

SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

P. CARTIER

Cohomologie des algèbres de Lie, II. Interprétation des groupes de cohomologie

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 4, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A6_0

© Séminaire "Sophus Lie"

(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 4

COHOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE LIE, II.

INTERPRÉTATION DES GROUPES DE COHOMOLOGIE.

(Exposé de P. Cartier du 30.11.1954)

1.- Opérations sur les représentations linéaires - Opérateur de Casimir.

Rappelons comment, étant données plusieurs représentations linéaires d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$, on peut en construire d'autres grâce au lemme suivant :

Lemme 1. Soit M un K -module, θ_i ($1 \leq i \leq n$) n représentations linéaires de $\mathcal{G}$ dans M telles que $\theta_i(\mathcal{G})$ commute avec $\theta_j(\mathcal{G})$ pour $i \neq j$, alors $x \rightarrow \theta(x) = \sum_{i=1}^n \theta_i(x)$ est une représentation linéaire de $\mathcal{G}$ dans M .

Il est évident que $\theta(x)$ est linéaire. Il reste donc à vérifier que θ respecte le crochet $[\theta(x), \theta(y)] = \sum_{i,j} [\theta_i(x), \theta_j(y)] = \sum_i [\theta_i(x), \theta_i(y)]$ puisque les termes correspondants à $i \neq j$ sont nuls d'après l'hypothèse de commutativité.

Mais θ_i étant une représentation $[\theta_i(x), \theta_i(y)] = \theta_i([x, y])$ et finalement $[\theta(x), \theta(y)] = \sum_i \theta_i([x, y]) = \theta([x, y])$, ce qui démontre le lemme.

Appliquons ceci au cas où l'on s'est donné n représentations linéaires de $\mathcal{G}$:
 $(\theta_i, M_i) \quad 1 \leq i \leq n$ pour construire une représentation linéaire de $\mathcal{G}$:
 $(\theta, M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_n)$

A cet effet, considérons que θ_i agit sur le i^{e} facteur de $M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_n$ et laisse les autres fixes, soit

$$\theta_i(x) \left(\bigotimes_k m_k \right) = \bigotimes_k n_k \quad \text{avec} \quad n_k = m_k \quad \text{pour} \quad k \neq i \quad \text{et} \quad n_i = \theta_i(x)(m_i)$$

Il est bien évident que $\theta_i(x) \theta_j(y) = \theta_j(y) \theta_i(x)$, ce qui permet d'appliquer le lemme au K -module $\bigotimes_k M_k$ et qu'on définit par $\theta(x) = \sum_i \theta_i(x)$ une représentation linéaire de $\mathcal{G}$ dans $\bigotimes_k M_k$.

En explicitant on trouve

$$\theta(x) (m_1 \otimes m_2 \dots \otimes m_n) = \sum_{i=1}^n m_1 \dots \otimes \theta_i(x) m_i \dots \otimes m_n$$

ce qui correspond à la formule usuelle de dérivation d'un produit.

Une autre construction est possible si l'on se donne deux représentations linéaires (θ, M) , (θ', M') en considérant le K -module $V = \mathcal{L}(M; M')$ des applications K -linéaires de M dans M' . On définit deux représentations linéaires de $\mathcal{G}$ dans V en posant

$$\psi(x).f = -f \circ \theta(x)$$

$$\psi'(x).f = \theta'(x) \circ f$$

on a $\psi(x) \psi'(y).f = -\theta'(y) \circ f \circ \theta(x) = \psi'(y) \psi(x).f$ ce qui permet d'appliquer le lemme 1 et de poser $\rho(x).f = \theta'(x) \circ f - f \circ \theta(x)$ où $\rho(x)$ est une représentation linéaire de $\mathcal{G}$ dans V .

On ramène le cas des modules d'applications multilinéaires à celui des modules d'applications linéaires grâce au produit tensoriel et l'on a donc la formule

$$(\rho(x)f)(m_1, m_2, \dots, m_n) = \theta(x)[f(m_1 \dots m_n)] - \sum_{i=1}^n f(m_1, \dots, \theta_i(x) m_i \dots)$$

La représentation triviale (ou unité) s'effectue dans le K -module K , les opérateurs $\theta(x)$ étant nuls. La représentation de $\mathcal{G}$ construite dans $\mathcal{L}(M; K) \simeq M^*$ est la duale de (θ, M) : elle est donnée par

$$\theta^*(x) = -{}^t \theta(x)$$

On peut aussi considérer le cas du module $\mathcal{L}(M_1, M_2; K)$ et définir une représentation de $\mathcal{G}$ dans l'espace des formes bilinéaires sur $M_1 \times M_2$.

