

SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

J. P. SERRE

Tores maximaux des groupes de Lie compacts

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 23, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A25_0

© Séminaire "Sophus Lie"

(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 23TORES MAXIMAUX DES GROUPES DE LIE COMPACTS.

(Exposé de J.F. SERRE, le 31.5.55)

1.- Le théorème de conjugaison.-

Soit G un groupe de Lie compact connexe, et A un sous-groupe abélien connexe de G (il en existe, par exemple les sous groupes à un paramètre). Son adhérence $\bar{A}$ est aussi un sous-groupe abélien connexe, et de plus c'est un groupe de Lie : étant compact, c'est un tore. S'il n'est contenu dans aucun tore plus grand, on dit que c'est un tore maximal. Soit A un tore maximal de G ; son algèbre de Lie $\mathcal{O}$ est une sous-algèbre abélienne maximale de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G . En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait une sous-algèbre abélienne maximale τ de $\mathcal{G}$, contenant $\mathcal{O}$ et $\neq \mathcal{O}$. Le sous-groupe T correspondant à τ serait un sous-groupe abélien connexe de G , contenant A , et dont l'adhérence serait identique à A . Donc $T = A$ et $\tau = \mathcal{O}$. Inversement le même raisonnement montre que toute sous-algèbre abélienne maximale de $\mathcal{G}$ correspond à un tore maximal (et engendre donc un sous groupe fermé). G étant compact, la représentation adjointe de G est semi-simple, donc $\mathcal{G}$ est produit direct (au sens de sa structure d'algèbre de Lie) d'algèbres simples et d'algèbres abéliennes ; en regroupant ces dernières entre elles, on voit qu'on peut écrire $\mathcal{G} = \mathcal{Z} \oplus \mathcal{G}'$, où $\mathcal{Z}$ est le centre de $\mathcal{G}$; $\mathcal{G}'$ est semi-simple compacte (en effet, le groupe G étant compact, la représentation adjointe de G dans $\mathcal{G}'$ laisse invariante une forme quadratique f définie positive ; on peut donc trouver une base de $\mathcal{G}'$ par rapport à laquelle les matrices des $\text{ad } g$ soient orthogonales et comme l'algèbre de Lie du groupe orthogonal se compose des matrices antisymétriques, pour $x \neq 0$ dans $\mathcal{G}'$, $\text{ad } x$ est représenté par la matrice $\|a_{ij}\|$ avec $a_{ji} = -a_{ij}$. Donc $B(x, x) = \text{Tr}((\text{ad } x)^2) = \sum_{i,j} a_{ij} a_{ji} = -\sum_{i,j} a_{ij}^2 < 0$ ce qui montre que la forme de Killing de $\mathcal{G}'$ est définie négative). Il en résulte qu'une sous-algèbre abélienne maximale $\mathcal{O}$ de $\mathcal{G}$ est une sous algèbre de Cartan : en effet, c'est d'abord une sous-algèbre contenant $\mathcal{Z}$, et il suffit de regarder sa composante dans $\mathcal{G}'$; alors le critère de

l'exposé 11, p.11 s'applique, la représentation adjointe de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{G}$ étant semi-simple puisque G est compact. Toutes les sous algèbres abéliennes maximales de $\mathcal{G}$ ont donc même dimension $r = \text{rang de } G$, et sont conjuguées dans $\mathcal{G} \otimes \mathbb{C}$. En fait on va voir qu'elles sont conjuguées dans $\mathcal{G}$.

Dans la suite, G sera supposé connexe et T désignera un tore maximal donné de G .

Théorème 1 : Soit T un tore maximal de G . Alors, si G est connexe, tout élément de G est contenu dans un gTg^{-1} , $g \in G$.

Avant de démontrer ce théorème, donnons d'abord quelques conséquences.

Corollaire 1 : Tout x de G appartient à un sous-groupe à un paramètre de G (car c'est évident dans un tore).

Corollaire 2 : Tout sous-groupe abélien connexe A de G est contenu dans un tore maximal, conjugué de T .

Il suffit de faire la démonstration dans le cas où A est un tore (remplacer A par $\bar{A}$ qui est un tore). Dans ce cas, on sait qu'il existe un élément x dans A tels que les x^n soient partout denses dans A (Kronecker) : nous dirons que x engendre A . Si donc $x \in gTg^{-1}$, les x^n aussi, l'adhérence de l'ensemble des x^n aussi ; bref $A \subset gTg^{-1}$.

