

SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

F. BRUHAT

Poids et racines, II

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 10, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A14_0

© Séminaire "Sophus Lie"

(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 10

POIDS ET RACINES, II

(Exposé de F. BRUHAT, le 25.1.55).

1.- Séries de racines.

K est toujours un corps algébriquement clos de caractéristique 0, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple dont $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan fixée une fois pour toutes.

$\alpha \neq 0$ est une racine fixe dans la suite. Une famille S de racines composée de l'ensemble des racines de la forme $\varphi + k\alpha$ (k entier de signe quelconque) est appelée une série (ou une " ~~α~~ -série"). En vertu de la formule $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ le sous-espace $\sum_{\alpha \in S} \mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_S$ est invariant par $\text{ad } \mathfrak{g}^\alpha$ et $\text{ad } \mathfrak{h}$. Soit $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ deux éléments $\neq 0$; on suppose de plus que $\langle E_\alpha, E_{-\alpha} \rangle = -1$ d'où $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = -H'_\alpha$ $[H'_\alpha, E_\alpha] = \langle \alpha, \alpha \rangle E_\alpha$ $[H'_\alpha, E_{-\alpha}] = -\langle \alpha, \alpha \rangle E_{-\alpha}$.

Ceci nous conduit à étudier les représentations d'une algèbre de Lie $\mathcal{A}$ ayant une base X, Y, H avec les relations de structure $[X, Y] = -H$ $[H, X] = aX$ $[H, Y] = -aY$ (avec $a > 0$). $\mathcal{A}$ est simple : en effet si un idéal $\mathfrak{J}$ contient un élément $Z \neq 0$ qui n'est pas un multiple de H $[H, Z] \in \mathfrak{J}$ est une combinaison linéaire $\neq 0$ de X et Y . Appliquant soit $\text{ad } X$ soit $\text{ad } Y$ suivant les cas on trouve un multiple de $[X, Y] = -H$ donc $H \in \mathfrak{J}$ mais alors $X = \frac{1}{a}[H, X] \in \mathfrak{J}$ $Y = -\frac{1}{a}[H, Y] \in \mathfrak{J}$ et $\mathcal{A} = \mathfrak{J}$. Donc toute représentation de $\mathcal{A}$ est complètement réductible et il suffit d'étudier les représentations irréductibles de $\mathcal{A}$.

On appelle $\mathcal{V}$ la droite engendrée par H et on définit une forme linéaire sur $\mathcal{V}$ par $\alpha(H) = a$. Soit (ρ, V) une représentation de dimension finie de $\mathcal{A}$; on posera $\rho(X) = X$, etc... et $V_\lambda = V(H, \wedge(H))$ pour toute forme linéaire $\wedge$ sur $\mathcal{V}$. On a $X \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$ car si $e \in V_\lambda$

$$HXe = XHe + aXe = (\wedge(H) + a)(Xe) = \langle \wedge + \alpha, H \rangle Xe$$

De même $Y \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda-\alpha}$. Or il existe au moins un vecteur propre pour H donc un $V_\lambda \neq (0)$. Mais des formules $XV_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$ $YV_\lambda \subset V_{\lambda-\alpha}$ on déduit que

$\sum_{\Lambda} V_{\Lambda}$ est un sous-espace invariant $\neq 0$ de V donc $V = \sum_{\Lambda} V_{\Lambda}$ si la représentation est irréductible. Si elle n'est pas irréductible, elle est complètement réductible et on a encore $V = \sum_{\Lambda} V_{\Lambda}$ dans ce cas.

Etudions le cas de V irréductible. Soit parmi les poids Λ de V , Λ_0 celui pour lequel $\Lambda_0(H)$ est maximum. Comme $\alpha(H) = a > 0$ $\Lambda_0 + \alpha$ n'est plus un poids et si $e_0 \in V_{\Lambda_0}$ $Xe_0 = 0$. Posons $e_k = Y^k e_0$; j'affirme que $Xe_{k+1} = \mu_k e_k$. En effet c'est vrai pour $k = -1$ si $\mu_{-1} = 0$ $e_{-1} = 0$; supposons cette formule vraie pour $k < r$ alors

$$\begin{aligned} Xe_{r+1} &= XYe_r = YXe_r - He_r = \mu_{r-1} Ye_{r-1} - \langle \Lambda_0 - r\alpha, H \rangle e_r \\ &= \mu_r e_r \end{aligned}$$

avec $\mu_r = \mu_{r-1} + \langle r\alpha - \Lambda_0, H \rangle$ d'où immédiatement

$$\begin{aligned} \mu_k &= \sum_{r=0}^k \langle r\alpha - \Lambda_0, H \rangle = \frac{k+1}{2} (k\alpha(H) - 2\Lambda_0(H)) \\ &= \frac{k+1}{2} (k - m)\alpha(H) \end{aligned}$$

