pi: Y_0 \rightarrow X_0$  de ces singularités ( $X_0$  peut avoir d'autres singularités, mais  $Y_0$  ne les résout pas). Alors par définition de rationnel,  $R^1\pi_*\mathcal{O}_{Y_0} = 0$ .

A toute déformation  $Y \rightarrow \text{Sp } A$  de  $Y_0$ ,  $A \in \mathcal{C}$ , associons fonctoriellement une déformation  $X \rightarrow \text{Sp } A$  de  $X_0$ , de la façon suivante :  $X = \text{Sp}_Y \pi_*\mathcal{O}_Y$ . Il nous faut montrer que  $X \rightarrow \text{Sp } A$  est plat, et que la fibre fermée est  $X_0$ . Soient  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal de  $A$ , et  $n$  le plus petit entier tel que  $\mathfrak{m}^n = 0$  et  $A' = A/\mathfrak{m}^{n-1}$ .  $Y' \rightarrow \text{Sp } A'$  la déformation induite sur  $A'$ . On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \otimes \pi_*\mathcal{O}_{Y_0} \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_{Y'}, \longrightarrow \mathfrak{m} \otimes R^1\pi_*\mathcal{O}_{Y_0} .$$

Par hypothèse, on a une surjection  $\pi_*\mathcal{O}_Y \rightarrow \pi_*\mathcal{O}_{Y'}$ . On en déduit facilement les deux assertions voulues (l'argument est donné en détail dans Wahl [56]). On a donc une transformation de foncteurs  $\beta: D_{Y_0} \rightarrow D_{X_0}$  qui induit un morphisme  $S \rightarrow T$ .

Considérons l'application  $\beta$  sur les espaces tangents. (Supposons que

$X_0$  est local.) On a la diagramme (cf. § 1) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & H_E^1(\mathcal{O}_{Y_0}) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & H^1(Y_0, \mathcal{O}_{Y_0}) & & & & \\
 & \swarrow & \downarrow a_1 & \searrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & T_{X_0}^1 & \longrightarrow & H^1(U, \mathcal{O}_U) & \xrightarrow{a_2} & H^1(U, \mathcal{O}_{\mathbb{A}|U}) \quad .
 \end{array}$$

La flèche  $H_E^1(\mathcal{O}_{Y_0}) \rightarrow H^1(Y_0, \mathcal{O}_{Y_0})$  est une injection parce que  $\pi_* \mathcal{O}_{Y_0} = \mathcal{O}_{X_0}$  est de profondeur deux au point singulier ([50], § 15). A cause de l'interprétation naturelle de la flèche  $T_{X_0}^1 \rightarrow H^1(U, \mathcal{O}_U)$ , on voit que  $\beta$  restreint aux espaces tangents est la flèche en pointillé dans le diagramme (qui rend le diagramme commutatif). Donc

**Proposition 1** : Le noyau de  $\beta$  sur les espaces tangents est  $H_E^1(\mathcal{O}_{Y_0})$ .

On calculera  $H_E^1(\mathcal{O}_{Y_0})$  pour les points doubles rationnels au § 6.

D'autre part lorsque  $X_0$  n'est pas rationnelle, le diagramme montre que l'obstruction à contracter une déformation  $t \in D_{Y_0}(k[\varepsilon]) = H^1(Y_0, \mathcal{O}_{Y_0})$  à une déformation de  $X_0$  sur  $k[\varepsilon]$  est  $a_2(a_1(t))$ .

**Proposition 2** : La fibre du point fermé du morphisme  $\mathrm{Sp}(T) \rightarrow \mathrm{Sp}(S)$  consiste en un point (en général pas réduit). Donc  $\mathrm{Sp}(T)$  est de même dimension que (la clôture de) son image dans  $\mathrm{Sp}(S)$ .

**Démonstration** : Supposons la fibre de dimension positive. Alors on peut trouver une "branche" (au sens de [32]) dans la fibre. Soit  $\eta$  le point générique de la branche,  $\bar{\eta}$  le point géométrique correspondant.  $Y_{\bar{\eta}}$  est la résolution minimale d'une singularité qui s'obtient de  $X_0$  par extension du corps de base. Donc la déformation semi universelle de  $Y_{\bar{\eta}}$  a la même dimension que celle de  $Y_0$ . Mais par l'ouverture formelle de versalité (voir [32]),  $T$  est versel pour  $Y_{\bar{\eta}}$ , ce qui est impossible par la dimension.



### 3. LE FONCTEUR Res. (d'après [42] et [5]).

$X_0$  est une singularité rationnelle,  $\Lambda \in \hat{\mathcal{C}}$ , et  $f: X \rightarrow \text{Sp } \Lambda$  une déformation formelle de  $X_0$ . Soit  $\mathcal{C}_\Lambda$  la catégorie des  $\Lambda$  algèbres artiniennes locales de corps résiduel  $k$ .

Définissons un foncteur Res (pour "résolution") pour  $f: X \rightarrow \text{Sp } \Lambda$ . Pour tout  $A \in \mathcal{C}_\Lambda$ , on a le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X_A & \longrightarrow & X \\ \downarrow \bar{f} & & \downarrow f \\ \text{Sp}(A) & \longrightarrow & \text{Sp}(\Lambda) \end{array} .$$

Alors Res est le foncteur  $\mathcal{C}_\Lambda \rightarrow (\text{Ens})$  qui à  $A$  associe l'ensemble de résolutions minimales de  $X_A$ , à isomorphisme près. On dit que  $Y \rightarrow X_A$  est une résolution minimale si le composé  $Y \rightarrow X_A \xrightarrow{f} \text{Sp}(A)$  est lisse et  $Y_{\text{réd}}$  est une résolution minimale de  $(X_A)_{\text{réd}}$ .

D'une façon générale nous notons  $Y_A \rightarrow X_A \xrightarrow{\bar{f}} \text{Sp}(A)$  un élément de  $\text{Res}(A)$ .

Théorème : Res est proreprésentable au sens du § 1.

Une démonstration qui est valable en caractéristique arbitraire est donnée dans [42] ; on utilise le critère de Schlessinger [52].

Supposons dorénavant que  $f: X \rightarrow \text{Sp } \Lambda$  est une déformation semi-universelle de  $X_0$ . Nous notons  $\Lambda$  par  $S$  comme au § 1. Nous notons  $Y_R \rightarrow X_R \rightarrow \text{Sp}(R)$  la résolution formelle universelle pour Res. Rappelons que  $R$  et  $S$  sont des anneaux locaux complets et que  $\text{Sp}$  désigne dans ce contexte le spectre formel.

Le but principal de cet exposé est l'étude du morphisme  $\text{Sp}(R) \rightarrow \text{Sp}(S)$  dans un cas particulier formulé au § 5.

Proposition 1 :  $Y_R \rightarrow \text{Sp}(R)$  est une déformation verselle de  $Y_0$ . De plus si  $\text{car. } k = 0$ , cette déformation est même semi-universelle. Alors  $R \approx T$  est un anneau de séries formelles.