Il reste à effectuer certaines identifications canoniques :

1) l'isomorphisme canonique φ de $\bigotimes_k M_k$ sur $\bigotimes_k M_{\sigma(k)}$ (σ est une permutation) est un isomorphisme de $\mathcal{G}$ -modules car si $\theta'(x)$ désigne la représentation de $\mathcal{G}$ dans le deuxième module, on a

$$\theta'(x) = \sum_k \theta'_{\sigma(k)}(x) \quad \theta(x) = \sum_k \theta_k(x) \quad . \text{ Mais il est clair que}$$

$$\varphi \circ \theta_k(x) = \theta'_{\sigma(k)}(x) \circ \varphi$$

$$\varphi \circ \theta(x) = \theta'(x) \circ \varphi$$

2) Soit $K = \bigcup_{m \in M} K_m$ une partition de K et $N_m = \bigotimes_{k \in K_m} M_k$. On a un isomor-

phisme φ de K -modules de $\bigotimes_k M_k$ sur $\bigotimes_m N_m$. C'est un isomorphisme de $\mathcal{O}$ -modules car si ψ_m est la représentation de $\mathcal{O}$ dans N_m on a

$$\psi_m(x) = \sum_{k \in K_m} \psi_{m,k}(x)$$

et la représentation ψ' de $\mathcal{O}$ dans $\bigotimes_m N_m$ est donnée par $\sum_m \psi'_m(x)$

$$\psi'_m(x) = \sum_k \psi'_{m,k}(x) \quad \text{donc} \quad \psi'(x) = \sum_{m,k} \psi'_{m,k}(x) \quad . \quad \text{Mais}$$

$$\varphi \circ \theta_k(x) = \psi'_{m,k}(x) \circ \varphi \quad \text{si } k \in K_m$$

$$\varphi \circ \theta(x) = \psi'(x) \circ \varphi$$

3) On vérifie de même que l'application linéaire de $\bigotimes_k \mathcal{L}(M_k; M'_k)$ dans $\mathcal{L}(\bigotimes_k M_k; \bigotimes_k M'_k)$ est un $\mathcal{O}$ -homomorphisme, ainsi que l'application $\mathcal{L}(M; \mathcal{L}(N; P)) \rightarrow \mathcal{L}(M \otimes N; P)$.

De ces trois identifications canoniques, on en déduit bien d'autres par exemple $\mathcal{L}(M; M') \simeq M' \otimes M^*$ (si M ou M' de rang fini)

Définition 1 : un invariant d'une représentation linéaire (θ, M) de $\mathcal{O}$ est un élément de M annulé par tous les $\theta(x)$. L'ensemble des invariants de M se note M^θ

Exemples : $f \in \mathcal{L}(M; M')$ est invariant si et seulement si $\theta'(x) \circ f = f \circ \theta(x)$ c'est-à-dire si f est un $\mathcal{O}$ -homomorphisme. L'espace des $\mathcal{O}$ -homomorphismes de M dans M' se note $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}(M; M')$

2) Une forme bilinéaire f sur $M \times M$ est invariante si et seulement si

$$f(\theta(x)m, m') + f(m, \theta(x)m') = 0$$

3) Si m_1 est un invariant^{de} (θ_1, M_1) , $m_1 \otimes m_2$ est invariant.