On a posé $m = 2 \frac{\Lambda_0(H)}{\alpha(H)}$. Comme V est de dimension finie on a $e_J \neq 0$ $e_{J+1} = 0$ d'où $\mu_J e_J = Xe_{J+1} = 0$ $\mu_J = 0$ soit $m = J$ donc m est un entier ≥ 0 . Si l'on pose $f_k = (-1)^k e_k (m-k)!$ pour $0 \leq k \leq m$ on a les formules de transformation suivantes

$$X f_k = \frac{1}{2} k \alpha(H) f_{k-1} \quad Y f_k = (m - k) f_{k+1}$$

$$H f_k = \langle \Lambda_0 - k\alpha, H \rangle f_k = \frac{1}{2} \alpha(H) (m - 2k) f_k \quad 0 \leq k \leq m$$

formules qui englobent le cas $k = 0$ et $k = m$. Comme V est irréductible et que les formules précédentes montrent que le sous-espace engendré par $f_0 \dots f_m$ est invariant les f_k forment une base de V . Réciproquement on vérifie facilement que les formules (2) définissent effectivement une représentation de $\mathcal{U}$ dans un espace de base $f_0 \dots f_m$; cette représentation est irréductible car un sous-espace W invariant par H est engendré par les vecteurs de poids qu'il contient, donc $f_k \in W$ pour un certain k mais alors f_e est multiple de $X^{k-e} f_k$ pour $e \leq k$ et de $Y^{e-k} f_k$ pour $e \geq k$. Donc il n'y a pas de sous-espace invariant propre.

Théorème 1. — Soit (ρ, V) une représentation de dimension finie de l'algèbre simple $\mathcal{U}$. Elle jouit des propriétés suivantes :

- 1) $V = \sum_{\Lambda} V_{\Lambda}$; pour tout poids Λ de V $2 \frac{\Lambda(H)}{\alpha(H)}$ est un entier
- 2) L'ensemble des poids de V est une α -série d'extrémités $\Lambda_0, -\Lambda_0$ et "sans trous".
- 3) Si Λ est un poids, il existe un poids Λ' tel que $\Lambda(H) = -\Lambda'(H)$ et $\dim V_{\Lambda} = \dim V_{\Lambda'}$.
- 4) Si Λ et $\Lambda + \alpha$ sont des poids $\rho(X) V_{\Lambda} \neq 0$. De même si Λ et $\Lambda - \alpha$ sont des poids $\rho(Y) V_{\Lambda} \neq 0$.
- 5) Si V est irréductible et que i soit le plus petit entier tel que $\rho(X)^{i+1} v = 0$ ($v \in V_{\Lambda}$) et j le plus petit entier tel que $\rho(Y)^{j+1} v = 0$ alors $\rho(X) \rho(Y) v = \frac{1}{2}(i+1)j\alpha(H)v$

Il est clair qu'il suffit de démontrer ces assertions lorsque V est irréductible car toute représentation de $\mathcal{G}$ est complètement réductible. On a démontré que $2 \frac{\Lambda_0(H)}{\alpha(H)}$ est un entier. D'autre part $f_0 \in V_{\Lambda_0}$ donc $f_k \in V_{\Lambda_0 - k\alpha}$ donc l'ensemble des poids est $\Lambda_0, \Lambda_0 - \alpha, \dots, \Lambda_0 - m\alpha$ mais $2 \frac{\Lambda_0(H)}{\alpha(H)} = m$ donc $\Lambda_0 - m\alpha = -\Lambda_0$. De plus $\Lambda_0 - k\alpha = -(\Lambda_0 - (m-k)\alpha)$ pour la même raison. Enfin si $\Lambda = \Lambda_0 - k\alpha$ $2 \frac{\Lambda(H)}{\alpha(H)} = m - 2k$ est un entier. Compte tenu de ce que les V_{Λ} sont de dimension 1 ceci démontre 1), 2), 3).

