SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

SAMIA BEGHDADI-SAKRANI

Calcul stochastique pour les mesures signées

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 36 (2002), p. 366-382
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_2002__36__366_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Calcul stochastique pour des mesures signées

Samia BEGHDADI-SAKRANI

L'étude des mesures signées a été suggérée par P. A. Meyer pour généraliser le célèbre Théorème de Paul Lévy, qui caractérise la mesure de Wiener sur $\Omega = C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ comme l'unique probabilité sous laquelle (X_t) et $(X_t^2 - t)$ sont des martingales, où (X_t) est le processus canonique sur Ω.
Ceci a été établi par Ruiz de Chavez [9] qui a montré en plus, que la propriété $(\star)$ ci-dessous des martingales continues (sous les mesures de probabilité) n'est pas satisfaite sous des mesures signées.

$(\star)$ Les seules martingales continues à variation finie sont les constantes.

Un contre exemple simple est le temps local L_t en zéro de la densité $D_t = \frac{dQ}{d|Q|}\big|_{\mathcal{F}_t}$, où Q est une mesure signée bornée sur un espace mesurable muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ avec $|Q|(1) = 1$ et D est continue.
L'autre remarque importante faite par [9] est la nullité de Q sur certaines sous-tribus (voir aussi [4]). Ceci indique qu'il y a une perte d'information sur ces sous-tribus.
La propriété la plus importante, perdue pour les mesures signées est l'hérédité des ensembles négligeables. En effet, si A et B sont deux ensembles mesurables tels que $B \subset A$ et $Q(A) = 0$, alors on n'a pas forcément $Q(B) = 0$.
Dans ce papier on établit quelques propriétés des martingales pour des mesures signées. Le premier paragraphe est consacré à l'étude des martingales pour des mesures signées à variation quadratique finie. On établit une généralisation du Théorème de Paul Lévy pour les mesures signées bornées.
Dans le paragraphe 2, on essaie de définir l'intégrale stochastique pour des mesures signées. On établit une formule d'Itô ainsi qu'un Théorème de Girsanov. Enfin, le troisième paragraphe est une introduction aux mesures complexes, tout en essayant de définir un processus de Bessel à valeurs complexes. On donne aussi quelques exemples et applications des mesures signées.

1. Martingales par rapport à une mesure signée

On considère un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, Q)$, où Q est une mesure signée bornée. On commence par citer la définition d'une martingale sous Q, donnée dans [9].

DÉFINITION 1.1. *Soient* Π *une probabilité sur* $\mathcal{F}_\infty$ *telle que* $Q \ll \Pi$, $(\mathcal{F}_t)$ *une filtration continue à droite, complétée par rapport à* Π *telle que* $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_t \mathcal{F}_t$ *et*

$M_t = \left.\frac{dQ}{d\Pi}\right|_{\mathcal{F}_t}$. *Un processus* (X_t) *adapté à* $(\mathcal{F}_t)$ *est une* $(\Pi-Q)-$*martingale si :*
1) X *est une* $\Pi-$*semimartingale,*
2) XM *est une* $\Pi-$*martingale.*

Cette définition impose de se référer toujours à une probabilité Π et donc à la filtration $\mathcal{F}^{\Pi}$ complétée par rapport à Π.
Remarquons aussi que dans le cas où Q est une probabilité : si X est une Q−martingale, alors l'hypothèse 1) n'est pas forcément satisfaite. Pour ces raisons, on modifie la Définition 1.1 et on la remplace par la Définition 1.1′ suivante. Dans la suite, on note $\mathbb{P} := |Q|$ et $D_t = \left.\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}$ (où $\mathcal{F}$ est une filtration continue à droite sur $\mathcal{F}_\infty$, complétée par rapport à $\mathbb{P}$) et on suppose que $|Q|(\Omega) = 1$.
La notation $\mathbb{E}$ désigne toujours l'espérance par rapport à $\mathbb{P}$.

