Séminaire "Sophus Lie"

P. Cartier

Cohomologie des algèbres de Lie, I

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 3, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A5_0>

Séminaire "Sophus LIE"
E.N.S., 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 3

COHOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE LIE, I .

(Exposé de P. CARTIER du 23.11.54)

1.- Préliminaires sur les complexes.

En vertu des principes généraux (cf. le livre à paraître de Cartan-Eilenberg) pour construire une théorie de l'homologie et de la cohomologie des algèbres de Lie, il faut se donner un U-complexe libre et acyclique, U étant l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur l'anneau K . Ce n'est pas la marche suivie historiquement par Hochschild et Chevalley-Eilenberg qui ont sorti cette théorie de la topologie des groupes de Lie, mais c'est la mieux adaptée à notre propos. Rappelons les définitions des complexes :

En général, un complexe C est un K-module unitaire vérifiant les conditions suivantes :

1) C est somme directe de sous-modules C_p ($C_p = 0$ si $p < 0$)

2) Il existe sur C un opérateur linéaire d tel que $d.C_p \subset C_{p-1}$ et $d^2 = 0$

3) Il existe un projecteur ε de C_0 sur un sous-espace de dim 1 de C_0 tel que $\varepsilon d = 0$ et donc $d\varepsilon = 0$. ε est prolongé par 0 sur les C_p ($p>0$).

Les a tels que $da = 0$ sont les cycles et les $a = db$ sont les bords ; tout bord est un cycle puisque $d^2 = 0$. Réciproquement, si les cycles annulés par ε sont des bords, C sera dit acyclique. Pour démontrer que C est acyclique, le plus simple est de construire un opérateur "d'homotopie" k tel que $k.C_p \subset C_{p+1}$ et $kd = dk = 1 - \varepsilon$. Si alors $\varepsilon a = da = 0$, on aura $a = d(ka)$ ce qui prouve l'acyclidité.

Soient C' et C" deux complexes (ce qui se rapporte à C' est marqué d'un astérique et itou pour C"). Sur $C = C' \otimes C"$ on pose $d = d' \otimes 1 + \alpha \otimes d"$, $C_p = \sum_r C'_r \otimes C"_{p-r}$, $\varepsilon = \varepsilon' \otimes \varepsilon"$ (α est l'opérateur $\sum c_p \longrightarrow$ $\longrightarrow \sum (-1)^p c_p$ $c_p \in C'_p$) . On vérifie immédiatement avec ces définitions que C est un complexe. S'il existe des opérateurs d'homotopie sur C' et C" on pose $k = k' \otimes 1 + \varepsilon' \otimes k"$ et c'est un opérateur d'homotopie car
$kd + dk = (k'd' + d'k') \otimes 1 + (k'\alpha + \alpha k') \otimes d" + (d'\varepsilon' + \varepsilon' d') \otimes k" +$
$+ \alpha\varepsilon' \otimes d"k" + \varepsilon'\alpha \otimes k"d" = (1 - \varepsilon') \otimes 1 + \varepsilon' \otimes (1 - \varepsilon") = 1 \otimes 1 - \varepsilon' \otimes \varepsilon" =$
$= 1 - \varepsilon$

donc C est acyclique.

Lemme 1 : Soit A un groupe abélien muni d'un endomorphisme d tel que $d^2 = 0$ et B un sous-groupe stable par d . A/B est muni de l'opérateur $\bar{d}$ déduit de d par passage au quotient. Si B et A/B sont acycliques, il en est de même de A . (on suppose $\xi = 0$)

$\bar{a}$ est la classe mod. B de $a \in A$. Supposons que $da = 0$, alors $\bar{d}\bar{a} = \bar{d}.\bar{a} = 0$, donc il existe $\bar{b}$ tel que $\bar{a} = \bar{d}\,\bar{b}$, i.e $a - db \in B$. Mais $a - db$ est un cycle de B , donc il existe $c \in B$ tel que $a - db = dc$, donc $a = d(b + c)$. C.Q.F.D.

Un complexe C sera un U-complexe si C est aussi un U-module à gauche, les C_p étant des sous-U-modules et d un U-endomorphisme. Il sera libre si les C_p possèdent une base sur l'anneau U .