Nous supposons désormais que K est un corps de caractéristique 0 et que $\mathcal{O}$ et les modules de représentation sont de rang fini sur K . (pour ce paragraphe)

Venons en à l'élément de Casimir. Soit f une forme bilinéaire symétrique, invariante et non dégénérée sur M (i.e. $f(m, m') = 0$ pour tout $m' \in M$ entraîne $m = 0$) . $(M \otimes M)^* \simeq \mathcal{L}(M, M^*)$ autrement dit à f invariante correspond une appli-

cation $\varphi: M \rightarrow M^*$ définie par $\langle m, \varphi(m') \rangle = f(m, m')$. φ est un $\mathcal{A}$ -homomorphisme et comme f est non dégénérée c'est un isomorphisme. $\bar{\varphi} = \varphi^{-1}$ est un $\mathcal{A}$ -homomorphisme de $M^* \rightarrow M$, donc un invariant de $\mathcal{L}(M^*; M) \simeq M^{**} \otimes M = M \otimes M$. Donc à f est associé un invariant c de $M \otimes M$. Explicitons : soient $\{m_i\}$ $\{n_i\}$ deux bases duales de M i.e. $f(m_i, n_j) = \delta_{ij}$. Si $\{m'_i\}$ est la base de M^* duale de $\{m_i\}$ i.e. $\langle m_i, m'_j \rangle = \delta_{ij}$, on a évidemment $\varphi(n_j) = m'_j$ donc $\bar{\varphi}(m'_j) = n_j = \sum \langle m_i, m'_j \rangle n_i$. Donc $c = \sum m_i \otimes n_i$.

Le cas important est le suivant: M est un idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathcal{A}$ et $\theta(x)$ est la restriction à $\mathfrak{h}$ de adx . f est de la forme

$$f(m, m') = \text{Tr}(\rho(m) \rho(m')) \quad m, m' \in \mathfrak{h}$$

où (ρ, N) est une représentation linéaire de $\mathcal{A}$ telle que f soit non dégénérée. Un calcul facile montre que f est invariante et il est connu qu'elle est symétrique. Formons l'élément C_N associé à f . C'est un élément $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ invariant par la représentation adjointe. Par les homomorphismes $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \xrightarrow{\rho \otimes \rho} \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \rightarrow U(\mathcal{U})$ on en déduit un élément du centre de $U(\mathcal{U})$ soit C_N qui est l'élément de Casimir de (ρ, N) . De plus $\rho(C_N) \neq 0$, car

$$C_N = \sum m_i n_i \quad \text{Tr}(\rho(C_N)) = \sum \text{Tr}(\rho(m_i) \rho(n_i)) = \sum \delta_{ii} = \dim N$$

Le lemme de Schur montre alors que si (ρ, N) est irréductible $\rho(C_N)$ qui est un $\mathcal{A}$ -endomorphisme non nul de N est un automorphisme.

2.- Nullité de certains groupes de cohomologie.

Définition 2 : un $\mathcal{A}$ -module V est injectif si pour tout $\mathcal{A}$ -module A , tout sous- $\mathcal{A}$ -module B de A et tout $\mathcal{A}$ -homomorphisme $f: B \rightarrow V$ il existe un $\mathcal{A}$ -homomorphisme $\bar{f}: A \rightarrow V$ qui prolonge f .

Autrement dit pour tous les A et $B \subset A$ l'application canonique $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(A, V) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(B, V)$ est surjective.

Lemme 2. si $V = \mathcal{L}(L; N)$ où L est U.libre, alors V est injectif.

Un $\mathcal{A}$ -homomorphisme de $f: B \rightarrow V$ est un invariant de $\mathcal{L}(B, V) = \mathcal{L}(B, \mathcal{L}(L, N)) \simeq \mathcal{L}(L, \mathcal{L}(B, N))$, autrement dit un $\mathcal{A}$ -homomorphisme de L dans $\mathcal{L}(B, N)$. Mais l'application canonique de $\mathcal{L}(A, N)$ sur $\mathcal{L}(B, N)$ est surjective (il s'agit d'espaces vectoriels); L étant libre, tout $\mathcal{A}$ -homomorphisme de L dans $\mathcal{L}(B, N)$ se remonte en un $\mathcal{A}$ -homomorphisme de L dans $\mathcal{L}(A, N)$. Donc l'application

canonique de $\mathcal{L}(L, \mathcal{L}(A, N))$ dans $\mathcal{L}(L, \mathcal{L}(B, N))$ est surjective et par suite il en est de même de $\mathcal{L}(A, V) \rightarrow \mathcal{L}(B, V)$ par suite des identifications faites. C.Q.F.D.