Corollaire 3 : Deux tores maximaux sont conjugués.

Il suffit d'appliquer le corollaire 2 à un tore maximal T' et de remarquer que le conjugué d'un tore est un tore.

On remarquera d'ailleurs que les corollaires 1 et 3 entraînent le théorème 1 auquel leur conjonction est donc équivalente.

2.- La démonstration de A.Weil du théorème de conjugaison.

Soit V une variété compacte de dimension n et f une application de V en elle-même. La topologie algébrique permet d'attacher à f un nombre $L(f)$ dit nombre de Lefschetz qui jouit des propriétés suivantes (cf Alexandroff-Hopf pour ce qui suit) :

- a) si f et g sont homotopes, $L(f) = L(g)$.
- b) si $L(f) \neq 0$, f a au moins un point fixe.
- c) si f n'a que des points fixes isolés a_i , on peut attacher à chacun des a_i un nombre k_i "son indice" tel que $L(f) = (-1)^n \sum k_i$
- d) si a est un point fixe isolé de f , si f est différentiable en a

et que l'application linéaire tangente df en a n'a pas de valeur propre égale à 1, l'indice de a est égal au signe de $\det(df - I)$.

Nous allons prendre pour V l'espace homogène à gauche G/T et pour f la transformation $p(x)$ associée à l'élément x de G ; les éléments de G/T sont les classes $\bar{a} = aT$ et $p(x)\bar{a} = \overline{(xa)} = xaT$ et les points fixes de $p(x)$ sont donc les classes aT telles que $xaT = aT$ soit $x \in aTa^{-1}$. Si donc $p(x)$ a un point fixe $\bar{a}$, x est dans le tore aTa^{-1} conjugué de T ; pour démontrer l'existence d'un point fixe, il suffit d'après b) de démontrer que $L(p(x)) \neq 0$. On peut alors remarquer que G étant connexe par arcs, $p(x)$ est homotope à toute transformation $p(y)$ et que $L(p(x)) = L(p(y))$ et il va nous suffire de calculer $L(p(y))$ pour un y particulier dans G .

Nous prendrons pour y un générateur de T (cf. démonstration du cor. 2); si $\bar{a}$ est un point fixe de $p(y)$, on a $y \in aTa^{-1}$ donc $T \subset aTa^{-1}$ et comme T est un tore maximal $T = aTa^{-1}$ ce qui signifie par définition que a appartient au normalisateur N de T dans G . Faisons opérer N dans T par les automorphismes intérieurs $t^n = ntn^{-1}$ ($t \in T$, $n \in N$); le groupe des automorphismes de T est discret car il est isomorphe au groupe des matrices inversibles à coefficients entiers, donc l'homomorphisme de N dans le groupe des automorphismes de T est constant sur la composante connexe N^0 de N . N est fermé, donc N^0 est un groupe de Lie; dire que N^0 agit trivialement sur T signifie que T qui est contenu dans N^0 commute à N^0 ; si N^0 était différent de T , on pourrait trouver un sous-groupe à un paramètre de N^0 qui engendrerait avec T un tore plus grand que T donc ceci est absurde et $T = N^0$. Par suite N/T est discret et compact donc fini ce qui prouve que les points fixes de $p(y)$ sont isolés et en nombre fini égal à l'ordre de $\Phi = N/T$.

Reste à calculer l'indice d'un point fixe de $p(y)$. Soit $n \in N$, pour que $p(g)\bar{n} = \bar{n}$, il faut et il suffit que $g \in nTn^{-1} = T$, donc T est le stabilisateur de $\bar{n}$ donc si $\mathcal{A}$ est l'algèbre de Lie de T , l'espace tangent en $\bar{n}$ à G/T s'identifie à $\mathcal{G}/\mathcal{A}$ et la transformation linéaire tangente M correspondant à $p(y)$ à l'opérateur déduit de $\text{ad } y$ par passage au quotient. Soit f une forme quadratique définie positive sur $\mathcal{G}$ invariante par le groupe adjoint et $\mathcal{J}$ l'orthogonal de $\mathcal{A}$ pour f ; $\text{ad } y$ conserve la forme f et laisse invariant le sous-espace $\mathcal{A}$ de $\mathcal{G}$; donc aussi le sous-espace $\mathcal{J}$ et l'on peut identifier $\mathcal{J}$ et $\mathcal{G}/\mathcal{A}$ M devenant