Démonstration : En utilisant la versalité de  $R$  et de  $T$  pour leurs foncteurs respectifs, on obtient des flèches

$$\mathrm{Sp} T \longrightarrow \mathrm{Sp} R \longrightarrow \mathrm{Sp} T \quad .$$

La semi-universalité de  $T$  montre que la flèche composée est un isomorphisme ; donc  $\mathrm{Sp} R \rightarrow \mathrm{Sp} T$  est une surjection. Pour démontrer (en car. 0) que c'est aussi une injection il suffit de la montrer sur les espaces tangents. Soit

$Y_{k[\varepsilon]} \rightarrow Y_{k[\varepsilon]} \rightarrow \mathrm{Sp}(k[\varepsilon])$  un élément de  $\mathrm{Res}(k[\varepsilon])$  qui est trivial comme déformation de  $Y_0$ . Donc  $Y_{k[\varepsilon]}$  et  $X_{k[\varepsilon]}$  sont des déformations triviales. Dire que  $Y_{k[\varepsilon]}$  est une résolution triviale de  $X_{k[\varepsilon]}$  revient à dire que tout automorphisme de  $X_0$  se relève à  $Y_0$ , ce qui est le cas puisque  $\pi_* \oplus_{Y_0} = \oplus_{X_0}$ , comme on a vu dans [50], § 15.

**Proposition 2** : Soient  $r$  un point de  $\mathrm{Sp}(R)$ ,  $s$  son image dans  $\mathrm{Sp}(S)$ . Si la fibre  $X_s$  de  $f: X \rightarrow \mathrm{Sp}(S)$  au-dessus de  $s$  est lisse, l'homomorphisme  $S_s \rightarrow R_r$  est un isomorphisme.

Soit  $S'$  un localisé de  $S$  au voisinage de  $s$ . Pour  $S'$  convenable,  $X_{S'} \rightarrow S'$  est lisse ; son foncteur  $\mathrm{Res}$  est représenté par lui-même. Par ouverture formelle de la versalité (comme dans la prop. 2 du § 2, voir [5]),  $\mathrm{Sp}(R)$  est versel pour  $\mathrm{Res}$  au voisinage de  $r$  ; donc (au voisinage de  $r$ ) on a  $\mathrm{Sp} R \rightarrow \mathrm{Sp} S$  lisse ; la proposition 2 du § 2 montre qu'ils ont la même dimension, ce qui donne le résultat. (On s'est servi de la proposition 1 pour dire que  $R \simeq T$ .)

**Proposition 3** : La fibre générique de  $X_T \rightarrow \mathrm{Sp}(T)$  est lisse ( $X_T$  est la contraction, via  $\beta$ , de la déformation verselle  $Y$  de  $Y_0$ ).

**Démonstration** : Si  $E_i$  est une composante du diviseur exceptionnel de  $Y_0 \rightarrow X_0$ , on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \oplus_{E_i} \longrightarrow \oplus_{Y_0} |_{E_i} \longrightarrow N_{E_i} \longrightarrow 0 \quad .$$

On a donc une flèche  $\oplus_{Y_0} \rightarrow \oplus_{Y_0} |_{E_i} \rightarrow N_{E_i}$  et une flèche  $\oplus_{Y_0} \rightarrow \bigoplus_{k=1}^r N_{E_i}$  qui est surjective comme on le voit par un calcul en coordonnées locales (on utilise le fait  $-X_0$  étant rationnelle- que les  $E_i$  s'intersectent transversalement : [50], § 5). En cohomologie on obtient donc une surjection :

$$H^1(Y_0, \oplus_{Y_0}) \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^r H^1(E_i, N_{E_i}) \longrightarrow 0 \quad .$$

Il est bien connu (Kodaira : voir [5], § 3) que l'image d'un élément

$t \in H^1(Y_0, \mathcal{O}_{Y_0})$  dans  $H^1(E_i, N_{E_i})$  est l'obstruction au relèvement de  $E_i$  à la déformation. Donc génériquement au-dessus de  $T$  aucun des  $E_i$  ne se relève à  $Y$ . Soit  $\eta$  le point générique,  $\bar{\eta}$  le point générique correspondant et  $Y_{\bar{\eta}}$  et  $X_{\bar{\eta}}$  les fibres de  $Y$  et  $X$ . Si  $X_{\bar{\eta}}$  n'a pas de singularités, on a terminé ; sinon on voit immédiatement que  $X_{\bar{\eta}}$  n'a que des singularités rationnelles. On répète l'argument ci-dessus pour montrer que les composantes exceptionnelles de  $Y_{\bar{\eta}} \rightarrow X_{\bar{\eta}}$  disparaissent par déformation générique de  $Y_{\bar{\eta}}$ . Encore une fois par ouverture formelle de la versalité cette déformation peut se réaliser dans  $Y$  : c'est une contradiction, car  $\eta$  étant générique toutes les composantes exceptionnelles de  $Y_{\bar{\eta}}$  se relèvent dans un voisinage de  $\eta$ .

**Proposition 4** : L'image de  $\text{Sp}(T)$  -ou, ce qui revient au même,  $\text{Sp}(R)$ - dans  $\text{Sp}(S)$  est une composante irréductible, appelée la composante d'Artin.

C'est un corollaire immédiat des propositions 1 et 3.

Notons  $S_a$  l'anneau formel de la composante d'Artin (avec la structure réduite).

Il nous reste à étudier le revêtement ramifié  $\text{Sp}(T) \rightarrow \text{Sp}(S_a)$ .

**Corollaire** : Si on sait a priori que  $\text{Sp}(S)$  est irréductible (c'est le cas pour les points rationnels doubles et triples) alors toute déformation de  $X_0$  admet une résolution simultanée. D'autre part, si on sait que  $\text{Sp}(S)$  est réductible (c'est le cas pour un grand nombre de singularités rationnelles de multiplicité 4 : voir [47], § 8, et [51]), alors il y a des déformations qui n'admettent pas une résolution simultanée.

**Remarque** : Artin obtient dans [5] des résultats sur  $\text{Res}$  bien plus beaux que ceux (formels) énoncés ici.

#### 4. LE THEOREME PRINCIPAL.

Prenons  $k$  de caractéristique 0.

$X_0$  est une singularité rationnelle,  $Y_0$  la résolution minimale. Soient  $B_j$ ,  $r \leq j \leq \ell$ , les composantes connexes de l'ensemble des diviseurs exceptionnels de  $Y_0 \rightarrow X_0$  de self-intersection -2. Le graphe dual de  $B_j$  est le graphe de Dynkin d'un système de racines  $W_j$ , et  $B_j$  est même la résolution minimale du point double rationnel de même nom. Pour semer encore plus de confusion, nous utiliserons aussi la notation  $W_j$  pour le groupe de Weyl de  $W_j$ .

Théorème principal (Lipman [45] et Wahl [57]) : Le groupe de Weyl  $W_j$  agit de façon naturelle sur la déformation semi-universelle  $Sp T$  de  $Y_0$  (ou sur  $Sp R$ , ce qui revient au même) en tant que groupe d'automorphismes de Res. D'autre part (et c'est le point essentiel) le quotient de  $Sp T$  par  $\pi W_j$  est isomorphe à  $Sp(S_a)$ . Comme chaque  $W_j$  est engendré par des réflexions,  $Sp(S_a)$  est lisse ([7], V.5).