Proposition 1 : si V est injectif $H^q(\mathcal{U}, V) = 0$ pour $q > 0$.

Soit $f \in Z^q(\mathcal{U}, V)$ $q > 0$. f est donc un $\mathcal{U}$ -homomorphisme : $C_q \rightarrow V$ tel que $f \circ d = 0$ c'est-à-dire nul sur $d C_{q+1}$. Mais C est acyclique donc $d C_{q+1}$ est le noyau N de l'opérateur $d : C_q \rightarrow C_{q-1}$ (car $q > 0$). f étant nul sur N , il existe un $\mathcal{U}$ -homomorphisme et un seul $g : d C_q \rightarrow V$ tel que $f = g \circ d$. Mais $d C_q$ est un sous- $\mathcal{U}$ -module de C_{q-1} et comme V est injectif il existe $\bar{g} : C_{q-1} \rightarrow V$ prolongeant g . Par suite $f = \bar{g} \circ d$ et $f \in B^q(\mathcal{U}, V)$. Donc $B^q = Z^q$ et $H^q(\mathcal{U}, V) = 0$ C.Q.F.D.

Avant d'énoncer la proposition 2, faisons les remarques suivantes: si c est dans le centre de l'algèbre $U(\mathcal{U})$ et (θ, M) un module de représentations de $\mathcal{U}$, $\theta(c)$ est un $\mathcal{U}$ -endomorphisme c^* et il existe donc un endomorphisme des $H^q(\mathcal{U}, M)$ transformant un cocycle f en $\theta(c) \circ f = c.f$

Proposition 2 : si c est d'augmentation nulle c^* annule les $H^q(\mathcal{U}, M)$

On a $(c.f)(\gamma) = f(c.\gamma)$ car f est un $\mathcal{U}$ -homomorphisme. On va construire par récurrence sur q des $\mathcal{U}$ -homomorphismes $k_q : C_q \rightarrow C_{q+1}$ tels que

$$\begin{aligned} c.\gamma &= k.d\gamma + d.k\gamma & \text{c'est-à-dire} \\ c.\gamma &= k_q.d\gamma + d.k_{q+1}\gamma & \gamma \in C_q \end{aligned}$$

Supposons définis les k_r pour $r \leq q$. La récurrence commence avec $q = -1$ $k_{-1} = 0$. C_q est U.libre, soit γ_α une U.base de C_q ; il suffira de définir les k_{γ_α} de sorte que

$$c.\gamma_\alpha = k_q.d\gamma_\alpha + d.k_{q+1}\gamma_\alpha$$

soit

$$d(k_{q+1}\gamma_\alpha) = c.\gamma_\alpha - k_q.d\gamma_\alpha$$

Pour cela puisque C est acyclique il suffira de démontrer que le 2^e membre est annulé par d (et ε si $q = -1$). Or $d\gamma_\alpha \in C_{q-1}$ donc

$$d(c.\gamma_\alpha - k_q.d\gamma_\alpha) = c.d\gamma_\alpha - d.k_q(d\gamma_\alpha) = k_{q-1}.d.d\gamma_\alpha = 0$$

et si $q = -1$ $k_q.d\gamma_\alpha = 0$ $\varepsilon(c.\gamma_\alpha) = \varepsilon(c) \varepsilon(\gamma_\alpha) = 0$ car $\varepsilon(c) = 0$

k est donc bien défini. Soit Alors $f \in Z^q(\mathcal{U}, M)$. On aura

$$(c.f)(\gamma) = f(c.\gamma) = f(k d\gamma + d k \gamma) = (fok)(d\gamma)$$

donc $c.f$ est le cobord de fok et $H^q(\mathcal{U}, M) = 0$.

C.Q.F.D.

Corollaire : si (θ, M) est une représentation irréductible et de dimension finie, K de caractéristique 0 et la forme bilinéaire $\text{Tr}(\theta(x)\theta(y))$ non dégénérée alors $H^q(\mathcal{U}, M) = 0$ pour $q \gg 0$.

En effet C_M est dans le centre de $U(\mathcal{U})$ et $\theta(C_M)$ un automorphisme de M donc C_M^* un automorphisme de $H^q(\mathcal{U}, M)$. Il ne peut être nul que si les $H^q(\mathcal{U}, M)$ sont nuls.

