

SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

P. CARTIER

Cohomologie des algèbres de Lie, III

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 5, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A7_0

© Séminaire "Sophus Lie"

(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

7 décembre 1954.

Exposé n° 5

COHOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE LIE, III

(Exposé par P. CARTIER)

1.- Interprétation de $H^2(\mathcal{O}_f, M)$

La définition d'une extension d'algèbre de Lie se fait comme dans le cas des modules. Une extension $\mathfrak{g}$ de $\mathcal{O}_f$ par $\mathfrak{m}$ est définie par une suite exacte d'algèbres de Lie :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \xrightarrow{i} \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_f \longrightarrow 0$$

Si on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathfrak{g} & & \\ & i \nearrow & & \searrow \pi & \\ \mathfrak{m} & & & & \mathcal{O}_f \\ & i' \searrow & & \nearrow \pi' & \\ & & \mathfrak{g}' & & \end{array}$$

$\downarrow k$

on dit que $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ sont des extensions équivalentes.

On va d'abord s'intéresser au cas où $\mathfrak{m}$ est abélien ; une extension $\mathfrak{g}$ définit alors $\mathfrak{m}$ comme $\mathcal{O}_f$ -module de la façon suivante : $\mathfrak{m}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ donc est stable pour la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ d'où une représentation linéaire θ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{m}$. Mais si $m, m' \in \mathfrak{m}$

$$\theta(m)m' = [m, m'] = 0$$

donc $\theta(m) = 0$, θ s'annule sur $\mathfrak{m}$ et définit donc par passage au quotient une représentation linéaire de $\mathcal{O}_f$. On a $\theta(x)m = [y, m]$ quel que soit $y \in \mathfrak{g}$ avec $\pi(y) = x$.

On va établir une correspondance entre $H^2(\mathcal{O}_f, \mathfrak{m})$ et les extensions de $\mathcal{O}_f$ par $\mathfrak{m}$ définissant la structure de $\mathcal{O}_f$ -modules donnée sur $\mathfrak{m}$.

Pour cela soit ℓ une application linéaire de $\mathcal{O}_f$ dans $\mathfrak{g}$ telle que $\pi \circ \ell = 1$. π étant un homomorphisme annule les éléments $[\ell(x), \ell(y)] - \ell([x, y])$ qui sont donc dans $\mathfrak{m}$. Par suite on peut poser

$$[\ell(x), \ell(y)] - \ell([x, y]) = f(x, y) \in \mathfrak{m}$$

Il est clair que $f(x, x) = 0$ donc $f \in C^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{m})$.

Cette 2-cochaîne définit la loi de composition dans l'extension $\mathfrak{H}$:

En effet on peut, ℓ étant choisie, identifier comme espaces vectoriels $\mathfrak{m} \times \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{H}$ par $(m, x) \rightarrow m + \ell(x)$ et le crochet s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} [m + \ell(x), n + \ell(y)] &= [\ell(x), n] + [m, \ell(y)] + [\ell(x), \ell(y)] \\ &= \theta(x)n - \theta(y)m + \ell([x, y]) + f(x, y) \end{aligned}$$

d'où par transport à $\mathfrak{m} \times \mathfrak{A}$

$$(1) \quad [(m, x), (n, y)] = (\theta(x)n - \theta(y)m + f(x, y), [x, y])$$

C.Q.G.D.

Les deux axiomes des algèbres de Lie donnent des conditions sur la cochaîne f

$$(2) \quad [(m, x), (m, x)] = (f(x, x), 0)$$

$$\begin{aligned} [[(m, x), (n, y)], (p, z)] &= [(\theta(x)n - \theta(y)m + f(x, y), [x, y]), (p, z)] \\ &= (\theta([x, y])p - \theta(z)\theta(x)n + \theta(z)\theta(y)m + \theta(z)f(x, y) + \\ &\quad + f([x, y], z), [[x, y], z]) \end{aligned}$$

Si l'on fait la somme $\sum$ des 3 expressions obtenues par permutation circulaire, on trouve 0 comme 2ème composante d'après l'identité de Jacobi dans $\mathfrak{A}$. La 1ère composante fournit :

$$\sum_3 \theta(z)f(x, y) + f([x, y], z) = df(x, y, z)$$

à quoi il faut ajouter les termes en m, n, p , soit

$$\theta([yz])m - \theta(y)\theta(z)m + \theta(z)\theta(y)m = 0$$

et les termes semblables. Finalement

$$(3) \quad \sum = (df(x, y, z), 0)$$

(2) exprime que f est une cochaîne et $\sum = 0$ que f est un cocycle.

