

SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

P. CARTIER

Théorème de conjugaison des algèbres de Cartan

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 15, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A18_0

© Séminaire "Sophus Lie"

(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 15

THÉORÈME DE CONJUGAISON DES ALGÈBRES DE CARTAN

(Exposé de P. CARTIER, le 8.3.1955)

1.- Préliminaires de géométrie algébrique

Nous rappellerons quelques définitions et résultats du livre de Chevalley sur les groupes algébriques.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K infini ; $K[V]$ désigne l'algèbre de fonctions (à valeurs dans K) engendrée par les fonctions constantes et les fonctions linéaires. $K[V]$ est une algèbre graduée isomorphe à l'algèbre symétrique sur le dual V^* de V , les éléments de degré 0 étant les constantes et ceux de degré 1 les fonctions linéaires. Les éléments de $K[V]$ s'appellent les fonctions polynômes sur V ce sont les fonctions qui s'écrivent sous la forme d'un polynôme par rapport à un système de coordonnées quelconque.

Une application f de V dans un espace W de dimension finie est dite polynomiale si $P \circ f \in K[V]$ pour toute $P \in K[W]$; pour qu'il en soit ainsi, il suffit que $P \circ f \in K[V]$ pour P linéaire sur W . $P \rightarrow P \circ f$ est un homomorphisme de $K[W]$ dans $K[V]$ qui envoie 1 sur 1 ; réciproquement, soit φ un homomorphisme de $K[W]$ dans $K[V]$ avec $\varphi(1) = 1$. Si P est linéaire sur W $\varphi(P)(v)$ est pour $v \in V$ fixe une fonction linéaire en P donc $\varphi(P)(v) = \langle P, f(v) \rangle$ où f est donc une application polynomiale de V dans W ; or on a $\varphi(P) = P \circ f$ pour P constante et P linéaire, donc pour toute $P \in K[W]$ puisque ces fonctions engendrent $K[W]$. En particulier si $V = (0)$ $K[V] \approx K$ donc les homomorphismes $\neq 0$ de $K[W]$ dans K correspondent aux éléments de W .

Si $f : V \rightarrow W$ est polynomiale, pour toute P linéaire sur W , on peut décomposer $P \circ f$ en ses composantes homogènes, d'où l'on voit facilement que $f = \sum_n f_n$, f_n étant une application polynomiale telle que $P \circ f_n$ soit la composante de degré n de $P \circ f$. Si f et g sont polynomiales, il est clair que $g \circ f$ l'est aussi.

Soit $f = \sum_{m \geq m_0} f_m$ et $g = \sum_{n \geq n_0} g_n$ ($m_0 \geq 1$), je vais montrer que les composantes de degré $< m_0 n_0$ de $h = g \circ f$ sont nulles et que $h_{m_0 n_0} = g_{m_0} \circ f_{n_0}$;

comme il faut examiner les composantes de $P \circ g = (P \circ g) \circ f$ pour P linéaire on se ramène tout de suite au cas où g est à valeurs dans K . Soit d'abord g homogène de degré n $g = \sum_j \prod_i P_{i,j}$ où les P sont linéaires. Mais alors

$$P_{i,j} \circ f = \sum_m P_{i,j} \circ f_m \quad \text{et} \quad g \circ f = \sum_j \prod_i P_{i,j} \circ f = \sum_j \sum_{(m_i)} \prod_i P_{i,j} \circ f_{m_i} \quad \text{chaque terme}$$

de cette somme ayant le degré $\sum_i m_i \geq nm_0$ car les m_i sont au moins égaux à m_0 , f n'ayant pas de termes de degré $< m_0$. Donc il n'y a pas de termes de degré $< m_0 n$ dans h et pour obtenir le terme de degré $m_0 n$, il faut faire tous les m_i égaux à m_0 car f n'a pas de termes de degré 0 ($m_0 \geq 1$) c'est-à-dire qu'on obtient les termes du développement de $g \circ f_{m_0}$. Comme

$g = \sum g_n$ les g_n étant homogènes de degré n , on passe de là immédiatement au cas général.