3.- Interprétation de $H^0(\mathcal{U}, M)$

Explicitons la formule du cobord donné à la fin de l'exposé 3.

$$f \in C^p(\mathcal{U}, M) \quad g = \delta f \quad C^p(\mathcal{U}, M) \text{ étant l'espace des formes } p\text{-linéaires alternées : } \mathcal{U}^p \rightarrow M$$

$$\text{Si } p = 0 \quad g(x_1) = \theta(x_1).f$$

$$p = 1 \quad g(x_1, x_2) = \theta(x_1)f(x_2) - \theta(x_2)f(x_1) - f([x_1, x_2])$$

$$\begin{aligned} p = 2 \quad g(x_1, x_2, x_3) &= \theta(x_1)f(x_2, x_3) - \theta(x_2)f(x_1, x_3) + \theta(x_3)f(x_1, x_2) - \\ &\quad - f([x_1, x_2], x_3) + f([x_1, x_3], x_2) - f([x_2, x_3], x_1) = \\ &= \sum_3 \{ \theta(x_1)f(x_2, x_3) - f([x_1, x_2], x_3) \} . \end{aligned}$$

$C^{-1}(\mathcal{U}, M) = 0$ entraîne $B^0(\mathcal{U}, M) = 0$. Pour que $f \in Z^0(\mathcal{U}, M)$ il faut et il suffit que $\theta(x).f = 0$ pour tout $x \in \mathcal{U}$ c'est-à-dire que f soit invariant.

Il s'ensuit que $H^0(\mathcal{U}, M)$ s'identifie canoniquement à l'espace M^h des invariants de M .

4.- Interprétation de $H^1(\mathcal{U}, M)$

Nous allons étudier le problème des extensions de $\mathcal{U}$ -modules. Une extension de (θ, N) par (θ', M) est un $\mathcal{U}$ -module (ψ, P) et deux $\mathcal{U}$ -homomorphismes

$$i : M \rightarrow P$$

$$\kappa : P \rightarrow N$$

tels que la suite $0 \rightarrow M \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\kappa} N \rightarrow 0$ soit exacte.

Deux extensions seront dites équivalentes si le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & i \nearrow & \downarrow k & \searrow \pi & \\ M & & & & N \\ & i_1 \searrow & \downarrow & \nearrow \pi_1 & \\ & & P_1 & & \end{array}$$

est commutatif.

A la suite exacte $0 \rightarrow M \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} N \rightarrow 0$ correspond la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(N, M) \xrightarrow{\pi'} \mathcal{L}(P, M) \xrightarrow{i'} \mathcal{L}(M, M) \rightarrow 0$$

où les homomorphismes de cette suite ont des $\mathcal{Y}$ -homomorphismes, $\mathcal{L}(Q, R)$ étant muni de la structure de $\mathcal{Y}$ -module définie dans l'exposé n° 1. On peut appliquer la suite exacte de cohomologie, soit

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{L}(N, M)) \xrightarrow{\pi^*} H^0(\mathcal{L}(P, M)) \xrightarrow{i^*} H^0(\mathcal{L}(M, M)) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{L}(N, M))$$

$H^0(\mathcal{L}(Q, R))$ est l'ensemble des invariants de $\mathcal{L}(Q, R)$ c'est-à-dire les $\mathcal{Y}$ -homomorphismes de Q dans R . Dans $\mathcal{L}(M, M)$ il existe un élément privilégié qui est l'application identique j de M dans M . $\partial j \in H^1(\mathcal{L}(N, M))$ s'appelle la classe caractéristique ou l'obstruction de l'extension considérée.

Si cette classe est nulle, j est dans le noyau de ∂ donc dans l'image de i^* , c'est-à-dire qu'il existe un $\mathcal{Y}$ -homomorphisme f de P dans M tel que $f \circ i$ soit l'identité de M .

Mais ceci est équivalent au fait que l'extension est inessentielle c'est-à-dire qu'il existe un sous espace N' de P invariant avec P somme directe de M et N' .