Réciproquement un 2-cocycle de f définit sur $\mathcal{M} \times \mathcal{C}$ une structure d'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ par la formule (1). On définit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{i} \mathcal{L} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

par $i(m) = (m, 0)$ $\pi(m, x) = x$. i est un homomorphisme parce que $[(m, 0), (n, 0)] = 0$ et il est clair sur (1) que π est un homomorphisme. Il existe une section particulière $\ell(x) = (0, x)$ et

$$\begin{aligned} [\ell(x), \ell(y)] - \ell([xy]) &= [(0, x), (0, y)] - (0, [x, y]) \\ &= (f(x, y), 0) \end{aligned}$$

donc f est un des cocycles définis par l'extension.

Le cocycle f dépend de l'extension et de la section ℓ choisie. Soit ℓ' une autre section $\pi \circ \ell = \pi \circ \ell'$ donc $\ell'(x) - \ell(x) = g(x) \in \mathcal{M}$. $g \in C^1(\mathcal{C}, \mathcal{M})$. On va calculer le cocycle attaché à ℓ'

$$\begin{aligned} f'(x, y) &= [\ell'(x), \ell'(y)] - \ell'([x, y]) \\ &= [\ell(x) + g(x), \ell(y) + g(y)] - \ell([x, y]) - g([x, y]) \\ &= f(x, y) + \theta(x)g(y) - \theta(y)g(x) - g([xy]) \end{aligned}$$

donc $f' = f + \delta g$. La classe de cohomologie de f est bien définie par l'extension seule.

Une extension ^{est} inessentielle s'il existe une sous-algèbre $\mathcal{U}$ de $\mathcal{L}$ telle que $\mathcal{L}$ soit somme directe de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{M}$; elle est triviale si $\mathcal{U}$ est un idéal. L'extension est inessentielle dans le cas et celui là seulement où existe une section $\ell: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}$ qui soit un homomorphisme. Alors $f(x, y) = [\ell(x), \ell(y)] - \ell([x, y]) = 0$ donc la classe de cohomologie de f est nulle. Réciproquement si la classe de l'extension est nulle, dans cette classe existe le cocycle nul, donc une section ℓ qui est un homomorphisme et l'extension est inessentielle.

Théorème 1. Une extension $\mathcal{L}$ de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{M}$ abélien définit une 2-classe de cohomologie qui définit l'extension à une équivalence près. Toute 2-classe est attachée à une extension. Cette extension est inessentielle si et seulement si sa classe est nulle.

Corollaire : Si $H^1(\mathcal{C}, \mathcal{M}) = H^2(\mathcal{C}, \mathcal{M}) = 0$ pour tout $\mathcal{C}$ -module simple $\mathcal{M}$ non annulé par $\mathcal{C}$ et si $\mathcal{C} = [\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ alors toute extension de $\mathcal{C}$ à nouveau abélien est inessentielle.

En effet, calculons $H^1(\mathcal{O}_f, K_0)$ K_0 étant le module trivial. Si $f \in K_0$ $\delta f(x) = \theta(x)f = 0$ donc $B^1(\mathcal{O}_f, K_0)$ est nul ; si $f \in C^1(\mathcal{O}_f, K_0)$ $\delta f(x, y) = -f([x, y])$. Si, donc $\delta f = 0$ f est nulle sur $[\mathcal{O}_f, \mathcal{O}_f] = \mathcal{O}_f$ donc $f = 0$; par suite $H^1(\mathcal{O}_f, K_0) = 0$. Le théorème 2 de l'exposé précédent montre alors que toute représentation de $\mathcal{O}_f$ est complètement réductible.

Calculons alors $H^2(\mathcal{O}_f, K_0)$. Soit f une 2-classe de cohomologie et $\mathfrak{h}$ l'extension qui lui correspond. Les opérateurs sur K_0 étant nuls, K_0 est le centre de $\mathfrak{h}$ donc la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{h}$ est nulle sur l'idéal K_0 et en définit une représentation de $\mathcal{O}_f = \mathfrak{h}/K_0$ dans $\mathfrak{h}$. Il existe alors puisque toute représentation de $\mathcal{O}_f$ est complètement réductible, un sous espace $\mathcal{U}$ invariant par $\mathcal{O}_f$ c'est-à-dire un idéal, supplémentaire de K_0 dans $\mathfrak{h}$. L'extension est triviale donc $f = 0$ et $H^2(\mathcal{O}_f, K_0) = 0$. Une récurrence utilisant la suite exacte de cohomologie analogue à celle utilisée au théorème 2 de l'exposé 4 montre que $H^2(\mathcal{O}_f, M) = 0$ pour tout $\mathcal{O}_f$ -module M de dimension finie. Alors le théorème 1 montre que toute extension à noyau abélien est inessentielle.

C.Q.F.D.