Si f est une application polynomiale de V dans W , $f(v + X) - f(v) = \Delta f(X, v)$ est polynomiale en X pour $v \in V$ fixé et sa composante de degré 1, soit $df(X, v) = (df)_v(X)$ s'appelle la différentielle de f en v ; $(df)_v$ est une fonction linéaire de X . Soit $h = g \circ f$ et $w = f(v)$ on a alors

$$(1) \quad \Delta h(X, v) = g(f(v + X)) - g(f(v)) = g(w + \Delta f(X, v)) - g(w) \\ = \Delta g(\Delta f(X, v), w)$$

Or Δf et Δg sont sans termes constants donc en prenant les termes de degré 1 dans l'égalité (1) on trouve $(dh)_v = (dg)_w \circ (df)_v$.

Supposons que pour un v donné, $(df)_v$ applique V sur W et prenons dans la formule (1) une fonction polynôme P pour h . Si $P \neq 0$, $\Delta P(X, w) \neq 0$; soit ΔP_m son terme de plus bas degré. D'après la formule (1) et ce qu'on a déjà démontré, le terme de degré m de Δh est égal à $\Delta P_m \circ (df)_v$ qui est différent de 0 car $(df)_v$ applique V sur W , donc $\Delta h \neq 0$ et $h = P \circ f \neq 0$.

Lemme : Soit f une application polynôme de V dans W telle que pour un v donné $(df)_v$ applique V sur W . Alors si le corps K est algébriquement clos pour toute fonction polynôme $P \neq 0$ sur V , il existe une fonction polynôme $Q \neq 0$ sur W telle que si w n'annule pas Q , il soit l'image par f d'un $v \in V$ qui n'annule pas P .

a) D'après ce qu'on vient de voir, $P \rightarrow P \circ f$ est une application biunivoque de $K[W]$ dans $K[V]$. Les éléments de V correspondant aux homomorphismes $\neq 0$ de $K[V]$ dans K , il suffit de montrer qu'on peut trouver $Q \in K[W]$.

non nul tel que tout homomorphisme de $K[W]$ dans K qui n'annule pas Q se prolonge en un homomorphisme de $K[V]$ dans K qui n'annule pas P .

b) Posons $A = K[V]$ et appelons B l'image de $K[W]$ dans A . A a un nombre fini $z_1 \dots z_h$ de générateurs ; posons $A_k = B[z_{k+1}, \dots, z_h]$ donc $A_0 = A$, $A_h = B$ et $A_{k-1} = A_k[z_k]$. Si l'on suppose qu'on sache faire le pas de A_k à A_{k+1} on trouvera successivement $P_1 \in A_1$, tel que tout homomorphisme de A_1 dans K qui n'annule pas P_1 se prolonge en un homomorphisme de A dans K qui n'annule pas $P_0 = P$, puis $P_2 \in A_2$ tel que tout homomorphisme de A_2 dans K qui n'annule pas P_2 se prolonge en un homomorphisme de A_1 dans K qui n'annule pas P_1 , etc...

c) Soit donc C et $D = C[z]$ deux anneaux d'intégrité et $p \neq 0$ dans D . Si z ne vérifie aucune équation algébrique à coefficients dans C , D est l'anneau des polynômes en z à coefficients dans C et p a au moins un coefficient $a \neq 0$. Soit f un homomorphisme de C dans K et $\bar{P}$ le polynôme à coefficients dans K obtenu en appliquant f aux coefficients de p . Si $f(a) \neq 0$, on a $\bar{P} \neq 0$, donc il existe $b \in K$ avec $\bar{P}(b) \neq 0$ et si $\bar{f}$ est l'homomorphisme bien déterminé de D dans K qui prolonge f et envoie z sur b , on a $\bar{f}(p) = \bar{P}(b) \neq 0$, donc tout homomorphisme de C dans K qui n'annule pas a se prolonge en un homomorphisme de D dans K qui n'annule pas p .