Définissons d'abord la notion de groupe d'automorphismes de Res : sup-

posons que  $Y_R \xrightarrow{\pi} X_R \longrightarrow Sp(R)$  proreprésente Res, et soit  $g$  un automorphisme de  $Sp(R)$ . Notons  $Y_R^g \rightarrow Sp R$  la déformation de  $Y_0 : Y_R \xrightarrow{\pi} Sp(R) \xrightarrow{g^{-1}} Sp(R)$ , et  $X_R^g \rightarrow Sp R$  la contraction de  $Y_R^g \rightarrow Sp R$ . S'il existe un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} X_R & \xrightarrow{\sim} & X_R^g \\ & \searrow & \swarrow \\ & Sp R & \end{array}$$

on dit que  $g$  est un automorphisme de Res.

Il est clair que si  $G$  est un groupe d'automorphismes de Res, le morphisme  $Sp(R) \rightarrow Sp(S_a)$  se factorise par le quotient  $Sp(R)/G$ .

La définition de l'action  $\pi W_i$  sur  $Sp T$  est assez compliquée : la meilleure façon de procéder est d'utiliser des transformations élémentaires : voir [35] ou [57]. Dans le cas qui nous intéresse (voir le prochain paragraphe), le groupe de Weyl opère par des transformations de Cremona de  $\mathbb{P}^2$ .

Lorsque  $X_0$  est un point double (le seul cas que nous considérons dorénavant) le théorème principal a été démontré par Brieskorn [34] d'après une conjecture de Grothendieck reposant sur des travaux antérieurs de Brieskorn [8 et 8']. Dans le cas d'un point double rationnel (il s'agit d'une hypersurface) il est clair que pour résoudre simultanément au-dessus de  $Sp S$  il faut trivialiser l'action de la monodromie sur  $H_2$  de la fibre. Rappelons ce que cela veut dire. Soit  $U$  l'ouvert de  $Sp S$  où les fibres de  $X \rightarrow Sp(S)$  sont lisses ;  $\pi_1$  (= le groupe fondamental de  $U$ ) agit sur le  $H_2(., \mathbb{Z})$  d'une fibre ; soit  $U'$  le revêtement étale de  $U$  associé à cette représentation. Ce revêtement s'appelle le revêtement de monodromie. Comme  $Y \rightarrow Sp(T)$  est un fibré différentiablement trivial, dont la fibre est diffeomorphe à celle de  $X_U \rightarrow U$ , on voit que  $Y \rightarrow Sp(T)$  doit "dominer" le revêtement de monodromie, qui dans le cas d'un point double rationnel  $W_r$  est de groupe le groupe de Weyl de  $W_r$ .

D'autre part dans le cas de  $A_n$  et  $D_n$  on peut montrer explicitement que, après passage à un revêtement ramifié de groupe le groupe de Weyl corres-

pondant, la déformation verselle admet une résolution simultanée [8'] : ainsi on a démontré le théorème dans ce cas. Par exemple, considérons  $A_n$  d'équation  $xy + z^{n+1} = 0$ . La déformation verselle de  $A_n$  s'écrit

$$xy + z^{n+1} + t_2 z^{n-1} + \dots + t_{n+1} = 0 \quad .$$

Soit  $t_i = S_i(a_1, \dots, a_{n+1})$  le revêtement ramifié de la base  $k[t_2, \dots, t_{n+1}]$ , où  $S_i$  est le polynôme symétrique de degré  $i$  des  $a_j$ , et  $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = S_1(a_j) = 0$ . Autrement dit, les  $t_i$  sont les invariants de l'action naturelle de  $A_n$  sur l'hyperplan  $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 0$  dans  $k[a_j]$ . On a alors

$$xy + \prod_{j=1}^{n+1} (z + a_j) = 0$$

et on peut montrer par des éclatements explicites que cette famille peut être résolue sans changement de base : [8'].

Une construction analogue marche pour les  $D_n$  ; mais comme elle exige une connaissance explicite des invariants sous le groupe de Weyl, on n'a guère d'espoir de l'étendre au cas de  $E_6$ ,  $E_7$  et  $E_8$ . Nous procédons donc autrement, à l'instar de [55]. Nous aurons besoin d'ailleurs (pour une des deux démonstrations possibles) d'un argument de monodromie, que nous réaliserons sur les courbes exceptionnelles de certaines surfaces compactes, plutôt que sur les cycles évanescents comme plus haut. Notre construction donnera immédiatement, pour  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ , le résultat suivant qui est vrai pour tous les points doubles rationnels (c'est aussi un corollaire de la construction de [34]).

**Théorème 2** : Soit  $Y \rightarrow \text{Sp } T$  une déformation semi-universelle de la résolution minimale  $Y_0$  d'un point double rationnel  $X_0$  associé au système de racines  $W$ . Soient  $t$  un point de  $\text{Sp } T$ ,  $W_t$  le stabilisateur dans le groupe de Weyl  $W$  du point  $t$ .  $W_t$  peut s'écrire de manière unique comme un produit  $\prod_{i=1}^m W_i$  de groupes de Weyl irréductibles ([7], V.3.3). Alors la contraction de la fibre  $Y_t$  possède précisément  $m$  singularités, qui sont les points doubles rationnels associés aux  $W_i$ . On obtient toutes les configurations possibles par le procédé suivant : effacer un nombre de sommets arbitraire, et toutes les arêtes joignant les sommets effacés, du graphe dual de la singularité ; et réciproquement toutes les configurations possibles par ce procédé sont effectivement réalisées.

On a donc une description très explicite de la déformation semi-universelle d'un point double rationnel !

## 5. CONSTRUCTION DANS LE CAS DE $A_4, D_5, E_6, E_7$ ET $E_8$ .

(Nous utilisons les résultats de [38] de façon systématique dans ce paragraphe.)

Soient  $C$  une cubique irréductible dans  $\mathbb{P}^2$ ,  $i: C \rightarrow \mathbb{P}^2$  l'inclusion et  $U$  l'ouvert des points lisses de  $C$ .  $r$  est un entier positif.