Si $\Lambda + \alpha$ est un poids, c'est que $\Lambda = \Lambda_0 - k\alpha$ avec $k \geq 1$ mais alors $\rho(X) f_k \neq 0$ et $f_k \in V_{\Lambda}$. De même si $\Lambda - \alpha$ est un poids c'est que $k \leq m-1$ donc $\rho(Y) f_k \neq 0$. Ceci démontre 4). Enfin si $v \in V_{\Lambda}$ $\Lambda = \Lambda_0 - k\alpha$ le plus petit entier i tel que $\rho(X)^{i+1} v = 0$ est égal à k de même $j = m - k$ et les formules (1) montrent que

$$\begin{aligned} \rho(X) \rho(Y) f_k &= (m - k) \rho(X) f_{k+1} = \frac{1}{2} \alpha(H) (k+1) (m-k) f_k \\ &= \frac{1}{2} \alpha(H) (i+1) j f_k \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

On va appliquer le théorème à la représentation de la sous-algèbre $\{E_{\alpha}, E_{-\alpha}, H'_{\alpha}\}$ dans $\mathcal{G}_S$. Pour l'appliquer remarquons que $\alpha(H'_{\alpha}) \neq 0$ donc que deux racines d'une α -série prennent des valeurs différentes pour H'_{α} donc que les racines φ d'une série sont repérées par $\varphi(H'_{\alpha}) = \langle \varphi, \alpha \rangle$

Proposition 1.- Si α, φ sont deux racines de $\mathcal{G}$, $\alpha \neq 0$, la α -série qui contient φ se compose exactement de l'ensemble des $\varphi + k\alpha$ avec

$p \leq k \leq q$. De plus

$$- 2 \frac{\langle \varphi, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = p + q$$

La forme de la α -série résulte du théorème 1. De plus avec les notations du théorème 1 $\wedge_0(H'_\alpha) = (\varphi + q\alpha)(H'_\alpha)$ - $\wedge_0(H'_\alpha) = (\varphi + p\alpha)(H'_\alpha)$ d'où en additionnant

$$2\langle \varphi, \alpha \rangle + (p + q) \langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Proposition 2.- $[\alpha^\alpha, \alpha^\beta] = \alpha^{\alpha+\beta}$ si $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ sont 3 racines $\neq 0$.
On sait que $[\alpha^\alpha, \alpha^\beta] \subset \alpha^{\alpha+\beta}$ et $\dim \alpha^{\alpha+\beta} = 1$. Le 4) du théorème 1 montre alors que $\text{ad } E_\alpha \cdot \alpha^\beta \neq 0$.

Proposition 3.- Si α est une racine $\neq 0$, les seules racines proportionnelles à α sont $0, \pm \alpha$.

Tout d'abord l'ensemble des racines $m\alpha$, m entier de signe quelconque, forme une α -série "sans trous". Donc les m , tels que $m\alpha$ soit racine, forment un intervalle $[p, q]$. Mais $\text{ad } E_\alpha \alpha^\alpha = 0$ donc (4) du théorème 1), 2α n'est pas racine; De même $\text{ad } E_{-\alpha} \alpha^{-\alpha} = 0$ donc -2α n'est pas racine. On a donc $p = 1$ $q = -1$ car on sait que $-\alpha$ est racine.

Soit maintenant $\beta = c\alpha$ ($c \in K$) une racine de α . On sait que $2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 2c$ est un entier. Si c n'est pas entier $c = k + \frac{1}{2}$ et d'après la forme des α -séries, la α -série contenant β contient $\frac{1}{2}\alpha$ et $-\frac{1}{2}\alpha$. Mais α est un multiple entier de $\frac{1}{2}\alpha$ et α est racine ; ceci est donc interdit d'après la première partie de la démonstration.

2.- Systèmes de racines simples.

Nous noterons $\mathfrak{h}_0$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des H'_α ; $\mathfrak{h}_0$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, contenu dans l'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$. On désignera par $\mathfrak{h}_0^*$ le dual (sur $\mathbb{Q}$) de $\mathfrak{h}_0$.

Proposition 4.- La dimension de $\mathfrak{h}_0$ sur K est égale à sa dimension sur $\mathbb{Q}$. La restriction à $\mathfrak{h}_0$ de la forme de Killing $\langle H, H' \rangle$ est définie positive, à valeurs rationnelles. Sur $\mathfrak{h}_0$, toute racine prend des valeurs rationnelles.