Si z vérifie au moins une équation algébrique sur C , pour définir un homomorphisme $\bar{f}$ de D dans K prolongeant un homomorphisme donné f de C dans K et vérifiant $\bar{f}(z) = b$, il faut chercher $b \in K$ vérifiant toutes les équations $\bar{P}(b) = 0$ où $\bar{P}$ est le polynôme obtenu en appliquant f aux coefficients d'un polynôme P annulé par z . Soit $P(z) = 0$ une équation de degré minimal pour z , $P(Z) = \sum_{i=1}^n a_i Z^i$; si Q est un autre polynôme

l'identité de la division s'écrit $a_n^k Q(Z) = U(Z)P(Z) + V(Z)$ avec k assez grand et $\deg V < \deg P$. Si $Q(z) = 0$, on en déduit $V(z) = 0$, donc $V = 0$ par raison de degré et $a_n^k Q(Z) = U(Z)P(Z)$; par suite si $f(a_n) \neq 0$ et $\bar{P}(b) = 0$ on en déduit $f(a_n)^k \bar{Q}(b) = 0$ et donc $\bar{Q}(b) = 0$. Or puisque K est algébriquement clos, il existe $b \in K$ avec $\bar{P}(b) = 0$, donc f a un prolongement $\bar{f}$ pourvu que $f(a_n) \neq 0$. Maintenant tout élément de D vérifie une équation algébrique sur C puisque le corps des quotients de D est algébrique sur celui de C ; soit donc $H(p) = 0$, H étant une équation de degré minimum pour p , donc en particulier $H(0) \neq 0$. Or de $H(p) = 0$ on tire $\bar{H}(\bar{f}(p)) = 0$ d'où si $f(H(0)) \neq 0$ $\bar{f}(p) \neq 0$ car $\bar{H}(0) = f(H(0)) \neq 0$.

En résumé si f n'annule pas $a_n H(0)$, elle n'annule ni l'un ni l'autre et se prolonge en $\bar{f}$ avec $\bar{f}(p) \neq 0$

C.Q.F.D.

2.- Application aux algèbres de Lie

Le corps K est algébriquement clos de caractéristique 0. Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie sur K et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \neq 0} \mathcal{G}^\alpha$ la décomposition associée. On sait que $[\mathcal{G}^\alpha, \mathcal{G}^\beta] \subset \mathcal{G}^{\alpha+\beta}$, donc pour $X \in \mathcal{G}^\alpha$, $\text{ad} X$ applique $\mathcal{G}^\beta$ dans $\mathcal{G}^{\alpha+\beta}$ et $\text{ad}^k X$ applique $\mathcal{G}^\beta$ dans $\mathcal{G}^{\beta+k\alpha}$; comme les racines de $\mathcal{G}$ sont en nombre fini, il en résulte que $\text{ad} X$ est nilpotent. On peut donc former $\exp \text{ad} X = \sigma(X)$ qui est un automorphisme de $\mathcal{G}$ (cf. Exp. 5); numérotons les racines de $\mathcal{G}$ de manière arbitraire et considérons l'application $f: (X_1, \dots, X_n, H) \rightarrow \sigma(X_1) \dots \sigma(X_n) \cdot H$ de $\mathcal{G}^{\alpha_1} \times \dots \times \mathcal{G}^{\alpha_n} \times \mathfrak{h}$ dans $\mathcal{G}$. Nous allons calculer la différentielle de f au point $(0, \dots, 0, H_0)$, or

$$(2) \quad f(X_1, \dots, X_n, H + H_0) = \sum [X_1^{m_1}, [X_2^{m_2} \dots H] \dots] / m_1! + \\ + \sum [X_1^{m_1}, [\dots H_0] \dots] / m_1! \quad \text{où l'on pose } [X^k, Y] = \text{ad}^k X \cdot Y$$