Définition 1.1′. *Soit* X *un processus adapté à* $\mathcal{F}$.
1) X *est dite une* Q*−martingale si* $\mathbb{E}[|X_t|] < +\infty$, $\forall t \geqslant 0$ *et* $Q(X_T) = Q(X_0)$ *pour tout* $\mathcal{F}-$*temps d'arrêt* T *borné.*
2) X *est dite une* Q*−martingale uniformement intégrable si la* $\mathbb{P}-$*martingale* XD *est uniformement intégrable.*
3) X *est dite* Q*−martingale locale si* XD *est une* $\mathbb{P}-$*martingale locale.*

Remarques 1.1.

1) Si $\mathbb{P}'$ est une probabilité sur $\mathcal{F}_\infty$ telle que $Q = D'_\infty \cdot \mathbb{P}'$ et $\mathbb{P}'(D'_\infty = 0) = 0$, où D'_∞ est un élément de $L^1(\mathcal{F}_\infty)$, alors X est une Q−martingale si et seulement si XD' est une $\mathbb{P}'$−martingale (pour la démonstration, voir par exemple, le Lemme 48, Chap. VII de [5]).
2) Soit X une Q−martingale. Si T est un temps d'arrêt pour $\mathcal{F}$, alors X^T est une $(Q, \mathcal{F})$−martingale et $(X_{T+t})_{t\geqslant 0}$ est une $\big((\mathcal{F}_{T+t}), Q\big)_{t\geqslant 0}$−martingale.

La proposition suivante nous donne la relation entre les deux définitions :

Proposition 1.1. *Soit* $\mathbb{P}'$ *une probabilité sur* $\mathcal{F}_\infty$ *telle que* $Q \ll \mathbb{P}'$. *Si* X *est une* $(\mathbb{P}'-Q)-$*martingale, alors* X *est une* Q*−martingale.*

Preuve. Si X est une $(\mathbb{P}'-Q)$−martingale, alors XD' est une $\mathbb{P}'$−martingale où $D'_t = \left.\frac{dQ}{d\mathbb{P}'}\right|_{\mathcal{F}_t}$. Pour tout temps d'arrêt borné T, on a :

$$Q(X_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[D'_T X_T] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[D'_0 X_0] = Q(X_0).$$

■

Proposition 1.2. *Soit* $\mathbb{P}'$ *une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$. *On a l'équivalence entre les deux propriétés :*
(i) $Q \ll \mathbb{P}'$,
(ii) $D'_t := \left.\frac{dQ}{d\mathbb{P}'}\right|_{\mathcal{F}_t}$ *est une* $\mathbb{P}'-$*martingale uniformement intégrable.*

Preuve.
(i) $\Longrightarrow$ (ii). Si $\mathrm{Q} \ll \mathbb{P}'$, alors il existe une variable aléatoire Δ, $\mathcal{F}_\infty$−mesurable telle que $\mathrm{Q} = \Delta \cdot \mathbb{P}'$. On a : $\forall t \geqslant 0$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[|\Delta|] = |\mathrm{Q}|(1) < +\infty$ et $D'_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[\Delta|\mathcal{F}_t]$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $D'_\infty = \lim_{t\to+\infty} D'_t$. On a : $\forall t \geqslant 0$, $D'_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[D'_\infty|\mathcal{F}_t]$. D'où $\forall t \geqslant 0$, $\forall A \in \mathcal{F}_t$, $\mathrm{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[D'_\infty \cdot \mathbf{1}_A]$. Notons $\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{F}_\infty, \mathrm{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[D'_\infty \cdot \mathbf{1}_A]\}$. On a : $\forall t \geqslant 0$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{C}$ et par classe monotone, on obtient $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{C}$, ce qui prouve que $\mathrm{Q} \ll \mathbb{P}'$. ∎

Une martingale pour une mesure signée Q n'est pas forcément à variation quadratique finie (un contre exemple est donné à la fin du deuxième Paragraphe de ce papier).

Ruiz de Chavez a établi le Théorème de caractérisation de Paul Lévy pour des Q−martingales qui sont des processus de Dirichlet pour $\mathbb{P}$. On donne ici une généralisation aux processus à variation quadratique finie (en général, un processus à variation quadratique finie n'est pas un processus de Dirichlet, un contre-exemple est donné dans [10]).

