

SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

P. CARTIER

Compléments à la cohomologie

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 5 bis, p. 8-10

http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A8_0

© Séminaire "Sophus Lie"

(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 5 BisCOMPLÉMENTS A LA COHOMOLOGIE.

Nous allons donner une autre démonstration de l'interprétation du 2^e groupe de cohomologie d'une algèbre de Lie qui n'utilise pas la forme explicite des cochaînes.

$U(\mathcal{O})$ désigne comme toujours l'algèbre enveloppante de $\mathcal{O}$, $U'(\mathcal{O})$ l'idéal formé des éléments sans terme constant de $U(\mathcal{O})$, et K_0 le corps K considéré comme $\mathcal{O}$ -module trivial, les opérateurs de $\mathcal{O}$ dans K_0 étant nuls. Munissons $U(\mathcal{O})$ de la représentation régulière gauche, à $x \in \mathcal{O}$ correspondant ainsi l'opérateur $u \rightarrow xu$ de $U(\mathcal{O})$; $\mathcal{E}$ étant l'augmentation de $U(\mathcal{O})$ on a alors la suite exacte suivante de $\mathcal{O}$ -modules :

$$(S) \quad (0) \rightarrow U'(\mathcal{O}) \rightarrow U(\mathcal{O}) \xrightarrow{\mathcal{E}} K_0 \rightarrow (0)$$

d'où M étant un $\mathcal{O}$ -module quelconque, la suite exacte :

$$(S') \quad (0) \rightarrow \mathcal{L}(K_0, M) \simeq M \rightarrow \mathcal{L}(U(\mathcal{O}), M) \rightarrow \mathcal{L}(U'(\mathcal{O}), M) \rightarrow (0)$$

D'après le lemme 2 et la proposition 1 de l'exposé 4, les groupes de cohomologie de $\mathcal{O}$ dans le module $\mathcal{L}(U(\mathcal{O}), M)$ sont nuls à l'exception du groupe de dimension 0. Si l'on applique la suite exacte de cohomologie à la suite exacte (S') et qu'on tienne compte de ce résultat, on en déduit un homomorphisme canonique de $H^2(\mathcal{O}, M)$ sur $H^1(\mathcal{O}, \mathcal{L}(U'(\mathcal{O}), M))$ et d'après le théorème 1 de l'exposé 4, on établit une correspondance biunivoque entre les éléments de $H^2(\mathcal{O}, M)$ et les extensions de $U'(\mathcal{O})$ par M .

Soit donc un $\mathcal{O}$ -module V extension de $U'(\mathcal{O})$ par M et π la projection de V sur $U'(\mathcal{O})$; $U'(\mathcal{O})$ est évidemment une algèbre (sans unité) et un $\mathcal{O}$ -module est aussi un $U'(\mathcal{O})$ -module : on notera $u.v$ le transformé de $v \in V$ par $u \in U'(\mathcal{O})$. On va alors définir une multiplication sur V par la formule $v_1 * v_2 = \pi(v_1).v_2$; comme $\pi(v_1) \in U'(\mathcal{O})$ et que π est un $\mathcal{O}$ -homomorphisme, on a $\pi(v_1 * v_2) = \pi(\pi(v_1).v_2) = \pi(v_1) \pi(v_2)$ donc π est un homomorphisme d'algèbre de V dans $U'(\mathcal{O})$, et de plus la multiplication dans V est associative car $v_1 * (v_2 * v_3) = \pi(v_1) \pi(v_2).v_3 = \pi(v_1 * v_2).v_3 = (v_1 * v_2) * v_3$. Enfin il est clair sur la définition que $m * v = 0$ si $m \in M$.

Soit $\mathfrak{h} \subset V$ l'image réciproque dans V de $\mathcal{U} \subset U'(\mathcal{U})$; comme $\mathcal{U}$ est fermé pour l'opération $[a,b] = ab - ba$, il en est de même de $\mathfrak{h}$ qui devient une algèbre de Lie pour cette opération. Π est un homomorphisme de V dans $U'(\mathcal{U})$ et sa restriction Π' à $\mathfrak{h}$ sera donc un homomorphisme d'algèbre de Lie ; le noyau de Π' est évidemment M et on a défini une extension $\mathfrak{h}$ de $\mathcal{U}$ par M . Enfin si $m \in M$ et $h \in \mathfrak{h}$, on a $[h,m] = -m \star h + h \star m = \Pi'(h).m$ ce qui prouve que M est un idéal abélien de $\mathfrak{h}$ et que la représentation adjointe induit dans M la structure de $\mathcal{U}$ -module donné.

Donc à toute 2-classe de cohomologie, on a fait correspondre une algèbre de Lie extension de $\mathcal{U}$ par l'idéal abélien M , la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ induisant la structure de $\mathcal{U}$ -module donnée dans M .