alors la restriction de $\text{ad } y$ à $\mathfrak{p}$. Or $\text{ad } y$ n'a pas de valeur propre égale à 1 dans $\mathfrak{p}$, car ceci signifierait qu'il existe $X \in \mathfrak{p}$ avec $\text{ad } y.X = X$, d'où $\text{ad } t.X = X$ pour $t \in T$ puisque y engendre T et finalement X commuterait à $\mathcal{A}$, ce qui contredirait le fait que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathcal{G}$. Par suite les valeurs propres de $\text{ad } y$ dans $\mathfrak{p}$ sont -1 avec la multiplicité α et des couples de racines conjuguées $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$ d'où $\det(M - I) = (-1)^n \det(I - M) = 2^\alpha \prod_i (1 - \lambda_i)(1 - \bar{\lambda}_i)(-1)^n$ qui a le signe de $(-1)^n$; il en résulte que $L(p(y)) = (-1)^n \sum k_i$ est égal à l'ordre du groupe $\Phi = N/T$ puisque les points fixes de $p(y)$ sont les classes nT .

C.Q.F.D.

Remarque. $p(x)$ étant homotope à l'identité, nous avons au fond démontré que la caractéristique d'Euler-Poincaré de G/T était égale à $[\Phi]$, et il nous suffisait de savoir qu'elle était différente de 0, ce qui résulte du fait que les nombres de Betti de G/T sont nuls en dimension impaires (ce dernier fait se prouve par récurrence sur $\dim G$ en utilisant la théorie des espaces symétriques, -cf. thèse de A. Borel, lemme 26-1, - ou en utilisant une décomposition cellulaire analytique de G/T). On peut encore montrer que cette caractéristique est > 0 par un raisonnement de géométrie différentielle (courbure).

3.- Autres démonstrations.

a) On en trouvera une dans Chevalley, t.III, utilisant sa caractérisation des sous-groupes de Cartan.

b) Comme tous les conjugués de T par les éléments d'une même classe à gauche gN de G/N , sont égaux entre eux, introduisons le quotient P de $G \times T$ par la relation d'équivalence $(g, t) \sim (gn, n^{-1}tn)$ pour $n \in N$. P est un espace fibré de fibre T et de base G/N . Tout revient à montrer que l'application φ de P dans G déduite par passage au quotient de l'application $(g, t) \rightarrow gtg^{-1}$ de $G \times T$ dans G applique P sur G . Comme P et G sont deux variétés compactes de même dimension (puisque N/T est fini), φ possède un degré homologique (mod.2) et il suffit de voir que ce degré est $\neq 0$. Or si x est un générateur de T , $x = gtg^{-1}$ équivaut à $g^{-1}xg \in T$, donc $g^{-1}Tg = T$, c'est-à-dire $g \in N$. Autrement dit, $\varphi^{-1}(x)$ est la classe dans P du point (e, x) de $G \times T$. Comme il suffit de voir que le degré local en ce point est $+1$, i.o. que φ est un homéomorphisme local au voisinage de ce point, ou que l'application

linéaire tangente est un isomorphisme, (ce qui équivaut à dire qu'elle est surjective pour des raisons de dimension), on voit qu'il suffit de constater que tout vecteur tangent en x à G est image par l'application $(g, t) \rightarrow gtg^{-1}$ d'un vecteur tangent à $G \times T$. Si X est un vecteur tangent générique à G en e et Y un vecteur tangent générique à T en e , le vecteur $(X, \delta_x * Y)$ est un vecteur tangent générique à $G \times T$ en (e, x) ; l'image de ce vecteur est $X * \delta_x + \delta_x * Y - \delta_x * X$
 $= \delta_x * (\text{ad } \bar{x}^{-1} X - X + Y)$. $\text{ad } \bar{x}^{-1}$ est une transformation orthogonale pour la forme quadratique f , donc $\mathcal{G}$ est somme directe du sous-espace image de $\text{ad } \bar{x}^{-1} - I$ et du sous-espace des invariants de $\text{ad } \bar{x}^{-1}$ qui n'est autre que $\mathcal{A}$ puisque tout ce qui commute à x est dans T .