Avant de quitter les extensions à noyau abélien cherchons dans le cas d'une extension inessentielle les différentes sous-algèbres supplémentaires de $\mathcal{M}$. Soient deux sections multiplicatives ℓ et ℓ' , $\ell' - \ell = g$. Les cocycles définis par f et f' sont nuls et on a vu que $f' - f = \delta g$ donc $\delta g = 0$. Si $H^1(\mathcal{O}_f, \mathcal{M}) = 0$ g est un cobord, il y a donc $m \in \mathcal{M}$ tel que

$$\ell'(x) - \ell(x) = -\theta(x).m = [m, \ell(x)]$$

d'où $\ell'(x) = \ell(x) + [m, \ell(x)] = e^{\text{ad } m} \ell(x)$

car si $y \in \mathfrak{h}$ $[m, y] \in \mathcal{M}$ $(\text{ad } m)^2(y) = [m, [my]] = 0$
donc $(\text{ad } m)^2 = 0$ et $e^{\text{ad } m} = 1 + \text{ad } m$.

2. Le théorème de Levi-Malcev.

Nous faisons sur $\mathcal{O}_f$ les hypothèses du corollaire du théorème 1 et nous allons étudier les extensions de $\mathcal{O}_f$ par $\mathcal{M}$ résoluble.

Lemme 1 : Soit $\mathcal{R}$ un idéal caractéristique de $\mathcal{M}$. On suppose que toute extension par $\mathcal{R}$ et par $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ soit inessentielle. Alors toute extension par $\mathcal{M}$ est inessentielle.

Soit $\mathfrak{h}$ une extension de $\mathcal{O}_f$ par $\mathcal{M}$. Si $x \in \mathfrak{h}$ $\text{ad } x$ induit une déri-

vation de $\mathcal{M}$ qui conserve $\mathcal{R}$ donc $\mathcal{R}$ est un idéal dans $\mathcal{L}$. On a alors les deux suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\pi} \mathcal{L}/\mathcal{R} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{R} \xrightarrow{\pi'} \mathcal{L}/\mathcal{R} \xrightarrow{\pi'} \mathcal{L}/\mathcal{M} = \mathcal{C}' \rightarrow 0$$

Par hypothèse il existe un homomorphisme ℓ de $\mathcal{L}/\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{L}$ tel que $\pi \circ \ell = 1$. De même $\ell' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{L}/\mathcal{R}$ $\pi' \circ \ell' = 1$. Alors $\ell \circ \ell'$ est un homomorphisme de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{L}$ et $\pi' \circ \pi$ est la projection de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{C}'$. On a donc $(\pi' \circ \pi) \circ (\ell \circ \ell') = \pi' \circ \ell' = 1$. Donc $\mathcal{L}$ est une extension inessentielle

Corollaire: si $\mathcal{M}$ est résoluble, toute extension de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{M}$ est inessentielle.

On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathcal{M}$. Puisque $\mathcal{M}$ est résoluble $\dim [\mathcal{M}, \mathcal{M}] < \dim \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}/[\mathcal{M}, \mathcal{M}]$ est abélienne. Le théorème étant démontré pour les extensions abéliennes, la récurrence se fera à l'aide du lemme 1.

Lemme 2 : Soit $\mathcal{M}$ un idéal résoluble de $\mathcal{L}$ $\mathcal{M} = [\mathcal{L}, \mathcal{M}]$ et (θ, v) une représentation linéaire de $\mathcal{L}$. Si $n \in \mathcal{M}$, $\theta(n)$ est dans le radical de l'algèbre associative engendrée par $\theta(\mathcal{L})$ donc est nilpotent.

En étendant le corps de base, on peut supposer K algébriquement clos.

Soit (θ, V) une représentation linéaire de $\mathcal{L}$ et $(0) = V_n \subset V_{n-1} \dots \subset \dots \subset V_1 \subset V_0 = V$ une suite de sous-espaces invariants par $\theta(\mathcal{M})$ et tels que

$\theta(m)v \equiv h_i(m)v \pmod{V_{i+1}}$ si $v \in V_i$ (ceci d'après le théorème de Lie)

On a $\theta(m)^k v \equiv h_i^k(m)v$ donc si $\theta(m)$ est nilpotent $h_i(m) = 0$. Réciproquement si $h_i(m) = 0$, $\theta(m)V_i \subset V_{i+1}$ et $\theta(m)^n = 0$. Donc l'ensemble des $m \in \mathcal{M}$ tels que $\theta(m)$ soit nilpotent forment un sous-espace de $\mathcal{M}$ et même un idéal puisqu'il contient $[\mathcal{M}, \mathcal{M}]$. Soit alors $x \in \mathcal{L}$, $m \in \mathcal{M}$. L'algèbre de Lie $\mathcal{M}'$ engendrée par m et x est résoluble et $[x, m] \in [\mathcal{M}', \mathcal{M}']$. D'après le théorème de Lie $\theta([x, m])$ est nilpotent et il en est de même d'après ce qu'on a vu de toute combinaison linéaire de tels éléments donc $\theta(n)$ est nilpotent si $n \in \mathcal{M}$.