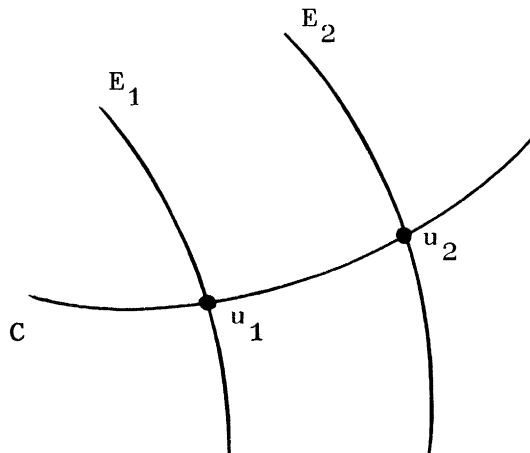
La famille  $\mathbb{P}^2 \times U^r \xrightarrow{p_0} U^r = \underbrace{U \times \dots \times U}_{r \text{ fois}}$  a  $r$  sections  $\sigma_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ , définies par :

$$\sigma_j(u_1, \dots, u_r) = (i(u_j), u_1, \dots, u_r) \quad .$$

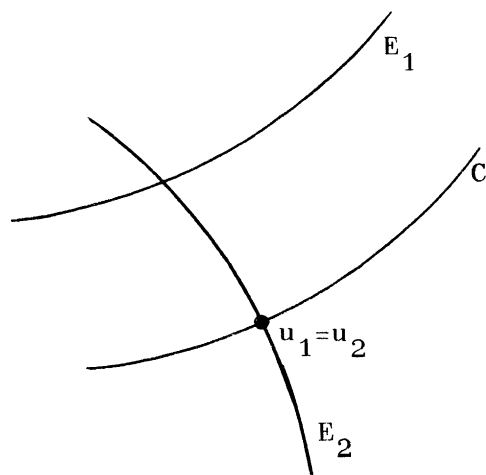
Eclatons  $\mathbb{P}^2 \times U^r$  le long de l'image de  $\sigma_1$ . On obtient

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{\text{éclatement}} & \mathbb{P}^2 \times U^r \\ p_1 \downarrow & \swarrow p & \\ U_r & & \end{array}$$

Eclatons ensuite  $Z_1$  le long du transformé strict de  $\sigma_2$  dans  $Z_1$  ; on appelle  $Z_2$  la variété éclatée, et on recommence. Soit  $Z = Z_r$  la famille de surfaces obtenue par l'éclatement des  $r$  sections. Par construction  $p: Z \rightarrow U^r$  est propre et plat. Chaque fibre de  $p$  est l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $r$  points, pas nécessairement distincts. Plus précisément, soit  $u = (u_1, \dots, u_r) \in U^r$ . Voici comment on obtient la fibre  $Z_u$ . Eclatons d'abord  $i(u_1)$  dans  $\mathbb{P}^2$ .  $u_2$  définit un point unique sur le transformé strict de  $C$  ; éclatons-le, et ainsi de suite. Par exemple, si  $r=2$ , deux cas se présentent. Si  $u_1 \neq u_2$ , on obtient :



( $E_1$  et  $E_2$  sont les diviseurs exceptionnels du premier et du deuxième éclatement, et  $E_i^2 = -1$ .) Mais si  $u_1 = u_2$ , on a :



où  $E_1^2 = -2$  et  $E_2^2 = -1$ . Demazure a considéré ce genre de phénomène en détail dans [38].

De plus on a une trivialisatation naturelle du groupe de Picard relatif de  $Z \rightarrow U^r$ , défini de la façon suivante [38, II, § 2] : pour toute fibre  $u \in U^r$ ,  $\varphi_u : \text{Pic } Z_u \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^{r+1}$ ,  $\xi \rightarrow (\xi \cdot E_0, \xi \cdot E_1, \dots, \xi \cdot E_r)$ , où  $E_0$  est l'image réciproque d'une droite dans  $\mathbb{P}^2$  et  $E_j$  est le transformé total de  $u_j$  dans  $Z_u$ .

Nous supposons dorénavant que  $3 \leq r \leq 8$ . Rappelons que la classe canonique  $\omega$  s'écrit  $-3E_0 + \sum_{i=1}^r E_i$ , que la forme d'intersection est négative définie sur l'orthogonal  $P^\perp$  de  $\omega$  dans  $P = \text{Pic } Z_u$ , et que les éléments de longueur -2 dans  $P^\perp$  engendrent un système de racines qu'on note  $W_r$ . Dans la notation de Bourbaki [7] on a

$r$	3	4	5	6	7	8
$W_r$	$A_1 \times A_2$	$A_4$	$D_5$	$E_6$	$E_7$	$E_8$

Alors pour tout  $u \in U^r$ , les points  $u_1, \dots, u_r$  sont en position presque générale dans  $\mathbb{P}^2$ , puisqu'ils sont sur une cubique irréductible ([38], III théorème 1). En particulier si  $\omega_{Z_n}$  est le faisceau canonique de  $Z_u$ ,

$$(*) \quad H^1(Z_u, \omega_{Z_u}^{\otimes k}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Soit  $\omega_{Z|U}$  le faisceau canonique relatif de  $p: Z \rightarrow U^r$ . Par le théorème de changement de base et (\*) on voit que  $p_*(\omega_{Z|U}^{\otimes k})$  est localement libre ; la famille

$$\begin{array}{c} \bar{Z} = \text{Proj}_{U^r} \left( \bigoplus_{k \geq 0} (p_* \omega_{Z|U}^{\otimes k}) \right) \\ \downarrow \\ U^r \end{array} .$$

est donc plate (et propre, bien entendu); de fait même la famille de cônes  $\text{Spec}_{U^r} \left( \bigoplus_{k \geq 0} p_* \omega_{Z|U}^{\otimes k} \right)$  est plate. On a donc un triangle

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & \bar{Z} \\ p \swarrow & & \searrow q \\ U^r & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{lisse} \\ \text{plat} \end{array}$$

et d'après [38],  $\bar{Z}$  n'a comme singularités que des points doubles rationnels ; chaque fibre  $\bar{Z}_u$  est le modèle anticanonique de  $Z_u$  ; chaque  $Z_u \rightarrow \bar{Z}_u$  est la résolution minimale des singularités de  $\bar{Z}_u$ . Nous sommes donc dans une situation de résolution simultanée.

Supposons de plus que  $C$  est une cubique cuspidale. Dans ce cas  $U$  est le groupe algébrique  $\mathbb{G}_a$  avec élément neutre l'unique point d'inflexion 0 de  $U \subset \mathbb{P}^2$ . La loi de groupe est donnée par l'alignement. Nous pouvons faire un changement de coordonnées dans  $\mathbb{P}^2$  de sorte que  $C$  soit donnée par l'équation  $z^2 y = x^3$ . Le plongement de  $U$  dans  $\mathbb{P}^2$  est alors donné paramétriquement par  $x = t$ ,  $y = t^3$ ,  $z = 1$ . Cette représentation exhibe clairement le groupe  $\mathbb{G}_m$  d'automorphismes projectifs de  $C$ , donné par

$$(x : y : z) \longmapsto (sx : s^3 y : z) \quad \text{pour } s \in \mathbb{G}_m .$$

L'action de  $\mathbb{G}_m$  se prolonge naturellement à  $U^r$  et à  $Z \rightarrow U^r$ , le seul point fixé sur  $U^r$  étant  $u_0 = (0, \dots, 0)$ . Donc la fibre  $Z_{u_0}$  (qu'on note  $Z_0$  pour simplifier l'écriture) admet une action de  $\mathbb{G}_m$ .

Identifions les singularités de la fibre  $\bar{Z}_0$ , c'est-à-dire, trouvons les diviseurs exceptionnels de  $Z_0 \rightarrow \bar{Z}_0$ .