Le complexe que nous allons construire possède une structure supplémentaire, à savoir que c'est une algèbre sur K , la multiplication envoyant $C_p \times C_q \longrightarrow C_{p+q}$ et d étant une antidérivation i.e.

$$d(cc') = dc.c' + \alpha(c).dc' \qquad c , c' \in C \tag{1}$$

Le carré d'une antidérivation est une dérivation, donc si d^2 s'annule sur un système de générateurs de C , alors $d^2 = 0$. De plus :

Lemme 2 : Soit S un système de générateurs de l'algèbre C . Un opérateur linéaire d sera une antidérivation pourvu que la formule (1) soit vraie pour tous $c \in C$ et $c' \in S$.

L'ensemble T des c' tels que (1) soit identiquement vérifiée en c est un K-module ; de plus il est stable pour la multiplication car si $x , y \in T$ on a :

$$d(cxy) = d((cx)y) = d(cx).y + \alpha(cx).dy = dc.x.y + \alpha(c).dx.y + \alpha(c)\,\alpha(x)dy =$$
$$= dc.(xy) + \alpha(c).\,d(xy)$$

donc $xy \in T$. Comme $T \supset S$ il est clair que $T = C$.
Remarquons que si $d(1) = 0$, la formule (1) est trivialement vraie si $c' = 1$.

2.- Construction du complexe fondamental.

La construction de C va se faire en deux étapes : construction de la multiplication, puis de d . K désigne une algèbre pour K avec unité ; on suppose donné un homomorphisme $x \longrightarrow \theta(x)$ de $\mathcal{G}$ dans l'algèbre de Lie des dérivations de A . On pose $C = U \otimes A$ et l'on identifie u et $u \otimes 1$, a et $1 \otimes a$ ($u \in U$, $a \in A$).

Lemme 3 : Sur C existe une multiplication telle que $u \otimes a = ua$ et si $x \in \mathcal{G}$ $\theta(x) . a = xa - ax$.

Posant $\psi(x)u = ux$ et $\psi(x)a = - \theta(x)a$, on a deux antireprésentations linéaires de $\mathcal{G}$ dont on peut former le produit tensoriel $\varphi(x)$ qui est une antireprésentation linéaire de $\mathcal{G}$ dans $C = U \otimes A$; autrement dit :

$$\varphi(x)(u \otimes a) = ux \otimes a - u \otimes \theta(x)a \tag{2}$$

On peut prolonger cette antireprésentation linéaire de $\mathcal{G}$ en une représentation linéaire droite de U dans C par $\varphi(x_1 \dots x_n) = \varphi(x_n) \dots \varphi(x_1)$ donc $\varphi(uv) = \varphi(v)\ \varphi(u)$. On définit une représentation linéaire droite de A dans C en posant

$$\varphi(a)(u \otimes b) = u \otimes ba \tag{3}$$

On définit enfin des opérateurs $\varphi(c)$ dans C lorsque $c \in C$ en posant

$$\varphi(u \otimes a) = \varphi(a) .\ \varphi(u) \tag{4}$$

et en étendant par linéarité. On va d'abord montrer que $\varphi(c)(1 \otimes 1) = c$ donc que $c \longrightarrow \varphi(c)$ est biunivoque, puis que les $\varphi(c)$ forment une algèbre d'opérateurs et que $\varphi(\theta(x)a) = \varphi(a)\varphi(x) - \varphi(x)\ \varphi(a)$. On pourra alors définir un produit et un seul sur C tel que φ soit une représentation linéaire droite de C et les assertions qu'on vient d'énumérer jointes à la formule (4) démontreront le lemme.

Posons $t = [\ \varphi(a)\ ,\ \varphi(x)\ ]$, on a

$$t(u \otimes b) = \varphi(a)(ux \otimes b - u \otimes \theta(x)b) - \varphi(x)(u \otimes ba) =$$
$$= ux \otimes ba - u \otimes (\theta(x)b)a - ux \otimes ba + u \otimes (x)(ba) = u \otimes b\ \theta(x)a$$

d'où $t = \varphi(\theta(x)a)$ [Voir complément page 3-07]

Pour montrer que les $\varphi(c)$ forment une algèbre, il suffit de montrer d'après la formule (4) que $\varphi(C)$ est stable pour la multiplication à gauche par les $\varphi(a)$ et les $\varphi(u)$ et même simplement par les $\varphi(a)$ et les $\varphi(x)$ ($x \in \mathcal{G}$) puisque $\mathcal{G}$ engendre U et que φ est une représentation linéaire droite de U donc que les $\varphi(x)$ engendrent $\varphi(U)$. Or

$$\varphi(a)\ \varphi(u \otimes b) = \varphi(a)\ \varphi(b)\ \varphi(u) = \varphi(ba)\ \varphi(u) \in \varphi(C)$$
$$\varphi(x)\ \varphi(u \otimes b) = \varphi(x)\ \varphi(b)\ \varphi(u) = \varphi(b)\ \varphi(x)\ \varphi(u) -$$
$$- \varphi(\theta(x)b)\ \varphi(u) = \varphi(b)\ \varphi(ux) - \varphi(\theta(x)b)\ \varphi(1) \in \varphi(C)$$

Il reste à construire d . C.Q.F.D.

