

SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

P. CARTIER

Théorèmes d'Ado et d'Iwasawa

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 8, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A12_0

© Séminaire "Sophus Lie"

(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 8

THÉORÈMES D'ADO ET D'IWASAWA

(Exposé par P. CARTIER, le 11.1.54)

1.- Introduction.

$\mathcal{G}$ désignera désormais une algèbre de Lie de dimension finie sur le corps K de caractéristique 0 (cf. appendice pour le cas de caractéristique $p \neq 0$). Le but de cet exposé est de démontrer les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.- (Ado) $\mathcal{G}$ admet une représentation linéaire fidèle de dimension finie, le plus grand idéal nilpotent $\mathcal{N}$ de $\mathcal{G}$ étant représenté par des opérateurs nilpotents.

Théorème 2.- (Iwasawa) Si M est un $\mathcal{G}$ -module de dimension finie et $u \in H^2(\mathcal{G}, M)$, il existe un $\mathcal{G}$ -module de N de dimension finie contenant M telle que l'application canonique de $H^2(\mathcal{G}, M)$ dans $H^2(\mathcal{G}, N)$ annule u .

La méthode de démonstration suivie est due pour l'essentiel à Harish Chandra. En reprenant une méthode de démonstration du théorème 1, due à E. Cartan, Hochschild vient de démontrer l'analogue du théorème 2 pour tous les $H^p(\mathcal{G}, M)$ lorsque $\mathcal{G}$ est résoluble (résultat obtenu indépendamment par Koszul).

On aura besoin au cours de la démonstration du lemme suivant d'algèbre associative :

Lemme : Si A est une algèbre associative engendrée par un nombre fini d'éléments, tout idéal bilatère I de A de codimension finie admet une base finie (comme idéal bilatère) et les idéaux I^S sont de codimension finie.

On peut d'après les hypothèses faites sur A et I trouver un sous-espace $G \subset A$ de dimension finie tel que $G + I = A$ et que G engendre A comme algèbre. Si donc $g_1, g_2 \in G$ on a $g_1 g_2 = g + i$ avec $g \in G$ et $i \in I$ donc $i \in I \cap (G + G^2)$. Soit Z l'idéal bilatère engendré par le sous-espace de dimension finie $I \cap (G + G^2)$. Modulo Z , G est multiplicativement clos donc $G + Z$ est une sous-algèbre de A qui est d'ailleurs égale à A puisqu'elle contient G . Donc $G + Z = A$, $Z \subset I$ est de codimension finie et a un

nombre fini de générateurs, donc I a un nombre fini de générateurs.

I/I^2 est de manière évidente un A/I -bimodule donc l'annulateur contient I donc un A/I -bimodule. A/I est de dimension finie et I admet un nombre fini de générateurs donc I/I^2 est de dimension finie donc aussi A/I^2 extension de A/I par I/I^2 . I^2 est de codimension finie donc par récurrence sur n , I^{2^n} l'est aussi et I^S également si $S < 2^n$.

2.- Le théorème préparatoire :

Théorème 3 : $\mathfrak{h}$ étant un idéal abélien de $\mathcal{O}$ et U l'algèbre enveloppante de $\mathcal{O}$, il existe dans U un idéal bilatère Z avec les 4 propriétés suivantes :

- 1) Z est de codimension finie
- 2) $Z \cap \mathfrak{h} = 0$
- 3) Z contient $\mathfrak{h}\mathcal{O}$
- 4) Z contient $\mathcal{U}^s$ pour s assez grand.

Faisons quelques remarques préparatoires : un idéal bilatère de codimension finie de U est le noyau d'une représentation linéaire de $\mathcal{O}$ de dimension finie et réciproquement, en particulier tout idéal à gauche de codimension finie contient un idéal bilatère de codimension finie. De plus il résulte du théorème d'Engel que la condition 4) équivaut au fait que Z contient une puissance convenable de tout élément de $\mathcal{U}$. Enfin si $\alpha_1 \dots \alpha_k$ sont des idéaux de $\mathcal{O}$ et T l'idéal à gauche de U engendré par $\alpha_1 \dots \alpha_k$, toute dérivation D de $\mathcal{O}$ qui laisse stable les α_i a un prolongement à U qui laisse stable T car

$$\bar{D}(u a_1 \dots a_k) = \sum_{i=1}^k u \dots a_{i-1} D a_i \dots a_k + \bar{D} u a_1 \dots a_k \in T$$

Si en particulier $D = \text{adg}$ $\bar{D}u = gu - ug$ et il en résulte que $Tg \subset T$ donc que T est un idéal bilatère de U .