Dans [38], nous avons vu que pour tout  $u \in U$  les singularités de  $\bar{Z}_u$  proviennent des racines effectives de  $Z_u$  ; nous avons aussi vu ([38] II, prop. 2) toutes les façons possibles d'obtenir ces racines effectives à partir d'éclatements de  $\mathbb{P}^2$ . Traduisons ceci en termes des coordonnées naturelles  $t_1, \dots, t_r$  des  $U^r = U \times \dots \times U$ .



Méthode pour obtenir une racine effective	Interprétation sur $U^r$
Eclater 2 points l'un au-dessus de l'autre	$t_i - t_j = 0$
Eclater 3 points sur une droite	$t_i + t_j + t_k = 0$
Eclater 6 points sur une conique	$\sum_{j=1}^6 t_{ij} = 0$
Eclater 8 points sur une cubique avec un point double	$2t_{i1} + \sum_{j=2}^7 t_{ij} = 0$

On obtient donc un système d'hyperplans passant tous par l'origine  $u_0 = (0, \dots, 0)$ . On aura donc un maximum de racines effectives au-dessus de  $u_0$ . D'autre part les racines effectives sont des racines dans  $P^1$ . En comparant avec [38], II.4 on voit que les racines correspondant à  $t_{i+1} - t_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  et  $t_1 + t_2 + t_3$  forment déjà une base du système de racines  $W_r$ . Donc

**Proposition 1** : Si  $r = 3$ ,  $\bar{Z}_0$  a une singularité  $A_1$  et une singularité  $A_2$ . Si  $r \geq 4$ ,  $\bar{Z}_0$  a une singularité  $W_r$ .

C'est un exercice amusant de vérifier directement la proposition en éclatant les points.  $t_{i+1} - t_i$  correspond à une droite exceptionnelle,  $t_1 + t_2 + t_3$  à la tangente d'inflexion de  $C$  au point 0.

Pour exclure le cas où il y a deux singularités sur  $\bar{Z}_0$  prenons  $4 \leq r \leq 8$ . Reprenons maintenant les notations du début de l'exposé, et supposons que  $k$  est de caractéristique 0. Il y a donc une seule singularité  $X_0$  (point double rationnel) de graphe dual le graphe de Dynkin de  $W_r$  sur  $\bar{Z}_0$ . (Rappelons que par singularité ici nous entendons  $X_0 = \text{Sp}(B)$ ,  $B$  un anneau local complet.) Soit  $Y_0$  la résolution minimale de  $X_0$ .

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & \bar{Z} \\ & \searrow & \swarrow \\ & U^r & \end{array}$$

Localisons convenablement dans les fibres et complétons en bas autour du point  $u_0 \in U^r$  ; par abus de langage nous gardons les mêmes notations. Il est clair que

$Z \rightarrow U^r$  est une déformation de  $Y_0$  et  $\bar{Z} \rightarrow U^r$  une déformation de  $X_0$ .

Voici un résultat dont nous n'aurons pas besoin par la suite, mais qui montre que la construction  $Z \rightarrow U^r$  est naturelle.

Théorème 1 :  $Z \rightarrow U^r$  est une déformation semi-universelle de  $Y_0$ .

Soient  $D_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel de  $Y_0 \rightarrow X_0$  pour n'importe quelle singularité de surface  $X_0$ . Nous avons vu (§ 3) que nous avons une surjection :

$$H^1(Y_0, \Theta_{Y_0}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r H^1(D_i, N_{D_i}) \longrightarrow 0$$

$N_{D_i}$  = faisceau normal de  $D_i$  dans  $Y_0$ . De plus

Proposition 2 : Si  $X_0$  est une singularité quotient (car.  $k=0$ ), alors

$$H^1(Y_0, \Theta_{Y_0}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^r H^1(D_i, N_{D_i}).$$

Une démonstration de cette proposition est donnée au § 6.

Corollaire :  $\dim H^1(Y_0, \Theta_{Y_0}) = r$  pour le point double  $A_r$ ,  $D_r$  ou  $E_r$ .

En effet tous les diviseurs exceptionnels  $D$  ont self-intersection  $-2$ , donc  $H^1(D, N_D)$  est de dimension 1 ; on applique la proposition 2.

Remarque : Ce résultat est faux en général en car. 2.3 ou 5.

Démonstration du théorème : Soit  $Y \rightarrow \text{Sp } T$  une déformation semi-universelle de  $Y_0$ . On a une flèche  $U^r \rightarrow \text{Sp } T$  par versalité. Nous voulons montrer que c'est un isomorphisme. Comme les deux espaces sont lisses et de même dimension, il suffit de démontrer que la flèche induit une injection sur les espaces tangents.

L'espace tangent de  $\text{Sp } T$  est  $H^1(Y_0, \Theta_{Y_0}) = \bigoplus_{i=1}^r H^1(D_i, N_{D_i})$  et comme on a déjà vu, l'image d'un élément de  $H^1(Y_0, \Theta_{Y_0})$  dans  $H^1(D_i, N_{D_i})$  est l'obstruction à prolonger  $D_i$  au premier degré.

Pour démontrer le théorème il faut donc trouver un vecteur tangent dans  $U^r$  à l'origine, au-dessus duquel  $D_i$  est obstrué, mais les  $D_j$ ,  $j \neq i$ , ne le sont pas. En utilisant la table précédente on voit qu'il y a une unique direction où les  $D_j$ ,  $j \neq i$ , se relèvent. On vérifie facilement que  $D_i$  ne se

relève pas dans cette direction ; cela revient à vérifier l'assertion suivante :

Lemme 1 :  $Z$  une surface lisse,  $E$  une courbe exceptionnelle de première espèce sur  $Z$  ( $E^2 = -1$ ,  $E$  rationnelle lisse),  $P$  un point de  $E$  et  $C$  un germe de courbe sur  $Z$  intersectant  $E$  transversalement au point  $P$ . Formons  $Z \times C \xrightarrow{p_2} C$ , et éclatons la section naturelle  $C \rightarrow Z \times C$ . On obtient une famille  $Z' \rightarrow C$ . Soit  $E' \subset Z'$  la transformée stricte de  $(E, P)$  dans  $Z'$ . Alors  $E'$  est obstrué au premier degré (c'est-à-dire au niveau des espaces tangents).

Il suffit alors d'appliquer le lemme à chacun des  $D_i$ . Le théorème est démontré.

Montrons maintenant que le groupe de Weyl de  $W_r$ , que nous notons aussi  $W_r$ , agit sur le foncteur  $\text{Res}$ . Rappelons la situation :

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & & \searrow & & \\ & & X_R & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \downarrow & & & \downarrow \\ & \text{Sp } R & \xrightarrow{\quad} & \text{Sp } S & \end{array}$$

le carré cartésien,  $X \rightarrow \text{Sp } S$  est la déformation semi-universelle de  $X_0$ , et  $Y \rightarrow X_R$  une résolution des fibres. ( $R$  proreprésente  $\text{Res}$ .)

Nous allons exhiber un groupe  $G$  d'automorphismes de  $\text{Res}$  (notion définie au paragraphe précédent).