Lemme 4 : Soit Λ l'algèbre extérieure du module sous-jacent à $\mathcal{G}$, B une algèbre associative contenant Λ comme sous-algèbre et ayant même unité. Pour qu'une application linéaire h de $\mathcal{G} = \Lambda^1$ dans B se prolonge en une

antidérivation de Λ dans B , il faut et il suffit que x commute à h(x) pour tout $x \in \mathcal{J}$.

C'est nécessaire, car $x^2 = 0$ dans Λ , d'où $d(x^2) = dx.x - x.dx = 0$. C'est suffisant, car si l'on pose :

$$(5) \quad h(x_1 , \dots , x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_1 \dots x_{i-1} h(x_i) x_{i+1} \dots x_n \text{ (dans B)}$$

on définit une application n-linéaire de $\mathcal{J}^n$ dans B et elle est alternée si x commute à h(x) . Supposons en effet que dans (5) $x_j = x_{j+1}$; comme dans $\Lambda \subset B$ le carré de x_j est nul, les seuls termes non nuls de cette somme sont ceux pour lesquels $i = j , j + 1$, la contribution de ces termes étant $(-1)^{j-1} a.h(x_j)x_j b + (-1)^j a.x_j h(x_j) b = (-1)^{j-1} a[h(x_j) , x_j]b$ donc 0 . Par suite il existe une application linéaire de Λ^n dans B telle que $d(x_1 \dots x_n) = h(x_1 , \dots , x_n)$ et $d(1) = 0$ si $n = 0$. Enfin c'est une antidérivation, car si $a = x_1 \dots x_n$, $x = x_{n+1}$ on a

$$\begin{aligned} d(ax) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_1 \dots x_{i-1} h(x_i) x_{i+1} \dots x_n x + (-1)^n x_1 \dots x_n h(x_{n+1}) \\ &= da.x + \alpha(a).dx \end{aligned}$$

et le lemme 2 achève la démonstration de ce lemme.

Ces deux lemmes étant démontrés, prenons $A = \Lambda$ i.e. $C = U \otimes \Lambda$, et munissons C du produit du lemme 3 en prenant pour $\theta(x)$ le prolongement en une dérivation de Λ de l'opérateur adx de $\Lambda^1 = \mathcal{J}$. Pour éviter les confusions x sera noté $\underline{x}$, considéré comme élément de U , et x comme élément de Λ . On a alors les relations suivantes :

$$(6) \quad \underline{x}\underline{y} - \underline{y}\underline{x} = [\underline{x} , \underline{y}] , \ \underline{x}\underline{y} - \underline{y}\underline{x} = \theta(x)y = [x , y] , \ xy + yx = 0 , \ x^2 = 0$$

et les x et les $\underline{x}$ engendrent C . On pose $C_p = U \otimes \Lambda^p$ et $h(x) = \underline{x}$. Il résulte de la deuxième relation (6) et du lemme 4 qu'il existe une antidérivation d de Λ dans C telle que $dx = \underline{x}$. On prolonge d à C en posant $d(u \otimes a) = uda$ donc $d\underline{x} = d(\underline{x} \otimes 1) = 0$.

$$d(uax) - d(ua)x - \alpha(ua)dx = u(d(ax) - da.x - \alpha(a).dx) = 0$$
$$d(ua\underline{x}) - d(ua)\underline{x} - \alpha(ua)d\underline{x} = u(d(a\underline{x}) - da.\underline{x})$$