c) Si on veut seulement prouver le corollaire 1, on procède ainsi. Munissons G d'une structure d'espace de Riemann biinvariante. Une symétrie par rapport à un point a (i.e. la transformation $x \rightarrow ax^{-1}a$) est un automorphisme de la structure Riemannienne, et deux points symétriques par rapport à a (et suffisamment voisins de a) sont sur une géodésique passant par a . Prenons 2 points a et b sur un même sous-groupe à un paramètre, b étant équidistant de a et de l'origine e ; la symétrie par rapport à b conserve le sous-groupe, donc échange e et a : b se trouve sur la géodésique passant par e et a , et de même tous les points du sous-groupe qui divisent $\overline{e.a}$ dans le rapport $q/(2^n)$. Donc cette géodésique est confondue avec le sous-groupe à un paramètre. Donc toutes les géodésiques sont des translatées des sous-groupes à un paramètre; or il y a une géodésique joignant e et x quelconque de G (Hilbert); donc tout point se trouve sur un sous-groupe à un paramètre, donc dans un tore maximal.

4.- Compléments au théorème 1.

Théorème 2 : Soit G compact connexe, T un tore maximal de G , M un sous-ensemble quelconque de T , et soit $g \in G$ tel que $gMg^{-1} \subset T$. Alors il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $nmn^{-1} = gmg^{-1}$ pour tout m dans M .

Corollaire : Si deux éléments de T sont conjugués, ils sont transformés l'un de l'autre par un élément $\sigma \in \Phi = N/T$.

(Il suffit de prendre pour M l'un de ces éléments).

En d'autres termes, soit $\mathcal{C}$ l'espace des classes d'éléments conjugués, et soit Ω le quotient de T par la relation d'équivalence définie par Φ . On a alors $\Phi \simeq \mathcal{C}$. En particulier, l'espace des fonctions continues

centrales sur G est identique (par restriction) à l'espace des fonctions continues sur T , invariantes par Φ . En particulier, il y a une mesure unique ν sur T , invariante par Φ , et telle que l'on ait

$$\int_G \varphi(x) dx = \int_T \varphi(t) d\nu(t) \quad (dx \text{ mesure de Haar de } G) \quad (\text{La détermination explicite de } d\nu \text{ est importante pour la théorie des caractères, cf. exp. 21}).$$

Démonstration du théorème 2. Soit G' le sous-groupe de G formé des éléments qui commutent à M (i.e. tels que $gm = mg$ pour tout m de M), G'' sa composante connexe de l'élément neutre. G'' est un groupe de Lie compact, connexe, contenant T ; si $x \in g^{-1}Tg$, ($x = g^{-1}tg$) on a $xm = mx$ car gmg^{-1} commute à t ($m \in M$). Donc G'' contient T et $T' = g^{-1}Tg$, qui sont des tores maximaux de G et a fortiori de G'' , et qui par suite sont conjugués dans G'' qui est connexe : il existe donc $g'' \in G''$ avec $g''g^{-1}Tgg''^{-1} = T$; $gg''^{-1} = n \in N$, et $nmn^{-1} = gmg^{-1}$ car $g'' \in G'$ et commute à m , c.q.f.d.

Théorème 3 : Soit A un tore quelconque, et $x \in G$ connexe, commutant à A . Alors il y a un tore maximal T contenant A et x .

En effet, soit A' l'adhérence du sous-groupe engendré par A et x . A' est compact et abélien. Soit A'_0 sa composante connexe de l'élément neutre (qui est un tore). On sait que $A' \approx A'_0 \oplus$ un groupe abélien fini. On en conclut que x est dans un sous-groupe A'' de A' du type $A'_0 \oplus$ sous-groupe cyclique, soit $A'' = A'_0 \oplus Z_n$. Mais un tel groupe est topologiquement monogène (i.e. a un élément dont les puissances sont partout denses) : il suffit de prendre un générateur θ de A'_0 , un générateur z de Z_n , de choisir un $y \in A'_0$ tel que $ny = \theta$ (notation additive), et de considérer l'élément (y, z) . D'après le corollaire 1 du th. 1, ce générateur est dans un tore maximal T , donc A'' aussi, et aussi x et A (puisque $A \subset A'_0$), c.q.f.d.

Corollaire 1 : Tout élément de G commutant avec un tore maximal T appartient à T .