Soient, comme avant,  $t_1, \dots, t_r$  les coordonnées naturelles de  $U^r$ . Le groupe  $G$  que nous considérons est engendré par le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_r$  agissant par permutation  $t_i \leftrightarrow t_j$  plus un élément  $g$  que nous expliciterons dans un instant.

Montrons d'abord que  $\mathfrak{S}_r$  est un groupe d'automorphismes de  $\text{Res}$ . Il nous faut montrer que  $X_R^\sigma$  est isomorphe à  $X_R$  pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$  ; dans nos anciennes notations, nous allons montrer que  $\bar{Z}^\sigma$  est isomorphe à  $\bar{Z}$  (sur  $U^r$ ). (Notons qu'il n'y a pas d'isomorphisme  $Z^\sigma \xrightarrow{\sim} Z$ .) En effet  $\bar{Z} = \text{Proj}_{U^r} (\oplus_{k \geq 0} p_* \omega_{Z|U}^{\otimes k})$ . Il suffit

de montrer que  $\mathbb{P}(p_* \omega_{Z|U}^{\otimes k})^g \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(p_* \omega_{Z|U}^{\otimes k})$ . Or la fibre de  $p_* \omega_{Z|U}$  au-dessus de  $(u_1, \dots, u_r)$  consiste en les cubiques passant une fois par chacun des points  $u_1, \dots, u_r$  (dans [38] IV, on a montré comment donner un sens à cette expression lorsque certains des  $u_i$  sont confondus). Evidemment ceci ne dépend pas de

l'ordre dans lequel on prend les points  $u_i$  ; et comme on peut faire de même pour tout  $k$ , on a  $\bar{Z} \xrightarrow{\sim} Z^\sigma$ .

Décrivons maintenant l'élément  $g$ . Prenons trois points  $u_1, u_2, u_3$  (quelconques ; non nécessairement distincts) de  $U$  et faisons la transformation quadratique standard  $T$  de points de base  $u_1, u_2, u_3$ .  $T$  transforme  $X = \mathbb{P}^2$  birationnellement en un autre exemplaire de  $\mathbb{P}^2$  que nous appelons  $X'$ . L'image de  $C$  est encore une cubique cuspidale  $C'$ , encore paramétrisée par  $t$ , avec le cusp à l'infini et le point d'inflexion au point  $t = -(u_1 + u_2 + u_3)/3$ . Les isomorphismes  $\varphi_\mu : X' \rightarrow X$  envoyant  $C'$  sur  $C$  sont paramétrisés par  $\mu \in \mathbb{G}_m$ . En termes de la paramétrisation de  $C$

$$t \longmapsto \mu t + \mu(u_1 + u_2 + u_3)/3 \quad .$$

Choisissons  $\mu = 1$ .

La transformation inverse  $T^{-1}$  a 3 points de base sur  $C'$  :  $u'_k$ ,  $1 \leq k \leq 3$ , où  $u'_k$  est le troisième point d'intersection de la droite  $\overline{u_i u_j}$  ( $1 \leq i, j \leq 3$ ,  $i \neq j \neq k$ ) avec  $C$ . Remarquons que  $u'_k \in U$ . Donc  $u'_k + u_i + u_j = 0 \Rightarrow u'_k = -u_i - u_j$ . Donc après transformation par  $\varphi_1$  on obtient pour paramètre de  $u'_k$  :

$$-t_i - t_j + \frac{t_j + t_2 + t_3}{3} = t_k - \frac{2}{3} (t_1 + t_2 + t_3)$$

où  $t_i$  est le paramètre de  $u_i$  sur  $C$ .

Ceci suggère donc qu'on considère la transformation linéaire  $g$  sur  $U^r$  définie par

$$t_1 \longmapsto t_1 - 2/3 c$$

$$t_2 \longmapsto t_2 - 2/3 c$$

$$t_3 \longmapsto t_3 - 2/3 c$$

$$t_4 \longmapsto t_4 + 1/3 c$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$t_r \longmapsto t_r + 1/3 c$$

où  $c = t_1 + t_2 + t_3$ .

Lemme 2 :  $g$  est un automorphisme de  $\text{Res}$ .

Il faut montrer que  $\overline{Z}^g \xrightarrow{\sim} \overline{Z}$  au-dessus de  $U^r$ . La démonstration est la même que pour  $\mathbb{S}_r$  : en effet une transformation quadratique transforme une cubique  $K$  passant par les points de base  $u_1, u_2, u_3$  et les points  $u_4, \dots, u_r$  en une cubique  $g(K)$  passant par les points de base  $g(u_1), g(u_2), g(u_3)$  de  $T^{-1}_r$  et les points  $g(u_4), \dots, g(u_r)$ . Ceci donne l'isomorphisme voulu pour  $k=1$  ; pour  $k>1$  on peut faire de même, ce qui démontre le lemme.

Rappelons que nous notons  $G$  le groupe d'automorphismes de Res engendré par  $\mathbb{S}_r$  et  $g$ .

**Proposition 3** :  $G$  est isomorphe au groupe de Weyl du système de racines  $W_r$  ;  $W_r$  agit par réflexions sur  $U^r$ .

Il y a plusieurs façons de démontrer ce résultat. La première est de constater que les équations décrivant l'action de  $G$  sur  $U^r$  sont la projection, par  $t_i = 3x_i - x_0$ , de l'action de  $W_r$  sur  $\mathbb{Z}^{r+1}$  décrite dans [38], II,4. La seconde est de constater directement que  $G$  agit sur le groupe de Picard relatif de  $Z \rightarrow U^r$ , écrite dans la "base canonique", en préservant la classe canonique et en préservant la forme intersection. Ceci donne aussi le résultat.

**Remarque** : Il existe <sup>une</sup> toute littérature sur les groupes finis de transformations de Cremona et leur lien avec les systèmes de racines : [36], [37], [39], [40], [41], [43].

Revenons à la notation locale. Nous avons maintenant démontré qu'on a un morphisme (qui est surjectif par les résultats généraux du § 3) :

$$(\mathrm{Sp} R)/W_r \longrightarrow \mathrm{Sp}(S) \quad .$$

**Théorème principal** :  $(\mathrm{Sp} R)/W_r \longrightarrow \mathrm{Sp}(S)$  est un isomorphisme.

Nous esquissons deux démonstrations de ce résultat, la première étant plus courte mais assez artificielle.

**Première démonstration** : Nous pouvons prendre pour  $R$  le complété de l'anneau local de  $U^r$  au point  $u_0$ , soit  $k[[t_1, \dots, t_r]]$ . Comme nous avons vu,  $\mathbb{E}_m$  agit de façon naturelle sur cet anneau avec poids 1 en chaque variable : ceci veut dire que si  $\mu \in \mathbb{E}_m$ ,  $\mu(t_i) = \mu t_i$ . Puisque  $W_r$  agit linéairement sur cet anneau, et est engendré par des réflexions, l'anneau des invariants est un anneau de séries formelles de dimension  $r$  admettant une action de  $\mathbb{E}_m$ . D'autre part on sait calculer les poids des variables de cet anneau pour l'action de  $\mathbb{E}_m$ . Pour tout

ceci voir Bourbaki [7], V.5.