Les termes contenant H sont de degré $m_1 + \dots + m_n + 1$ et ceux contenant H_0 de degré $m_1 + \dots + m_n$. Les termes de degré 1 de (2) sont donc H et $[X_i, H_0]$ donc $df(X_1, \dots, X_n, H; 0, \dots, 0, H_0) = H + \sum_i [X_i, H_0]$; supposons que $\prod_{\alpha} \alpha(H_0) \neq 0$ alors le déterminant de $\text{ad} H_0$ dans $\sum_{\alpha} \mathcal{G}^\alpha$ qui est égal à $\prod_{\alpha} \alpha(H_0)$ est différent de 0 et $df(X, H; 0, H_0) = 0$ implique $X_i = 0$. df est donc un isomorphisme de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ au point $(0; H_0)$ ce qui permet d'appliquer le lemme: donc si G est le groupe d'automorphismes de $\mathcal{G}$ engendré par les $\sigma(X)$ pour $X \in \mathcal{G}^\alpha$, il existe un polynôme $Q \neq 0$ sur $\mathcal{G}$ tel que tout élément de $\mathcal{G}$ qui n'annule pas Q soit conjugué par G d'un élément H de $\mathfrak{h}$ avec $\prod_{\alpha} \alpha(H) \neq 0$. L'ensemble des éléments réguliers de $\mathcal{G}$, soit R , est défini par la condition $\varphi_k(x) \neq 0$ où φ_k est une fonction polynôme sur $\mathcal{G}$ non nulle; d'autre part R est invariant par tous les automorphismes de $\mathcal{G}$ par sa définition même, en particulier il est invariant par G . Soit donc $x \in \mathcal{G}$ avec $Q(x) \varphi_k(x) \neq 0$, on a $\varphi_k(x) \neq 0$ donc x est régulier et $Q(x) \neq 0$ donc $x = g \cdot H$ avec $\prod_{\alpha} \alpha(H) \neq 0$ et $g \in G$ donc H est régulier.

Or $\mathcal{O}(H, 0) = \mathfrak{h} = \mathcal{O}(H', 0)$ si $\prod \alpha(H') \neq 0$ donc H' est aussi régulier ; en résumé tout $x \in \mathcal{O}$ régulier tel que $Q(x) \neq 0$ est conjugué par G d'un élément régulier de $\mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{h}'$ est une autre algèbre de Cartan, il existe de même Q' tel que si $Q'(x) \neq 0$, x régulier est conjugué par G' d'un élément régulier de $\mathfrak{h}'$. G et G' sont tous deux contenus dans le groupe A d'automorphismes de $\mathcal{O}$ engendré par les $\exp \operatorname{ad} X$ pour $\operatorname{ad} X$ nilpotent. Si $Q(x)Q'(x)$ est non nul, x régulier est conjugué par A à la fois d'un élément régulier H de $\mathfrak{h}$ et d'un élément régulier H' de $\mathfrak{h}'$. Donc H et H' sont conjugués par A et comme $\mathfrak{h} = \mathcal{O}(H, 0)$ et $\mathfrak{h}' = \mathcal{O}(H', 0)$ $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ sont conjuguées par A . Finalement, on a le théorème suivant :

Théorème : Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{O}$; tout élément H de $\mathfrak{h}$ qui n'annule aucune des racines de $\mathcal{O}$ suivant $\mathfrak{h}$ est régulier et donc $\mathfrak{h} = \mathcal{O}(H, 0)$. De plus deux sous-algèbres de Cartan de $\mathcal{O}$ sont conjuguées par un élément du groupe A d'automorphismes de $\mathcal{O}$ engendré par les $\exp \operatorname{ad} X$ ($\operatorname{ad} X$ étant nilpotent)