On pourra appliquer le lemme 2 et prouver que d est une antidérivation pourvu que $d(a\underline{x}) = (da)\underline{x}$. Or l'on définit une dérivation de C qui prolonge $\theta(x)$ en posant $\theta(x).c = \underline{x}c - c\underline{x}$. $d\,\theta(x) - \theta(x)d$ est une antidérivation de Λ dans C et elle s'annule pour $y \in \Lambda^1$

$$d(\theta(x)y) - \theta(x)dy = d([x , y]) - (\underline{x}\underline{y} - \underline{y}\underline{x}) = [\underline{x} , \underline{y}] - (\underline{x}\underline{y} - \underline{y}\underline{x}) = 0$$

donc elle s'annule sur Λ et $d(\theta(x)a) = \theta(x)da$

Comme $d(\underline{x}a) = \underline{x}da$ et $a\underline{x} = \underline{x}a - \theta(x)a$, il en résulte que $d(a\underline{x}) = (da)\underline{x}$. Donc d est une antidérivation ; comme $dx = \underline{x}$ et $d\underline{x} = 0$, d^2 s'annule sur les x et les $\underline{x}$ donc sur C puisque ces éléments engendrent C . L'augmentation ε de $C_0 = U$ est l'augmentation définie dans l'exposé 1 . Enfin C est un U-module à gauche de façon naturelle $u(v \otimes a) = uv \otimes a$ et les C_p sont des U-sous-modules tandis que d est un U-endomorphisme.

3.- Propriétés du complexe.

On suppose désormais que $\mathcal{g}$ possède une base sur K .

Alors Λ^p possède une base sur K et il est clair que cette base est une base de $C_p = U \otimes \Lambda^p$ sur U : U est un complexe libre.

Démontrons l'acyclicité de C . Pour cela, on filtre C par les $C_p = \sum_r U_{p-r} \otimes \Lambda^r$. La somme des Λ^p étant directe, cette somme est directe et $C^p \subset C^{p+1}$ et $C^p/C^{p-1} = \sum_r S_{p-r} \otimes \Lambda^r$ d'après le théorème de Birkhoff-Witt. (S est l'algèbre symétrique sur $\mathcal{g}$).

Chaque élément de C^p est somme de produits de $q \leq p$ générateurs (x ou $\underline{x}$) . Pour prouver que cette filtration est compatible avec la structure d'algèbre de C il suffit de prouver que $C^p x \subset C^{p+1}$ $C^p \underline{x} \subset C^{p+1}$. Or $\Lambda^r x \subset \Lambda^{r+1}$ implique la première inclusion tandis que pour la seconde, on a :

$$\text{si} \quad u \in U_{p-r} \qquad a \in \Lambda^r$$

$$(u \otimes a)\underline{x} = u\underline{x} \otimes a - u \otimes \theta(x)a \in U_{p-r+1} \otimes \Lambda^r + U_{p-r} \otimes \Lambda^r \subset C^{r+1}$$

En vertu du lemme 1, l'acyclicité sera démontrée si l'on montre que $\bar{C}$ (l'algèbre graduée associée à C) est acyclique. Or $\bar{C}$ est engendrée par les classes x' des x et x" des $\underline{x}$. Les relations (6) donnent que les x" commutent entre eux et avec les x' et que $x'^2 = 0$, donc $\bar{C}$ s'identifie à un quotient de $S \otimes \Lambda$, et ce quotient est en réalité $S \otimes \Lambda$, comme il résulte du calcul fait plus haut de C^p/C^{p-1} . On est donc ramené au cas d'une algèbre de Lie $\mathcal{g}$ abélienne.

Il nous reste à examiner ce cas. Soit $(x_\iota)_{\iota \in I}$ une base de $\mathcal{g}$. Pour toute partie finie F de I , on appelle C_F la sous-algèbre de C engendrée par les x'_ι et les x''_ι pour $\iota \in F$. Comme $dx'_\iota = x''_\iota$, $dx''_\iota = 0$, C_F est stable par d et comme C est réunion des C_F , on se ramène à démontrer que C_F est acyclique. Enfin C_F est le produit tensoriel gauche des algèbres graduées $C_{\{\iota\}}$ et il nous suffira donc d'exhiber un opérateur d'homotopie dans le cas où la base de $\mathcal{g}$ a un seul élément x_0 .

Base de C : $x_0'^n = u_n$ $\quad x_0'x_0''^n = v_n$ $\quad dv_n = u_{n+1}$ $\quad du_n = 0$ $\quad \varepsilon u_n = 0$ si $n > 0$
$\varepsilon u_0 = u_0$

Il suffit de poser $ku_n = u_{n-1}$ si $n > 0$ $\quad ku_0 = 0$ $\quad kv_n = 0$
En résumé, on a montré que C est <u>acyclique</u>.