Par ailleurs  $X_0$  est une hypersurface quasi-homogène, dont l'équation est donnée dans [24]. Il est bien connu qu'on peut trouver une déformation semi-universelle de  $X_0$ ,

$$X \longrightarrow \mathrm{Sp} S$$

munie d'une action de  $\mathbb{G}_m$ . Pour une hypersurface on vérifie facilement ce résultat à la main ; le cas général est démontré dans [47], § 2.

On a donc une déformation  $X_R \rightarrow \mathrm{Sp} R$  munie d'une action de  $\mathbb{G}_m$  et une déformation semi-universelle munie d'une action de  $\mathbb{G}_m$ . On démontre alors ([49], 2.3) qu'il existe un morphisme  $\mathrm{Sp} R \rightarrow \mathrm{Sp} S$  qui est  $\mathbb{G}_m$ -équivariant. Mais alors on constate que les poids de  $S$  pour l'action de  $\mathbb{G}_m$  sont les mêmes que ceux de  $R^{\mathbb{W}_r}$ . Donc la flèche est un isomorphisme, et la démonstration terminée.

Le désavantage de cette démonstration (qui a des points communs avec celle de Brieskorn [34], et celle de Slodowy [53]) est qu'elle exige une connaissance complète de la déformation verselle  $X \rightarrow \mathrm{Sp}(S)$  de  $X_0$ .

Deuxième démonstration (sur  $\mathbb{C}$ ) : Pour cette démonstration nous n'avons besoin que de savoir que les variables de  $S$  ont des poids positifs pour l'action de  $\mathbb{G}_m$  : c'est vrai pour toutes les singularités quotients. Nous pouvons compléter les fibres de la déformation verselle  $X \rightarrow \mathrm{Sp}(S)$  et obtenir une famille propre et plate  $\bar{X} \rightarrow S$ , avec

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \bar{X} \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

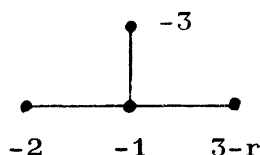
Pour simplifier l'écriture nous écrivons  $S$  pour  $\mathrm{Sp}(S)$  et  $R$  pour  $\mathrm{Sp}(R)$ .

(Pour le moment  $X_0$  est n'importe quel point double rationnel.) Les fibres de  $\bar{X}$  ont deux ou trois points singuliers à l'infini (des singularités rationnelles), dont le type ne varie pas au-dessus de  $S$ . Résolvons-les de façon minimale; nous obtenons une nouvelle famille

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & W \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

Pour chaque  $s \in S$ ,  $W_s - X_s$  est un diviseur dont les composantes irréductibles

sont des  $\mathbb{P}^1$  de graphe dual (lorsque  $X_0$  = la singularité de graphe dual  $W_r$ ,  $5 \leq r \leq 8$ ) :



On peut contracter le "-1", ensuite le "-2", ensuite le "-3" en famille au-dessus de  $S$ . Il ne reste à l'infini qu'une courbe rationnelle  $C$ , ayant un cusp, et de self-intersection  $9-r$ . On a maintenant une famille

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \bar{W} \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

**Proposition 4** : Les fibres de  $\bar{W} \rightarrow S$  sont des surfaces de Del Pezzo anticanoniques de degré  $r$  et  $C$  est un diviseur anticanonique.

La démonstration (facile) est laissée en exercice au lecteur.

Soit  $S'$  l'ouvert de  $S$  où les fibres de  $X \rightarrow S$  (ou de  $\bar{W} \rightarrow S$ , ce qui revient au même) sont lisses. Pour  $s \in S'$  considérons l'ensemble des systèmes exceptionnels de longueur  $r$  ([38], II.6). C'est un ensemble principal homogène sous  $W_r$  ; d'autre part puisque chaque élément d'un système exceptionnel est une courbe exceptionnelle de première espèce, on voit que chaque système exceptionnel de longueur  $r$  est stable par de petites déformations. On peut donc représenter le groupe fondamental de  $S'$  dans les systèmes exceptionnels de longueur  $r$  ; prenons le revêtement associé de  $S'$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{W}_{S'} = \bar{W}_{S'} \times_{S'} \tilde{S}' & \longrightarrow & \bar{X}_{S'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{S}' & \longrightarrow & S' \end{array}$$

Nous allons maintenant construire un morphisme  $\tilde{S}' \rightarrow U^r$  tel que  $\tilde{W}_{S'}$  soit le pullback de  $Z$  (ou  $\bar{Z}$ , cela revient au même).

Nous pouvons choisir une famille continue de systèmes exceptionnels de longueur  $r$  ( $\xi_1(s), \dots, \xi_r(s)$ ),  $s \in \tilde{S}'$ . Par définition  $\xi_1(s)$  peut être représenté par une courbe rationnelle lisse  $D_1(s)$ , unique, de self-intersection  $-1$ . Par la formule du genre,  $C$  étant un diviseur anticanonique,  $D_1(s)$  intersecte  $C$

en un seul point  $u_1(s)$  qui appartient d'ailleurs à l'ouvert  $U$  des points lisse de  $C$ . Contractons  $D_1(s)$  :  $\xi_2(s)$  est représenté, dans la surface contractée, par un  $D_2(s)$  rationnel lisse de self-intersection  $-1$ . Soit  $u_2(s)$  l'unique point d'intersection de  $D_2(s)$  et  $C$  ; et ainsi de suite. On obtient le morphisme  $\tilde{S}' \rightarrow U^r$  désiré. Soit  $U'$  l'ouvert dans  $U^r$  des points en position générale ([38], III,2). Le morphisme  $U' \rightarrow S'$  est non ramifié, comme on a vu au § 3. On a donc le triangle de revêtements étales :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S}' & \longrightarrow & U' \\ & \searrow & \swarrow \\ & S' & \end{array}$$

Il est évident que tous ces espaces sont connexes. D'autre part l'ordre de  $U' \rightarrow S'$  est au moins  $|W_r|$  ; l'ordre de  $\tilde{S}' \rightarrow S'$  au plus  $|W_r|$  ; ils sont donc tous les deux d'ordre  $|W_r|$ , ce qui démontre le théorème.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier le théorème 2 du § 4 avec notre construction. Il est très instructif de réaliser explicitement les configurations par des éclatements. Remarquons que Du Val [12, III] a donné la liste complète de toutes les configurations de points doubles rationnels sur une surface de Del Pezzo plongée de degré arbitraire : pour cela il utilise un résultat sur les systèmes de racines démontré par Coxeter. Certaines de ces configurations ne peuvent pas être réalisées dans la déformation semi-universelle des  $W_r$  que nous considérons, mais nous les verrons apparaître dans la déformation semi-universelle de singularités simplement elliptiques : voir [48].