Si l'on a deux extensions équivalentes, l'obstruction est la même car le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{\pi} & N \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow k & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{i_1} & P_1 & \xrightarrow{\pi_1} & N \rightarrow 0 \end{array}$$

fournit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{L}(M, M)) & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathcal{L}(N, M)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(\mathcal{L}(M, M)) & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathcal{L}(N, M)) \end{array}$$

Donc à toute classe d'extensions équivalentes correspond un élément de $H^1(\mathcal{L}(N, M))$ bien défini, nul si et seulement si l'extension est inessentielle. Réciproquement soit $c \in H^1(\mathcal{L}(N, M))$. Représentons N comme quotient d'un module libre sur U soit L $N = L/R$. On a alors la suite exacte $0 \rightarrow R \rightarrow L \xrightarrow{\pi} N \rightarrow 0$ d'où

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(N, M) \rightarrow \mathcal{L}(L, M) \rightarrow \mathcal{L}(R, M) \rightarrow 0$$

et il résulte du lemme 2 et de la proposition 1 que $H^1(\mathcal{L}(L, M)) = 0$. La suite exacte de cohomologie s'écrit alors

$$\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(L, M) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{U}}(R, M) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{L}(N, M)) \rightarrow 0$$

donc $H^1(\mathcal{L}(N, M))$ s'identifie au quotient du groupe $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(R, M)$ par le sous-groupe des $\mathcal{U}$ -homomorphismes $R \rightarrow M$ qui se prolongent à L . Soit c' un $\mathcal{U}$ -homomorphisme $R \rightarrow M$ tel que $c = \partial c'$. Posons $P' = (M + L)/Q$ où Q est le sous-groupe formé des $(c'(r), -r)$ ($r \in R$). Soit k l'application canonique de $M \times L$ sur P' . On pose $i(m) = k(m, 0)$ $\pi(k(m, \ell)) = \mathcal{X}\ell$ ce qui a un sens car $\mathcal{X}r = 0$ donc π s'annule sur Q . Comme $(M + (0)) \cap Q = (0)$ i est biunivoque et comme $\mathcal{X}$ est surjectif, il en est ainsi de π . De plus le noyau de π se compose des $k(m, r) = k(m + c'(r), 0) = i(m + c'(r))$. Donc la suite

$$0 \rightarrow M \rightarrow P' \rightarrow N \rightarrow 0$$

est exacte.

Enfin il existe un homomorphisme $q : L \rightarrow P'$ avec $q(\ell) = k(0, \ell)$

Le diagramme suivant est alors commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & R & \rightarrow & L & \xrightarrow{\mathcal{X}} & N \rightarrow 0 \\ & & c' \downarrow & & \downarrow q & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{i} & P' & \xrightarrow{\pi} & N \rightarrow 0 \end{array}$$

d'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{L}(N, M) & \rightarrow & \mathcal{L}(L, M) & \rightarrow & \mathcal{L}(R, M) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{L}(N, M) & \rightarrow & \mathcal{L}(P', M) & \rightarrow & \mathcal{L}(M, M) \rightarrow 0 \end{array}$$

et en cohomologie

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{L}(R, M)) & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathcal{L}(N, M)) \\ c' \times \uparrow & & \uparrow \simeq \\ H^0(\mathcal{L}(M, M)) & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathcal{L}(N, M)) \end{array}$$

Comme l'image par c'^* de l'identité dans M est précisément c' et que $\partial c' = c$ on voit que c est l'obstruction de l'extension P'

Enfin toute extension P se construit comme ceci car si $0 \rightarrow R \rightarrow L \rightarrow N$ comme L est libre on peut factoriser $L \xrightarrow{q} P \xrightarrow{\pi} N$ et les éléments de R sont envoyés dans le noyau de π i.e. dans M d'où le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{i} & L & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\ & & c' \downarrow & & \downarrow q & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & P & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

et l'on définit une application de $M + L$ sur P par $k(m, \ell) = i(m) + q(\ell)$ qui est nulle sur Q car le diagramme est commutatif.

On définit ainsi $k : P' \rightarrow P$ et l'on voit tout de suite que

$$\begin{array}{ccccc} & & P' & & \\ & \nearrow & \downarrow k & \searrow & \\ 0 & \longrightarrow & M & & N \longrightarrow 0 \\ & \nwarrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & P & & \end{array}$$

est commutatif.