Corollaire 2 : Le centre de G est contenu dans tout tore maximal de G . (car le centre commute à tout tore maximal).

Corollaire 3 : Le groupe $\Phi = N/T$ opère fidèlement sur T (car $n^{-1}tn = t$ pour tout $t \in T$ signifie que n commute à T , donc est dans T d'après le corollaire 1).

Corollaire 4 : Un tore maximal est en même temps un sous-groupe abélien maximal.

Corollaire 5 : Le commutant d'un tore est connexe.

(car ce commutant est réunion des tores maximaux de G contenant A).

Corollaire 6 : Si G est semi-simple, $\Phi = N/T$ est isomorphe au groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$.

D'après le corollaire 3, le groupe Φ est représenté fidèlement comme groupe d'automorphismes T par les automorphismes intérieurs. Si $\mathfrak{U}_G$ est l'algèbre complexifiée de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{A}_G$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{U}_G$; soit $\mathcal{I}'$ le groupe d'automorphismes de $\mathfrak{U}_G$ induits par les automorphismes intérieurs de N , $\mathcal{I}$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{U}_G$ induits par les éléments de $\text{Int } \mathfrak{U}_G$ qui conservent $\mathcal{A}_G$ (cf. exp. 16). Il est clair que $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$ et d'autre part d'après les résultats de l'exp. 16, $\mathcal{I}'$ contient les symétries S_α donc le groupe de Weyl $\mathcal{G}$; comme on a vu à l'exp. 16 que $\mathcal{G} = \mathcal{I}$ et qu'on vient de voir que $\mathcal{G} \subset \mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$, on a bien $\mathcal{G} = \mathcal{I}'$.

Nous allons pour terminer montrer comment à l'aide de ces résultats on peut calculer le centre d'un groupe de Lie compact semi-simple simplement connexe G ; soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de Cartan, T le tore correspondant, C le centre de G . D'après le corollaire 2, $C \subset T$; d'autre part, tout caractère de T (i.e. tout homomorphisme de T dans le groupe des nombres complexes de module 1) s'obtient par restriction d'une représentation de dimension finie de G (T.L.G. prop. 4 p. 191) donc l'ensemble des caractères de T est identique à l'ensemble des poids des représentations de G . On sait par les exposés 17 et 21 que ces poids sont les caractères e^λ pour les formes linéaires λ sur $\mathcal{A}_G$ qui vérifient $2 < \lambda, \alpha_i / \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$ entier pour toute racine simple α_i . Le groupe des caractères de T est donc le groupe abélien discret ayant pour générateurs les e^{λ_i} où l'on rappelle que $2 < \lambda_i, \alpha_j / \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$.

Les caractères de T constants sur C sont évidemment les poids des représentations de G constantes sur C ; or la représentation adjointe de G/C dans $\mathfrak{g}$ est fidèle donc d'après T.L.G. p. 190 Prop. 3, toutes les représentations de G constantes sur C , i.e. les représentations de G/C s'obtiennent à partir de la représentation adjointe par produit tensoriel, somme directe, réduction, et passage à la contragrédiente, en particulier les poids de ces représentations sont les combinaisons linéaires à coefficients entiers des racines. Comme tout caractère de C se prolonge en un caractère de T , le groupe des caractères de C est isomorphe au quotient du groupe des caractères de T par le sous-groupe des caractères constants

sur C , autrement dit au groupe quotient du groupe engendré par les e^{λ_i} par le sous-groupe engendré par les e^{α_i} . Or $\alpha_i = - \sum_j a_{ji} \lambda_j$ où les a_{ij} sont les entiers de Cartan de $\mathcal{U}$ et adoptant une notation additive, on voit que le groupe des caractères de C (et donc aussi C qui lui est isomorphe) admet des générateurs m_i soumis aux seules relations $\sum_i a_{ij} m_i = 0$

Les entiers de Cartan sont déterminés par les schémas de Dynkin et en désignant par Z_n le groupe cyclique à n éléments, on a le tableau suivant :

Type	Groupe C	
A_n		Z_{n+1}
B_n		Z_2
C_n		Z_2
D_{2n}		$Z_2 + Z_2$
D_{2n+1}		Z_4
E_6		Z_3
E_7		Z_2

les groupes C des autres types sont réduits à l'élément neutre.