Soit Δ l'ensemble des racines non nulles. Rappelons que l'on a :

$$\langle H, H' \rangle = \sum_{\varphi \in \Delta} \varphi(H) \varphi(H')$$

$$\text{En particulier : } \langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle = \sum_{\varphi \in \Delta} \varphi(H'_\alpha)^2 = \sum_{\varphi \in \Delta} r_{\varphi, \alpha}^2 (\langle \alpha, \alpha \rangle)^2$$

et comme $\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle$, on en tire : $\langle \alpha, \alpha \rangle = \frac{1}{\sum_{\varphi \in \Delta} r_{\varphi, \alpha}^2} \in \mathbb{Q}_+$.

On peut d'ailleurs avoir une évaluation plus précise de $\langle \alpha, \alpha \rangle$ en ayant recours à la proposition 1. Notons $p_{\varphi, \alpha}$, $q_{\varphi, \alpha}$ ^{les entiers} qui entrent dans l'énoncé de cette proposition. On a :

$$\varphi(H'_\alpha)^2 = \frac{(p_{\varphi, \alpha} + q_{\varphi, \alpha})^2}{4} \langle \alpha, \alpha \rangle$$

$$\text{d'où : } \langle \alpha, \alpha \rangle = \left(\sum_{\varphi \in \Delta} \frac{(p_{\varphi, \alpha} + q_{\varphi, \alpha})^2}{4} \right)^{-1}.$$

Si $\beta \neq \alpha$, on a :

$$\langle H'_\alpha, H'_\beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = \frac{p_{\beta, \alpha} + q_{\beta, \alpha}}{-2} \langle \alpha, \alpha \rangle \in \mathbb{Q}$$

puisque $\langle \alpha, \alpha \rangle \in \mathbb{Q}$.

Alors, si $X \in \mathfrak{h}_0$, on a $X = \sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha H'_\alpha$ ($a_\alpha \in \mathbb{Q}$), donc

$$\beta(X) = \sum a_\alpha \beta(H'_\alpha) \in \mathbb{Q},$$

ce qui prouve en passant la dernière partie de l'énoncé.

Mais de plus :

$$\langle X, X \rangle = \sum_{\beta \in \Delta} [\beta(X)]^2 \in \mathbb{Q}_+.$$

Si $\langle X, X \rangle = 0$, cela veut dire que $\beta(X) = 0$ pour toute $\beta \in \Delta$; nous avons vu (Exposé n° 9) que ceci implique $X = 0$.

Enfin $\dim_K \mathfrak{h}_0 = \dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{h}_0$. Il suffit de montrer qu'un système $\{H'_{\alpha_i}\}$, libre sur $\mathbb{Q}$, l'est aussi sur K . S'il ne l'était pas, il existerait des $\lambda_i \in K$, non tous nuls, tels que $\sum \lambda_i H'_{\alpha_i} = 0$. On en déduirait $\sum \lambda_i \langle H'_{\alpha_i}, H'_{\alpha_j} \rangle = 0$. Les coefficients de ce système sont rationnels. Donc, s'il admettait des solutions non nulles dans K , il admettrait des solutions dans $\mathbb{Q}$, ce qui est impossible (car les H'_{α_i} seraient liés dans $\mathbb{Q}$).

C.Q.F.D.

Soit $H_1, \dots, H_r$ une base quelconque de $\mathfrak{h}_0$. Etant données deux formes linéaires λ, μ sur $\mathfrak{h}_0$ à valeurs rationnelles, écrivons $\lambda \succ \mu$ si $\lambda(H_i) = \mu(H_i)$ pour $i = 1, 2, \dots, k$ et $\lambda(H_{k+1}) > \mu(H_{k+1})$. $\mathfrak{h}_0^*$ est ainsi muni d'une structure d'ordre total compatible avec sa structure d'espace vectoriel (toute structure d'ordre de cette espèce se construit ainsi).

Définition : Nous dirons qu'une racine $\varphi \succ 0$ est simple s'il est

impossible de la mettre sous la forme $\varphi = \alpha + \beta$, où α, β sont 2 racines > 0 .

Théorème 2.- Il y a exactement r racines simples $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ qui constituent une base de $\mathfrak{h}_0^*$. Toute racine est de la forme $\beta = \sum m_i \alpha_i$ où les m_i sont des entiers de même signe.