Le premier pas de la démonstration du théorème 3 est le suivant :

Si $\mathcal{O}$ est résoluble et Z vérifie les conditions 1), 2), 3), 4), il existe un idéal bilatère $Z' \subset Z$ vérifiant ces mêmes conditions et de plus :

- 5) Z' est invariant par toute dérivation $\bar{D}$ qui prolonge une dérivation D de $\mathcal{O}$ telle que $D\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$

Soit $A \supset Z$ l'idéal bilatère de U tel que A/Z soit le radical de l'algèbre associative U/Z . A/Z est un idéal nilpotent donc $A^r \subset Z$ pour r assez grand. On sait d'autre part (Exposé n° 7 bis) que $\mathcal{U} \subset A$ et que toute dérivation

envoie $\mathcal{O}_J$ dans $\mathcal{U}$ (idem, noter que $\mathcal{O}_J$ est résoluble). Donc si $u = g_1 \dots g_n$

$$\bar{D} u = \sum g_1 \dots D g_i \dots g_n \in A \quad \bar{D} 1 = 0$$

donc $\bar{D} U \subset A$ en particulier A est stable par $\bar{D}$. L'idéal à gauche S engendré par $\mathcal{H} \mathcal{O}_J$ étant stable par toute dérivation $\bar{D}$ telle que $D \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ et étant de plus bilatère, si l'on pose $Z' = A^r + S$, Z' vérifie 5). Il est clair que $Z' \subset Z$. De plus le lemme du 1 montre que A^r est de codimension finie donc aussi $Z' \supset A^r$. 1) est donc vérifiée. Comme $Z' \cap \mathcal{H} \subset Z \cap \mathcal{H} = 0$, 2) l'est aussi. 3) l'est de même puisque $Z' \supset S \supset \mathcal{H} \mathcal{O}_J$. Enfin comme $\mathcal{U} \subset A$ $\mathcal{U}^r \subset Z'$ et 4) est vérifiée.

Le premier pas est terminé. Abordons le second.

Supposons $\mathcal{O}_J$ somme directe de l'idéal résoluble $\mathcal{P}$ et de la sous-algèbre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$ $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cap \mathcal{P} + \mathcal{U} \cap \mathcal{L}$. Si $U(\mathcal{P})$ possède un idéal Z' vérifiant les conditions 1) et 5), $U(\mathcal{O}_J)$ possède un idéal avec les propriétés 1) à 4).

Pour tout $g \in \mathcal{O}_J$ on définit une dérivation D_g de $\mathcal{P}$ en restreignant adg à $\mathcal{P}$. $D_g \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ car $\mathcal{H}$ est un idéal de $\mathcal{O}_J$ donc $\bar{D}_g Z' \subset Z'$. $U(\mathcal{O}_J) \simeq U(\mathcal{P}) \otimes U(\mathcal{L})$ d'après Birkhoff-Witt cet isomorphisme étant seulement linéaire. L'idéal à gauche engendré par Z' est donc $Z' \otimes U(\mathcal{L})$ mais cet idéal est un idéal à droite car $gz - zg = \bar{D}_g Z \in Z'$ si $Z \in Z'$; de plus l'idéal à gauche engendré par $\mathcal{L}$ dans $U(\mathcal{O}_J)$ est $U(\mathcal{P}) \otimes \mathcal{L} U(\mathcal{L})$. $V = Z' \otimes U(\mathcal{L}) + U(\mathcal{P}) \otimes \mathcal{L} U(\mathcal{L})$ est donc un idéal à gauche de $U(\mathcal{O}_J)$ et $U(\mathcal{O}_J)/V \simeq U(\mathcal{P})/Z' \otimes U(\mathcal{L})/\mathcal{L} U(\mathcal{L}) \simeq U(\mathcal{P})/Z' = T$. T est de dimension finie et il y a une représentation linéaire canonique θ de $U(\mathcal{O}_J)$ dans T dont le noyau est le plus grand idéal bilatère Z contenu dans V . Comme $p(u \otimes 1) = p u \otimes 1$ et $b(u \otimes 1) = \bar{D}_b u \otimes 1 + u \otimes b \equiv \bar{D}_b u \otimes 1 \pmod{Z'}$ on voit que $\theta(p)u = \bar{p}u$ $\theta(b)u = \bar{D}_b u$ ($\bar{u}$ est la classe de $u \pmod{Z'}$).

On a $\theta(h) \bar{1} = \bar{h} \neq 0$ si $h \neq 0$ car $\mathcal{H} \cap Z' = 0$ donc $\mathcal{H} \cap Z = 0$.