4.- <u>Cohomologie des algèbres de Lie</u>.

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires. Soit M un $\mathcal{G}$-module, donc un U-module unitaire, on appelle $C^p(\mathcal{G}, M)$ le K-module des U-homomorphismes de C_p dans M. Puisque $C_p = U \otimes \Lambda^p$, la donnée d'une cochaîne de degré p à valeurs dans M, i.e. d'un élément de $C^p(\mathcal{G}, M)$ est entièrement équivalente à la donnée d'une application K-linéaire de Λ^p dans M ou encore d'une fonction p-linéaire alternée de $\mathcal{G}$ dans M. Si $f : C_p \longrightarrow M$ est un U-homomorphisme, $f \circ d$ est un U-homomorphisme de C_{p+1} dans M donc une cochaîne de degré $p+1$ notée δf et appelée le cobord de f. On définit alors sans peine les cocycles et les cobords et le p-ième groupe de cohomologie $H^p(\mathcal{G}, M)$ de $\mathcal{G}$ à valeur dans M comme le quotient du groupe $Z^p(\mathcal{G}, M)$ des cocycles par le sous-groupe $B^p(\mathcal{G}, M)$ des cobords.

A tout $\mathcal{G}$-homomorphisme $\varphi : M \longrightarrow N$ est associé un homomorphisme de $C^p(\mathcal{G}, M)$ dans $C^p(\mathcal{G}, N)$ compatible avec le bord, d'où un homomorphisme $\varphi_p^* : H^p(\mathcal{G}, M) \longrightarrow H^p(\mathcal{G}, N)$. On a $(\varphi \circ \psi)_p^* = \varphi_p^* \circ \psi_p^*$ et si φ est l'identité, φ_p^* l'est aussi. Si M est un sous-module de N, $C^p(\mathcal{G}, M)$ peut être identifié à un sous-groupe de $C^p(\mathcal{G}, M)$ et $C^p(\mathcal{G}, N/M)$ à $C^p(\mathcal{G}, N)/C^p(\mathcal{G}, M)$. De cette situation, on déduit l'opérateur cobord de cohomologie ∂ :

$H^p(\mathcal{G}, N/M) \longrightarrow H^{p+1}(\mathcal{G}, M)$ et la suite exacte de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{G}, M) \longrightarrow H^0(\mathcal{G}, N) \longrightarrow H^0(\mathcal{G}, N/M) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{G}, M) \longrightarrow H^1(\mathcal{G}, N) \longrightarrow$$

Pour être complets explicitons le cobord dans $C^p(\mathcal{G}, M)$ quand on considère une cochaîne comme une fonction p-linéaire alternée de $\mathcal{G}$ dans M

$g = \delta f \quad a = x_1 \dots x_p \quad g(x_1, \dots, x_p) = g(a) = f(da)$

$$da = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} x_1 \dots x_{i-1} \underline{x_i} \dots x_p = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \underline{x_i} x_1 \dots \hat{x}_i \dots x_p +$$
$$+ \theta(x_\iota)(x_1 \dots x_{i-1}) \dots x_p$$

Or $\theta(x_\iota)(x_1 \dots x_{i-1}) = \sum_{j<i} x_1 \dots [x_i, x_j] \dots x_{i-j}$

d'où $da = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \underline{x_\iota} x_1 \dots \hat{x}_\iota \dots x_p + \sum_{j<i} (-1)^{i+j} [x_\iota x_j] x_1 \dots \hat{x}_\iota \dots \hat{x}_j \dots x_p$

donc $g(x_1 \dots x_p) = \sum (-1)^{i-1} x_i f(x_1 \dots \hat{x}_\iota \dots x_p) +$
$$+ \sum_{j<i} (-1)^{i+j} f([x_\iota x_j] x_1 \dots \hat{x}_\iota \dots \hat{x}_j .$$

Avec ces formules, on retrouve la définition usuelle des cochaînes et du cobord.

Nota : un chapeau $\hat{}$ au dessus d'une lettre dans un produit signifie qu'on doit omettre cette lettre dans le produit en question.

Erratum à la page 3 : Après la ligne 23, complèter ainsi la démonstration :
Si $c = u \otimes a = (x_1 \dots x_n) \otimes a$

$$\varphi(c)(1 \otimes 1) = \varphi(a)\,\varphi(x_n) \dots \varphi(x_1)(1 \otimes 1) = (x_1 \dots x_n) \otimes a = c$$