Soit U l'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{h}$ et (ψ, W) une représentation linéaire irréductible de $\Theta(U)$. Elle définit de manière évidente une représentation linéaire irréductible de U i.e. de $\mathfrak{g}$ dans W . Restreinte à $\mathfrak{w}$ cette représentation est nilpotente et le théorème d'Engel prouve l'existence d'un $w \neq 0$ dans W annulé par $\mathfrak{w}$. Comme $\mathfrak{w}$ est un idéal de $\mathfrak{h}$ l'ensemble des w annulés par $\mathfrak{w}$ est stable pour $\mathfrak{h}$ et comme la représentation est irréductible, tout w est annulé par $\mathfrak{w}$. Donc $\Theta(\mathfrak{w})$ est contenu dans le radical de $\Theta(U)$.

C.Q.F.D.

Lemme 3 : Si D est une dérivation nilpotente d'une algèbre non nécessairement associative A , $\exp D = S$ est un automorphisme de A .

$$\begin{aligned} S(xy) &= \sum \frac{1}{k!} D^k(xy) = \sum \frac{1}{k!} \sum \frac{k!}{k-m!m!} D^m x D^{k-m} y \\ &= \sum \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} D^p x D^q y = Sx \cdot Sy \text{ d'après la formule de Leibniz} \end{aligned}$$

toutes les sommes étant en réalité finies.

Définition : on pose $\sigma(x) = \exp \operatorname{adx}$ pour $x \in \mathfrak{w}$. Les automorphismes du groupe engendré par $\sigma(x)$ sont dits spéciaux.

Ceci dit revenons au cas de l'extension $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{m}$ résoluble. Elle est inessentielle. Soient deux sections multiplicatives ℓ_1 et ℓ_2 de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$. On pose $\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} / [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$, $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} / [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$. $\bar{\mathfrak{m}}$ est abélien et $\bar{\mathfrak{h}} / \bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{h} / \mathfrak{m} = \mathfrak{g}$. π' est la projection de $\mathfrak{h}$ sur $\bar{\mathfrak{h}}$. $\pi' \circ \ell_1 = k$ est une section de $\mathfrak{g}$ dans $\bar{\mathfrak{h}}$ et $\bar{\mathfrak{m}}$ est abélien donc il existe un automorphisme spécial de $\bar{\mathfrak{h}}$ soit σ avec $k_1 = \sigma \circ k_2$. Comme $\pi'([\mathfrak{h}, \mathfrak{m}]) = [\bar{\mathfrak{h}}, \bar{\mathfrak{m}}]$, il existe un automorphisme spécial de $\mathfrak{h}$ soit σ' avec $\pi' \circ \sigma' = \sigma \circ \pi'$.

Alors $\pi' \circ \ell_1 = k_1 = \sigma \circ k_2 = \sigma \circ \pi' \circ \ell_2 = \pi' \circ \sigma' \circ \ell_2 = \pi' \circ \ell'_2$ par suite $\pi' \circ \ell_1 = \pi' \circ \ell'_2$, $\ell_1 - \ell'_2$ applique $\mathfrak{g}$ dans $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ et $\ell_1(\mathfrak{g}) + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = \ell'_2(\mathfrak{g}) + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{h}'$. $\mathfrak{h}'$ est une extension de $\mathfrak{g}$ par $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$. En appliquant un raisonnement par récurrence il existe un automorphisme spécial de $\mathfrak{h}'$ soit σ'' avec

$$\ell_1 = \sigma'' \circ \ell'_2 = \sigma'' \circ \sigma' \circ \ell_2$$

Comme $[\mathfrak{h}', [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}]$ σ'' est un automorphisme spécial de $\mathfrak{h}$ et ℓ_1 se déduit de ℓ_2 par $\sigma'' \circ \sigma'$.

Théorème 2 (Levi-Malcev) : Si $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{M}) = H^2(\mathfrak{U}, \mathfrak{M}) = 0$ pour tout module simple non annulé par $\mathfrak{U}$ et si $\mathfrak{U} = [\mathfrak{U}, \mathfrak{U}]$, toute extension de $\mathfrak{U}$ à noyau résoluble est inessentielle. Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux sections multiplicatives de $\mathfrak{U}$ dans $\mathfrak{h}$, il existe un automorphisme spécial σ de $\mathfrak{h}$ avec $\ell_1 = \sigma \ell_2$

On verra que les algèbres semi-simples vérifient les hypothèses de ce théorème.