Remarque : L'idée de faire agir un groupe de Cremona fini sur le produit  $U^r$ , où  $U$  est l'ouvert des points lisses de n'importe quelle cubique plane irréductible  $C$ , se trouve déjà dans Coble [36] p. 370 ; voir aussi [37], p. 88. Bramble [33], dans le cas où  $C$  est cuspidale, accomplit l'exploit de calculer explicitement les invariants de  $E_7$  dans  $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_7]$ . En particulier il montre que les invariants forment un anneau de polynômes !

## 6. QUELQUES CALCULS COHOMOLOGIQUES.

Nous devons d'abord montrer que si  $\pi : Y_0 \rightarrow X_0$  est la résolution minimale d'un point double rationnel en caractéristique 0, alors

$$\varphi : H^1(Y_0, \oplus_{i=1}^r Y_0) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r H^1(E_i, N_{E_i}) \text{ est un isomorphisme (la flèche est définie$$



au § 3, prop. 3).

Voici une démonstration de ce résultat qui marche pour n'importe quelle singularité quotient, mais qui est malheureusement un peu indirecte. Nous avons déjà vu que  $\varphi$  est surjective (§ 3). Soit  $Y_1 \rightarrow \text{Sp}(k[\varepsilon])$  une déformation de  $Y_0$  correspondant à un élément de  $H^1(Y_0, \oplus_{Y_0})$  dans le noyau de  $\varphi$ . Tous les  $E_i$  se relèvent à  $Y_1$ . En utilisant la surjectivité de  $\varphi$  on voit qu'on peut relever  $Y_1 \rightarrow \text{Sp}(k[\varepsilon])$  à une déformation  $Y \rightarrow \text{Sp}(k[[t]])$  à laquelle les  $E_i$  se relèvent : à chaque étape relever  $Y_i$  d'abord arbitrairement (ce qui est possible puisque  $H^2(Y_0, \oplus_{Y_0})$  est nul) ;  $E_i$  ne se relève peut-être pas ; alors modifier le relèvement de  $Y_j$  par un élément de  $H^1(Y_0, \oplus_{Y_0})$  qui tue l'obstruction dans  $H^1(E_i, N_{E_i})$ . Une démonstration directe est donnée dans [42].

Par construction la fibre générique de  $Y \rightarrow \text{Sp}(k[[t]])$  a le même graphe dual que la fibre spéciale. Mais d'après Brieskorn [9] il y a une seule singularité avec ce graphe. La déformation  $Y \rightarrow \text{Sp}(k[[t]])$  est donc triviale, ce qui donne l'injectivité.

Montrons maintenant que si  $X_0$  est un point double rationnel,

$$H_E^1(\oplus_{Y_0}) \xrightarrow{\sim} H^1(Y_0, \oplus_{Y_0}) \quad .$$

Nous savons que cette flèche est injective ( $\pi_* \oplus_{Y_0}$  est de profondeur 2 : utiliser la suite spectrale de cohomologie locale). On sait par le résultat précédent que  $\dim H^1(Y_0, \oplus_{Y_0})$  est  $r$ , le nombre de composantes irréductibles du diviseur exceptionnel, il suffit donc de montrer que  $\dim H_E^1(\oplus_{Y_0}) \geq r$ , ce qui se fait très facilement.

Une façon détournée d'obtenir ce résultat est de remarquer (voir § 2) que  $H_E^1(\oplus_{Y_0})$  est le noyau de  $\beta : D_{Y_0} \rightarrow D_{X_0}$  sur les espaces tangents. Or le théorème principal du § 4 montre que  $\beta$  est 0 sur les espaces tangents, ce qui donne le résultat.

\*  
\*\*  
\*

## REFERENCES

Les références 1-31 sont celles de [50].

- [32] Artin, M. , Algebraization of formal moduli, I. Global Analysis, Tokyo, 1969 (Kodaira volume), 21-71.
- [33] Bramble, C. C., A collineation group isomorphic to the group of double tangents to the plane quartic, Amer. J. Math. 40, 351-365 (1918).
- [34] Brieskorn, E. , Singular elements of semi-simple algebraic groups, Proc. Internat. Congress Math. (Nice 1970), vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1971, 279-284.
- [35] Burns, D., Rapoport, M., On the Torelli problem for Kählerian K-3 surfaces, Ann. Sci. E.N.S. 8, 235-274 (1975).
- [36] Coble, A.B., Point sets and allied Cremona groups, I, II, III, Trans. A.M.S. 16, 155-198 (1915) ; 17, 345-385 (1916) ; 18, 331-372 (1917).
- [37] Coble, A.B., Planar Cremona Transformations, in : Selected topics in algebraic Geometry, National Research Council, Washington, 1928, p. 79-121.
- [38] Demazure, M., Surfaces de Del Pezzo II, III, IV, V. Séminaire sur les singularités des surfaces, Ecole Polytechnique, 1976-1977.
- [39] Du Val, P., On the directrices of a set of points in a plane, Proc. London Math. Soc. (2) 35, 23-74 (1933).
- [40] Du Val, P., On the Kantor group of a set of points in a plane, Proc. London Math. Soc. (2), 42, 18-51 (1936).
- [41] Godeaux, M., Les transformations birationnelles du plan (2ème édition), Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [42] Huikeshoven, F., On the versal resolutions of deformations of rational double points, Inv. Math. 20, 15-33 (1973).
- [43] Kantor, S., Theorie der endlichen Gruppen von eigendeutigen Transformationen in der Ebene, Berlin, 1895.
- [44] Lichtenbaum, S., Schlessinger, M., The cotangent complex of a morphism, Trans. A.M.S. 128, 41-70 (1967).
- [45] Lipman, J., Double point resolutions of deformations of rational singularities, à paraître.
- [46] Nøther, M., Über eine Classe von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelsebenen, Math. Ann. 33, 525-545 (1889).
- [47] Pinkham, H., Deformations of algebraic varieties with  $\mathbb{G}_m$  action, Astérisque 20, Soc. Math. France (1974).

- [48] Pinkham, H., Simple elliptic singularities, Del Pezzo surfaces and Cremona transformations, Proc. Symposia Pure Math. 30, I, 69-71 (1977).
- [49] Pinkham, H., Deformations of normal surface singularities with  $\mathbb{C}^*$  action, à paraître dans Math. Annalen.
- [50] Pinkham, H., Singularités rationnelles de surfaces, Séminaire sur les singularités des surfaces, Ecole Polytechnique, 1976-1977.
- [51] Riemenschneider, O., Deformationen von Quotientensingularitäten, Math. Ann. 209, 211-248 (1974).
- [52] Schlessinger, M., Functors of Artin rings, Trans. A.M.S. 130, 208-222 (1968).
- [53] Slodowy, P., Article sur la construction de Brieskorn-Grothendieck, à paraître.
- [54] B. Teissier, Résolution simultanée, I, II, Séminaire sur les singularités des surfaces, Ecole Polytechnique 1976-1977.
- [55] Tjurina, G. N., Resolution of singularities for flat deformations of rational double points, Funk. Anal. i Pril. 4, 77-83 (1970).
- [56] Wahl, J., Equisingular deformations of normal surface singularities, I, Ann. Math. 104, 325-356 (1976).
- [57] Wahl, J., Simultaneous resolution of rational singularities, à paraître.

-----