Théorème 1.1. *Si X est une Q−martingale continue, nulle en 0 et à variation quadratique finie avec $[X]_t = t$, alors l'image de Q par X est égale à $\mathrm{Q}(1) \cdot W$.*

Preuve. Pour $0 \leqslant s \leqslant t$, le processus $(X_{t+s} - X_s)_{t\geqslant 0}$ est une $\big(\mathrm{Q}, (\mathcal{F}_{t+s})\big)$−martingale. D'où (grâce à la formule (3) de [6]), $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $Y_t = \exp\big(i\alpha(X_{t+s} - X_s)\big) - 1 + \dfrac{\alpha^2}{2}\displaystyle\int_0^t \exp\big(i\alpha(X_{u+s} - X_s)\big)du$ est une $\big(\mathrm{Q} - (\mathcal{F}_{t+s})_{t\geqslant 0}\big)$−martingale. Alors, pour tout $A \in \mathcal{F}_s$, $\mathrm{Q}\big(\mathbf{1}_A Y_t\big) = h(t)\mathrm{Q}(A)$, où $h(t) = \exp(-\frac{\alpha^2}{2}t)$.
De la même façon, pour toute suite finie $\{t_1, \cdots, t_n\}$ de $\mathbb{R}^+$: $\mathrm{Q}\big(\exp\big(i\alpha_1 X_{t_1} + i\alpha_2(X_{t_2} - X_{t_1}) + \cdots + i\alpha_n(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})\big)\big) = \mathrm{Q}(1)\exp\big(-\frac{1}{2}(t_1\alpha_1^2 + \cdots + (t_n - t_{n-1})\alpha_n^2\big)$. ∎

2. Calcul stochastique pour des mesures signées

Dans ce paragraphe, on suppose que D est continue. Posons $H := \{t, D_t = 0\}$, $g = \sup H$, $\bar{g} = g \vee 0$, $\gamma_t = 0 \vee \sup\{s \leqslant t, D_s = 0\}$, $\bar{g}_t = 0 \vee \sup\{s < t, D_s = 0\}$ et G l'ensemble des extrémités gauches de H^c. La plus petite filtration continue à droite contenant $(\mathcal{F}_t)$ pour laquelle $\bar{g}$ est un temps d'arrêt sera notée $(\mathcal{F}_t^g)$. La filtration $(\mathcal{F}_{\bar{g}+t}^g)$ est alors bien définie et sera notée $(\mathcal{F}_{g+t})$. Si X est un processus $\mathcal{F}$−adapté, on notera $\widetilde{X} := X_{.+\bar{g}}$.

On commence par citer la proposition suivante de [1] :

Proposition 2.1. *[1] Soit $(V_t)_{t\geqslant 0}$ un processus $(\mathcal{F}_{g+t})$−optionnel. Il existe un processus unique $(U_t)_{t\geqslant 0}$, $(\mathcal{F}_t)$−optionnel qui s'annule sur H tel que $\forall t > 0, U_{\bar{g}+t} = V_t$, $U_0 = V_0$ sur $\{g = -\infty\}$. Ce qui définit une fonction $\rho : V \to U = \rho(V)$.*
ρ est linéaire, positive et préserve les produits.

La proposition suivante est une "généralisation" du Théorème 1.1.

Proposition 2.2. *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{Q})$ un espace mesurable muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ et X une $\mathrm{Q}-$martingale, continue et nulle en 0. Supposons que $X_t^2 - t$ soit une $\mathrm{Q}-$martingale, alors $X(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}(1)\cdot W$ (où W est la mesure de Wiener).*