Nous allons maintenant démontrer qu'on obtient ainsi toute extension de $\mathcal{U}$ par M une fois et une seule (à une équivalence près). Pour cela remarquons que V est une algèbre associative sans unité contenant $\mathfrak{h}$, donc que l'injection de $\mathfrak{h}$ dans V se prolonge en un homomorphisme bien défini de $U'(\mathfrak{h})$ dans V ; la formule $m \star v = 0$ montre que cet homomorphisme s'annule sur $MU'(\mathfrak{h})$ qui est évidemment un idéal à droite de $U'(\mathfrak{h})$ mais qui est aussi un idéal à gauche car M est un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ (cf. exp. 1 et 8). Comme $U'(\mathcal{U})$ est engendrée comme algèbre par $\mathcal{U}$, V est engendrée par $\mathfrak{h}$, ce qui montre que nous avons défini un homomorphisme de l'algèbre $U'(\mathfrak{h})/MU'(\mathfrak{h}) = E(\mathfrak{h})$ sur V . D'autre part la représentation régulière gauche de $\mathfrak{h}$ dans $U'(\mathfrak{h})$ définit $U'(\mathfrak{h})$ comme $\mathfrak{h}$ -module donc $E(\mathfrak{h})$ comme $\mathfrak{h}/M$ -module , i.e. comme $\mathcal{U}$ -module ; en vertu de la formule $h \star v = \Pi(h).v$, l'application de $E(\mathfrak{h})$ dans V est un $\mathcal{U}$ -homomorphisme ; il en est de même de l'application de $E(\mathfrak{h})$ sur $U'(\mathcal{U})$ déduite de l'homomorphisme canonique de $U'(\mathfrak{h})$ dans $U'(\mathcal{U})$ par passage au quotient mod. $MU'(\mathfrak{h})$ car les homomorphismes en question sont des homomorphismes d'algèbre et on a affaire aux représentations régulières. Enfin l'application identique de M dans $\mathfrak{h}$ se prolonge en une application de M dans $U'(\mathfrak{h})$ puis en une application de M dans $E(\mathfrak{h})$ qui est un $\mathcal{U}$ -homomorphisme car $\Pi(h).m = [h,m] = hm - mh = hm \text{ mod } MU'(\mathfrak{h})$.

Autrement dit on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & E(\mathfrak{h}) & \\ M \swarrow & \downarrow & \searrow \\ & V & \end{array} \rightarrow U'(\mathcal{U})$$

qui démontre que l'extension de $U'(\mathcal{U})$ par M est bien définie par $\mathfrak{h}$

puisque'elle est équivalente à l'extension $E(\mathfrak{h})$.

Partons maintenant d'une extension $\mathfrak{h}$ de $\mathcal{O}$ par M . On peut construire $E(\mathfrak{h}) = U'(\mathfrak{h})/MU'(\mathfrak{h})$, le munir d'une structure de $\mathcal{O}$ -module et définir des homomorphismes de $\mathcal{O}$ -modules de M dans $E(\mathfrak{h})$ et de $E(\mathfrak{h})$ sur $U'(\mathcal{O})$ respectivement en procédant comme plus haut. Reste à voir que la suite :

$$(S'') \quad (0) \longrightarrow M \longrightarrow E(\mathfrak{h}) \longrightarrow U'(\mathcal{O}) \longrightarrow (0)$$

est exacte ou encore puisque d'après l'exposé 1, $U'(\mathcal{O})$ est isomorphe à $U'(\mathfrak{h})/MU(\mathfrak{h})$ et $MU(\mathfrak{h}) = M + MU'(\mathfrak{h})$ que l'intersection de M et de $MU'(\mathfrak{h})$ est réduite à (0) . C'est ce qui va résulter du théorème de Birkhoff-Witt :

Soit $m_1, m_2, \dots, m_r, n_1, \dots, n_s$ une base de $\mathfrak{h}$, les m_i formant une base de M . D'après le théorème de Birkhoff-Witt les monômes $M(\alpha, \beta) = m_1^{\alpha_1} \dots m_r^{\alpha_r} n_1^{\beta_1} \dots n_s^{\beta_s}$ forment une base de $U(\mathfrak{h})$ pour tous les systèmes $\alpha = (\alpha_i), \beta = (\beta_j)$. $U'(\mathfrak{h})$ a pour base les $M(\alpha, \beta)$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$; par ailleurs M est une algèbre abélienne, donc si $\varepsilon_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ (un seul 1 à la i -ième place), on a $m_i M(\alpha, \beta) = m_1^{\alpha_1} \dots m_i^{\alpha_i+1} \dots m_r^{\alpha_r} n_1^{\beta_1} \dots n_s^{\beta_s} = M(\alpha + \varepsilon_i, \beta)$ et il en résulte que $MU'(\mathfrak{h})$ a pour base les $M(\alpha, \beta)$ avec $\alpha \neq 0$ et de plus $\alpha \neq \varepsilon_i$ si $\beta = 0$. Comme M a pour base les $M(\varepsilon_i, 0)$, il est bien clair que M et $MU'(\mathfrak{h})$ ont une intersection réduite à (0) .

On a donc retrouvé la correspondance entre les éléments de $H^2(\mathcal{O}, M)$ et les classes d'extension équivalentes de $\mathcal{O}$ par M .

N.B. Rien n'affirme a priori que la correspondance qu'on vient d'établir soit la même que celle qui est établie dans l'exposé 5, ce qui est pourtant exact au signe près.