Z étant évidemment de codimension finie 1) et 2) sont vérifiés. Comme $Z' \supset \mathcal{H} \mathcal{P}$ $V \supset \mathcal{H} \mathcal{P} + \mathcal{H} \mathcal{L} = \mathcal{H} \mathcal{O}_J$ donc V contient l'idéal à gauche engendré par $\mathcal{H} \mathcal{O}_J$, mais ce dernier idéal est bilatère donc contenu dans Z et $\mathcal{H} \mathcal{O}_J \subset Z$: voici pour 3). Enfin l'ensemble E des $n \in \mathcal{U}$ tels que $\theta(n)$ soit nilpotent est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$ (cf. Exposé n° 7 bis). $(\mathcal{U} \cap \mathcal{P})^S \subset Z'$ donc $(\mathcal{U} \cap \mathcal{P})^S \subset V$, mais l'idéal à gauche engendré par $(\mathcal{U} \cap \mathcal{P})^S$ est bilatère (cf. le cas de $\mathcal{H} \mathcal{O}_J$) et donc $(\mathcal{U} \cap \mathcal{P})^S \subset Z$ $\mathcal{U} \cap \mathcal{P} \subset E$. Par ailleurs si $b \in \mathcal{U} \cap \mathcal{L}$ adb est nilpotent donc $\bar{D}_b$ est nilpotent sur $\mathcal{P}$. L'ensemble des $u \in U(\mathcal{P})$ annulés par une puissance de $\bar{D}_b$ est une sous algèbre

d'après la formule de Leibniz donc est identique à $U(\mathfrak{P})$. Par suite une puissance de $\mathcal{O}(b)$ annule T et $b \in E \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{L} \subset E$ et finalement $\mathcal{U} \subset E$, 4) est vérifiée.

Il nous reste pour établir le théorème 3 à raisonner par récurrence sur la dimension de $\mathcal{O}/\mathfrak{h}$. Si $\mathcal{O} = \mathfrak{h}$ $U(\mathcal{O}) \simeq S(\mathfrak{h})$. On prendra pour Z l'idéal engendré par $\mathfrak{h}^2$, c'est-à-dire par l'ensemble des éléments homogènes de degré ≥ 2 . Les conditions 1) à 4) se vérifient trivialement. Si $\mathcal{O} \neq \mathfrak{h}$ nous distinguerons deux cas : a) $\mathcal{O}$ est résoluble, donc $\mathcal{O}/\mathfrak{h} = \alpha$ est résoluble $[\alpha, \alpha] \neq \alpha$ donc $[\mathcal{O}, \mathcal{O}] + \mathfrak{h} \neq \mathcal{O}$. Prenons pour $\mathfrak{P}$ un hyperplan contenant $[\mathcal{O}, \mathcal{O}] + \mathfrak{h}$ et pour $\mathcal{L}$ une droite supplémentaire de $\mathfrak{P}$ qui soit contenue de plus dans $\mathcal{U}$ si $\mathcal{U} \not\subset \mathfrak{P}$. $\mathcal{O} = \mathfrak{P} \oplus \mathcal{L}$, $\mathfrak{P}$ est un idéal résoluble, $\mathcal{L}$ une sous-algèbre $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cap \mathfrak{P} + \mathcal{U} \cap \mathcal{L}$

b) $\mathcal{O}$ n'est pas résoluble, alors d'après le théorème de Levi $\mathcal{O} = \mathfrak{P} + \mathcal{L}$, $\mathfrak{P}$ étant le radical, $\mathcal{L}$ une sous-algèbre semi-simple et $\mathcal{U} \subset \mathfrak{P}$.

Comme $\dim \mathfrak{P}/\mathfrak{h} < \dim \mathcal{O}/\mathfrak{h}$ on peut construire dans $U(\mathfrak{P})$ un idéal Z_1 vérifiant 1) à 4). Mais $\mathfrak{P}$ est résoluble et on peut donc l'astreindre (pas 1) à vérifier 5) en plus. Alors (pas 2), on peut construire un idéal Z_2 de $U(\mathcal{O})$ vérifiant 1) à 4).
C.Q.F.D.

3.- Démonstration des théorèmes 1 et 2 :

Théorème 1 : Soit $\mathfrak{h}$ le centre de $\mathcal{O}$ et construisons un idéal Z de $U(\mathcal{O})$ vérifiant 1), 2), 4). Z est le noyau d'une représentation linéaire Θ de dimension finie fidèle sur $\mathfrak{h}$ et représentant $\mathcal{U}$ par des opérateurs nilpotents. Le noyau de la représentation adjointe Θ' est $\mathfrak{h}$ et si $n \in \mathcal{U}$ adn est nilpotent. Il est alors clair que la représentation Ψ somme directe de Θ et Θ' convient et démontre le théorème.