Preuve. Pour $k \geqslant 1$, $(X_{t\wedge k})$ et $X_{t\wedge k}^2 - t\wedge k$ sont uniformément intégrables, c'est-à-dire que $X_{t\wedge k}D_t$ et $(X_{t\wedge k}^2 - t\wedge k)D_t$ sont deux martingales uniformément intégrables qui s'annulent sur H. D'après le Théorème quotient de [1] (voir aussi Théorème 3.2, Chap. III de [2]), les processus $X_{(\bar{g}+t)\wedge k}$ et $X_{(\bar{g}+t)\wedge k}^2 - (\bar{g}+t)\wedge k$ sont deux $\mathbb{P}-$martingales pour la filtration $(\mathcal{F}_{g+t})_{t>0}$. En appliquant la formule d' Itô à $X_{(\bar{g}+t)\wedge k}$ avec la fonction $\exp(i\alpha x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} Y_t^k :&= \exp(i\alpha X_{(\bar{g}+t)\wedge k}) + \frac{\alpha^2}{2}\int_0^{t\wedge(k-\bar{g})^+} \exp(i\alpha X_{(\bar{g}+s)\wedge k})ds - \exp(i\alpha X_{\bar{g}\wedge k}) \\ &= \exp(i\alpha X_{(\bar{g}+t)\wedge k}) + \frac{\alpha^2}{2}\int_{\bar{g}\wedge k}^{(\bar{g}+t)\wedge k} \exp(i\alpha X_{s\wedge k})ds - \exp(i\alpha X_{\bar{g}\wedge k}) \end{aligned}$$

est une $\mathbb{P}-$martingale qui s'annule en 0. D'où $\rho(Y^k)_t$ est une $\mathrm{Q}-$martingale et

$$\rho(Y^k)_t = \exp(i\alpha X_{t\wedge k}) + \frac{\alpha^2}{2}\int_{\gamma_t\wedge k}^{t\wedge k} \exp(i\alpha X_{s\wedge k})ds - \exp(i\alpha X_{\gamma_t\wedge k}).$$

Ce qui donne que $\exp(i\alpha X_t) + \dfrac{\alpha^2}{2}\displaystyle\int_0^t \exp(i\alpha X_s)ds$ est une $\mathrm{Q}-$martingale locale. En raisonnant de la même façon que dans le Théorème 1.1 (voir aussi [9]) on trouve $X(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}(1)\cdot W$. ∎

On suppose dans la suite que toutes les $(\mathbb{P}, \mathcal{F})$ – martingales sont continues, les processus $\mathbb{P}$ *p.s.* croissants introduits ci-dessous, sont continus à droite et que toutes les Q – martingales considérées sont continues sur $[\bar{g}, +\infty[$.

En effet, on peut toujours se ramener à une $\mathrm{Q}-$martingale continue sur $[\bar{g}, +\infty[$ grâce au lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soit X une $\mathrm{Q}-$martingale uniformément intégrable, alors X admet une modification X' (par rapport à $\mathbb{P}$) continue à droite sur $H^c \cup G$. En plus, X'_{γ_t} est aussi une $\mathrm{Q}-$martingale uniformément intégrable.*

Preuve. XD est une $\mathbb{P}-$martingale continue (par hypothèse), d'où X est continue sur H^c. Posons

$$X'_t = \begin{cases} X_t & \text{si } t \in G^c, \\ \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} X_{t+\varepsilon}\mathbf{1}_{H^c}(t+\varepsilon) & \text{si } t \in G. \end{cases}$$

D'après le Corollaire 3.2.1 de [1], X' est bien défini. On a : aussi, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{P}(X_t = X'_t) \geqslant 1 - \mathbb{P}(t \in G) = 1$ car G évite les temps d'arrêt. Montrons que X'_{γ_t}

est aussi une Q−martingale uniformément intégrable. On a :

$$\begin{aligned} X'_t &= X'_t \mathbb{1}_{H^c}(t) + X'_t \mathbb{1}_H(t) \\ &= \rho\left(X'_{\cdot+\bar{g}} - X'_{\bar{g}}\right)_t + \rho\left(X'_{\bar{g}}\right)_t + X'_{\gamma_t} \mathbb{1}_H(t) \\ &= \rho\left(X'_{\cdot+\bar{g}} - X'_{\bar{g}}\right)_t + X'_{\gamma_t} \mathbb{1}_{H^c}(t) + X'_{\gamma_t} \mathbb{1}_H(t). \end{aligned}$$

Donc $X'_{\gamma_t} = X'_t - \rho\left(X'_{\cdot+\bar{g}} - X'_{\bar{g}}\right)_t$. Mais d'après le Théorème quotient de [1], $\rho\left(X'_{\cdot+\bar{g}} - X'_{\bar{g}}\right)$ est une Q−martingale, d'où X'_{γ_t} est une Q−martingale. ■