Théorème 1 : il y a correspondance biunivoque entre les classes d'extensions équivalentes de N , par M et les éléments de $H^1(\mathcal{L}(N, M))$

On explicite cette correspondance comme suit ; le cobord de la suite exacte est défini ainsi : on prend un élément de $Z^0(\mathcal{L}(M, M))$ soit l'identité dans M on le remonte en un élément de $C^0(\mathcal{L}(M, P))$ c'est-à-dire qu'on choisit $\rho : M \rightarrow P$ tel que $\pi \circ \rho = 1$. Puis on prend le cobord de ρ qui est dans $Z^1(\mathcal{L}(N, M))$ autrement dit on considère la fonction $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(N, M)$ définie par $g(x) = \theta(x) \circ \rho - \rho \circ \theta'(x)$. La classe de cohomologie de g est l'obstruction de l'extension. L'application K - linéaire $(m, n) \rightarrow m + \rho(n)$ identifie $M \times N$ à P et les opérateurs de $\mathcal{U}$ sont définis par les matrices

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \theta(x) & g(x) \\ 0 & \theta'(x) \end{pmatrix}$$

On a
$$[\Psi(x), \Psi(y)] - \Psi([x, y]) = \begin{pmatrix} 0 & dg(x, y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Se reporter à la formule du IV) donc $dg = 0$. Réciproquement si $dg = 0$ on définit une représentation de $\mathcal{U}$ dans $M \times N$ par les matrices $\Psi(x)$.

Si l'on change de section $\rho' = \rho + \ell$ on aura $g'(x) = g(x) + \theta(x) \circ \ell - \ell \circ \theta'(x)$ d'où $g' = g + \delta \ell$ donc g n'est modifié que par un cobord.

Théorème 2 : Il y a équivalence entre les 4 propositions suivantes

- (1) pour tout $\mathcal{O}_f$ -module simple M $H^1(\mathcal{O}_f, M) = 0$
- (2) pour tout $\mathcal{O}_f$ -module M $H^1(\mathcal{O}_f, M) = 0$
- (3) pour tout $\mathcal{O}_f$ -homomorphisme φ de M sur N $\varphi(M^h) = N^h$
- (4) Toute représentation est complètement réductible.

(1) $\Rightarrow$ (2). M possède en effet une suite de Jordan-Hölder

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M.$$

M_{i+1}/M_i étant simples

il suffit de montrer que si

$$H^1(\mathcal{O}_f, P/Q) = H^1(\mathcal{O}_f, Q) = 0 \text{ il s'ensuit que } H_1(\mathcal{O}_f, P) = 0.$$

Ceci résulte de la suite exacte de cohomologie

$$0 = H^1(\mathcal{O}_f, Q) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_f, P) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_f, P/Q) = 0$$

$$(2) \Rightarrow (3) \quad \begin{aligned} M^h &= H^0(\mathcal{O}_f, M) \\ N^h &= H^0(\mathcal{O}_f, N) \end{aligned}$$

Soit en effet Q le noyau de φ , la suite exacte $0 \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ nous donne la suite exacte $H^0(\mathcal{O}_f, M) = M^h \xrightarrow{\varphi} H^0(\mathcal{O}_f, N) = N^h \rightarrow H^1(\mathcal{O}_f, N) = 0$ ce qui exprime bien $\varphi(M^h) = N^h$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Il suffit de démontrer que si N est un sous- $\mathcal{O}_f$ -module de P , il existe un supplémentaire invariant M' de N , c'est-à-dire qu'il existe un $\mathcal{O}_f$ -homomorphisme f de $M = P/N$ dans P tel que $\pi \circ f$ soit l'identité i . (3) implique que

$$\mathcal{L}(M, P)^h \xrightarrow{\varphi} \mathcal{L}(M, M)^h \text{ est sur, donc qu'un tel } f \text{ existe.}$$

(4) $\Rightarrow$ (1) car si (4) est vraie toute extension est inessentielle donc

$$H^1(\mathcal{L}(N, M)) = 0 \text{ pour tout } N .$$

En prenant pour N le module de la représentation nulle, nous obtenons
 $M \simeq \mathcal{L}(N; M)$ donc $H^1(M) = 0$.