Nous allons d'abord démontrer que les racines simples sont linéairement indépendantes, ce qui entraînera qu'il y en a au plus r .

Si α_i, α_j sont 2 racines simples, $\alpha_i - \alpha_j$ n'est pas une racine. Sinon on aurait $\alpha_i - \alpha_j = \beta \in \Delta$. Si $\beta > 0$, on aurait $\alpha_i = \alpha_j + \beta$; si $\beta < 0$, on aurait $\alpha_j = \alpha_i - \beta$, choses toutes deux impossibles (parce que α_i et α_j sont simples).

Appliquons alors la proposition 1, en prenant $\varphi = \alpha_i$, $\alpha = \alpha_j$. On voit que nécessairement $p = 0$. Donc :

$$-2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = q = \text{entier} \geq 0.$$

Donc $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ est ≤ 0 .

Supposons qu'on ait un système lié de racines simples. Cela équivaut à dire que l'on a : $\sum_i a_i \alpha_i = \sum_j b_j \alpha_j$, où les α_i, α_j sont distinctes et où tous les a_i et b_j sont ≥ 0 .

Posons $\gamma = \sum_i a_i \alpha_i$. On voit que :

$$\langle \gamma, \gamma \rangle = \langle \sum_i a_i \alpha_i, \sum_j b_j \alpha_j \rangle = \sum_{i,j} a_i b_j \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$$

Or $\langle \gamma, \gamma \rangle \geq 0$, $a_i b_j \geq 0$, $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \leq 0$. Cette égalité n'est donc possible que si $\langle \gamma, \gamma \rangle = 0$, donc si $\gamma = 0$.

Enfin toute racine $\beta > 0$ est combinaison linéaire à coefficients entiers ≥ 0 des α_i . Car les racines $\beta > 0$ étant en nombre fini et totalement ordonnées, on peut raisonner par récurrence ; si $\beta > 0$ n'est pas simple $\beta = \gamma + \delta$, $\gamma, \delta < \beta$ et par hypothèse de récurrence γ_1 et δ sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs des α_i . En particulier comme les β sous-tendent $\mathfrak{h}_0^*$, il en est de même des α_i .

Le théorème est démontré.

Les racines simples $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ forment un système fondamental de racines ; les $a_{ij} = -2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \geq 0$ sont appelés entiers de Cartan.

On verra dans un exposé ultérieur (cf. groupe de Weyl) que le système Π des racines simples détermine de manière simple le système Σ des racines positives.

On dira que le système Π est décomposable si $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$ et si les sous-espaces vectoriels $E_{\Pi'}$ et $E_{\Pi''}$ engendrés respectivement par les $\alpha_i \in \Pi'$ et par les $\alpha_j \in \Pi''$ sont orthogonaux (au sens de la forme de Killing).

Proposition 5.- Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.:

- a) $\mathfrak{g}$ est simple ;
- b) Π est non décomposable.

Montrons que a) $\Rightarrow$ b). Pour cela supposons que $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$ et que $E_{\Pi'} \perp E_{\Pi''}$. Soient $\alpha' \in \Pi'$, $\alpha'' \in \Pi''$. Je dis que $\pm \alpha' \pm \alpha''$ ne peut être une racine. Nous avons déjà vu que $\alpha' - \alpha''$ n'était pas une racine ; il suffit de l'établir pour $\alpha' + \alpha''$.

Introduisons les nombres p et q qui entrent dans la proposition 1, lorsqu'on prend $\varphi = \alpha'$, $\alpha = \alpha''$. Comme $\alpha' - \alpha''$ n'est pas racine, on a nécessairement $p = 0$. Mais du fait que $E_{\alpha'} \perp E_{\alpha''}$, on a $\langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0$, d'où $q = 0$. Ceci signifie que $\alpha' + \alpha''$ ne saurait être une racine.

Soient $E_{\alpha'} \in \mathfrak{g}^{\alpha'}$, $E_{\alpha''} \in \mathfrak{g}^{\alpha''}$. Puisque $\alpha' + \alpha'' \notin \Delta$, on a $[\mathfrak{g}^{\alpha'}, \mathfrak{g}^{\alpha''}] = 0$. Donc $[E_{\alpha'}, E_{\alpha''}] = 0$. Soit alors $\mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{g}''$) l'idéal de $\mathfrak{g}$ engendré par les $E_{\alpha'}$ (resp. par les $E_{\alpha''}$) ; on a : $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}''] = 0$.

Comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple, cela équivaut à $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{g}'' = \{0\}$. Comme $\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}'' \subset \mathfrak{g}$, cela signifie que $\mathfrak{g}$ n'est pas simple.

Montrons que b) $\Rightarrow$ a). Supposons pour cela que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}''$. Soit $E_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$; on a une décomposition unique $E_{\alpha} = E'_{\alpha} + E''_{\alpha}$, $E'_{\alpha} \in \mathfrak{g}'$, $E''_{\alpha} \in \mathfrak{g}''$. Mais si $H \in \mathfrak{h}$:

$$0 = [H, E_{\alpha}] - \alpha(H) E_{\alpha} = [H, E'_{\alpha}] - \alpha(H) E'_{\alpha} + [H, E''_{\alpha}] - \alpha(H) E''_{\alpha}$$

$$\text{Or } [H, E'_{\alpha}] \in \mathfrak{g}', \quad [H, E''_{\alpha}] \in \mathfrak{g}''.$$

Il faut donc nécessairement que l'on ait :

$$[H, E'_{\alpha}] - \alpha(H) E'_{\alpha} = 0 \quad [H, E''_{\alpha}] - \alpha(H) E''_{\alpha} = 0.$$

Autrement dit, $E'_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, $E''_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$; et comme $\dim \mathfrak{g}^{\alpha} = 1$, cela exige que ou bien E'_{α} , ou bien E''_{α} soit nul. Supposons que $E''_{\alpha} = 0$. Alors

$\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{g}'$; et l'on voit tout de suite que l'on a aussi $\mathfrak{g}^{-\alpha} \subset \mathfrak{g}'$.

Si donc α est une racine quelconque E_α et $E_{-\alpha}$ appartiennent tous deux à $\mathfrak{g}'$ ou $\mathfrak{g}''$ mais $H'_\alpha = -[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ est dans $\mathfrak{g}'$ ou $\mathfrak{g}''$.

Soit Δ' (resp. Δ'') l'ensemble des racines α telles que $\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{g}''$) . Si $\alpha \in \Delta'$ $\beta \in \Delta''$ $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H'_\alpha, H'_\beta \rangle = 0$ car $\langle \mathfrak{g}', \mathfrak{g}'' \rangle = 0$. Donc $\Pi = (\Pi \cap \Delta') \cup (\Pi \cap \Delta'')$ et $E_{\Pi'} \subset \mathfrak{g}'$ $E_{\Pi''} \subset \mathfrak{g}''$ sont orthogonaux.

(la démonstration prouve que $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}') \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'')$) . C.Q.F.D.

3.- Bases de Weyl provisoires.

On appellera provisoirement base de Weyl d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$, un système formé d'une base $(H_1, \dots, H_r)$ de l'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ et d'éléments $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ (où α parcourt le système des racines non nulles de $\mathfrak{g}$), choisi de manière à satisfaire aux conditions

$$\langle E_\alpha, E_{-\alpha} \rangle = -1 \quad [E_\alpha, E_{-\alpha}] = -H'_\alpha$$

Les constantes de structure sont données par :

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta}$$

Si $\alpha + \beta$ n'est pas une racine, alors $[E_\alpha, E_\beta] = 0$. On convient, dans ce cas, de poser $N_{\alpha, \beta} = 0$.

RECTIFICATIFS : 1) - Dans le théorème 1 on a supposé que $[H, X] = aX$ avec $a > 0$. Pour pouvoir appliquer ce théorème, il faut savoir que $\alpha(H'_\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle > 0$. Le raisonnement pour être correct doit s'écrire ainsi :

si $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$ on prend $X = E_\alpha$ $Y = E_{-\alpha}$ $H = H'_\alpha$

si $\langle \alpha, \alpha \rangle < 0$ on prend $X = E_{-\alpha}$ $Y = E_\alpha$ $H = H'_\alpha$

2) - On pourrait appeler α -série l'ensemble des racines $\beta + c\alpha$ avec $c \in \mathbb{K}$ (non seulement c entier). Les raisonnements faits prouvent cependant que c est nécessairement entier ou demi-entier et on peut prouver qu'il est nécessairement entier.