Théorème 2 : Soit $u \in H^2(\mathcal{O}, M)$; la construction que l'on va faire pour "tuer" u est analogue à celle de l'exposé n° 5 bis. Soit α une extension de $\mathcal{O}$ par M , soit $0 \rightarrow M \xrightarrow{i} \alpha \xrightarrow{\pi} \mathcal{O} \rightarrow 0$ correspondant à u (Exposé n° 5) (on identifie M et $i(M) \subset \alpha$). $U(\alpha)$ est l'algèbre enveloppante de α et $I = \alpha U(\alpha)$ l'idéal maximal. I est un $U(\alpha)$ module à gauche, c'est-à-dire un α -module, donc $I/MI = P$ est un α/M -module, c'est-à-dire un $\mathcal{O}$ -module. Comme $M \subset \alpha \subset I$ il existe $\varphi : M \rightarrow P$; φ est un $\mathcal{O}$ -homomorphisme car si $m \in M$ $g \in \mathcal{O}$ $\Theta(g)m = [a, m]$ $\pi(a) = g$ mais $[a, m] \equiv a m \pmod{MI}$ et par définition $g \cdot \hat{m} = \hat{a} \cdot \hat{m}$ d'où l'assertion sur φ . Soit $k \in u$

un cocycle de classe u $k(x,y) = [\ell(x)\ell(y)] - \ell([x,y])$ ℓ étant une section $\mathcal{O}_f \rightarrow \mathcal{O}$. Si on considère ℓ comme une fonction à valeurs dans I on a $k(x,y) = \ell(x)\ell(y) - \ell([x,y]) - \ell(y)\ell(x)$ c'est-à-dire modulo MI $\widehat{k(x,y)} \equiv x \cdot \widehat{\ell(y)} - \widehat{\ell([x,y])} - y \cdot \widehat{\ell(x)}$ donc $\varphi \circ k$ est un cobord dans $C^2(\mathcal{O}_f, P)$ et par suite $\varphi_2^* u = 0$ P est de dimension infinie mais d'après le théorème 3 il existe un idéal $Z \supset MI$ $Z \cap M = 0$ de codimension finie dans $U(\mathcal{O})$. Alors $N = I/Z = P/Z/MI$ est de dimension finie et comme $M \cap Z = 0$ M plonge dans N . Comme u est "tuée" par $\varphi M \rightarrow P$ elle l'est a fortiori par l'injection de M dans N composée de φ et de $P \rightarrow P/Z/MI$. C.Q.F.D.

Noter que le théorème 2 équivaut au fait que pour toute extension α de $\mathcal{O}_f$ par M il existe une extension inessentielle $\mathcal{U} \supset \alpha$ de $\mathcal{O}_f$ par N telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M & \rightarrow & \alpha & \rightarrow & \mathcal{O}_f \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\ 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & \mathcal{U} & & \end{array}$$

APPENDICE

K est supposé de caractéristique $p \neq 0$. On va montrer qu'il existe dans $U(\mathcal{O}_f)$ un idéal Z vérifiant les conditions 1) à 3) du théorème 3 ce qui assurera que $\mathcal{O}_f$ a une représentation fidèle de dimension finie et que toute 2-classe de cohomologie est "tuée" comme dans le théorème 2. Soit $x_1 \dots x_k$ $y_1 \dots y_n$ une base de $\mathcal{O}_f$ les x_i étant dans $\mathfrak{h}$. $D_i = \text{ad } y_i$ se prolonge en une dérivation $\bar{D}_i$ de $U(\mathcal{O}_f)$. Mais comme on est en caractéristique p on peut vérifier que $\bar{D}_i^p u = [y_i^p, u]$ ($u \in U(\mathcal{O}_f)$). Comme $\mathcal{O}_f$ est de dimension finie, il existe des constantes $a_{i,j}$ telles que $\sum_j a_{i,j} \bar{D}_i^{pj} = 0$ donc $\sum_j a_{i,j} y_i^{pj}$ est dans le centre de $U(\mathcal{O}_f)$. Soit Z l'idéal bilatère de $U(\mathcal{O}_f)$ engendré par ces éléments et $\mathfrak{h} \mathcal{O}_f$. Le théorème de Birkhoff-Witt appliqué à la base formée des x et des y montre alors facilement que Z est de codimension finie et que $\mathfrak{h} \cap Z = 0$. C.Q.F.D.