Il est bien connu que la classe des semimartingales est stable par un changement de probabilité absolument continue, ce qui n'est pas vrai pour un changement de mesure signée absolument continue (voir [4]). Dans le but de récupérer cette stabilité, on prend comme définition d'une semimartingale sous une mesure signée, la définition suivante :

Définition 2.1.
1) *Un processus adapté (X_t) est dit croissant (resp. à variation finie) sous* Q *si le processus $\widetilde{X}_t = (X_{\bar{g}+t})$ est croissant (resp. à variation finie) sous* $\mathbb{P}$.
2) *Un processus Y est dit une* Q*−semimartingale si $Y = X + A$, où X est une* Q*−martingale uniformément intégrable et A est un processus à variation finie sous* Q.
3) *Soient X une* Q*−martingale uniformément intégrable (resp. à variation finie sous* Q*) et h un processus progressif tel que $\int_0^t h^2_{\bar{g}+s} d\left\langle \widetilde{X} \right\rangle_s < +\infty$, $\forall t \geqslant 0$ (resp. $\int_0^t |h_{\bar{g}+s}||d\widetilde{X}_s| < +\infty$). On définit l'intégrale stochastique de h par rapport à X et on la note*

$$\int_{\mathrm{Q}0}^t h_s dX_s = \rho\left(\int h_{s+\bar{g}} d\widetilde{X}_s\right)_t.$$

Remarque 2.1.

1) La Définition 2.1 reste valable lorsque Q est une probabilité. En effet, dans ce cas : $D \equiv 1$ et $\bar{g} = 0$ *p.s.*
2) Il est à noter que l'intégrale stochastique sous Q définie ci-dessus, bien qu'elle satisfasse les propriétés habituelles de l'intégrale stochastique (Propositions 2.3 et 2.4 ci-dessous), dépend non seulement de X, h et de la mesure Q, mais aussi de la martingale D (plus précisément de l'ensemble H). L'intégrale $\int_{\mathrm{Q}} h_s dX_s$ peut changer d'une filtration à une autre.
Notons aussi que $\int_{\mathrm{Q}} h_s dX_s$est continue à droite sur $H^c \cup G$.

La proposition suivante nous permet de passer de l'intégrale stochastique (dans le cas où elle est bien définie et finie) à l'intégrale sous Q.

Proposition 2.3. *Soit h un processus progressif.*
1) *Si X est un processus càdlàg, à variation finie sous $\mathbb{P}$ et si pour tout $t \geqslant 0$, $\int_0^t |h_s||dX_s| < +\infty$, alors il est à variation finie sous Q et on a :*

$$\int_{\mathrm{Q}0}^t h_s dX_s = \int_{\gamma_t}^t h_s dX_s \quad \mathbb{P}.\ p.s.$$

2) *Si X est une $\mathrm{Q}-$martingale uniformément intégrable et une $\mathbb{P}-$semimartingale càdlàg, et si l'intégrale stochastique $I_t = \int_0^t h_s dX_s$ est bien définie et finie, alors $\int_{\mathrm{Q}} h_s dX_s = I_t - I_{\gamma_t}$.*
3) *Si X est une $\mathrm{Q}-$martingale uniformément intégrable (resp. à variation finie sous Q), alors $\int_{\mathrm{Q}} h\ dX$ est aussi une $\mathrm{Q}-$martingale uniformément intégrable (resp. à variation finie sous Q) (sous les conditions habituelles de finitude de $\int h_{\cdot+g} d\widetilde{X}$). L'intégrale stochastique sous Q est linéaire et associative.*

Preuve.
1) Si X est à variation finie sous $\mathbb{P}$, alors $(X_{\bar{g}+t})_{t>0}$ est aussi à variation finie sous Q et $\int_0^t h_{s+\bar{g}} dX_{s+\bar{g}} = \int_{\bar{g}}^{\bar{g}+t} h_s dX_s$ et $\rho\left(\int h_{s+\bar{g}} dX_{s+\bar{g}}\right)_t = \int_{\gamma_t}^t h_s dX_s$.
2) De la même façon que 1).
3) Si X est à variation finie sous Q, alors $\int_0^t h_{s+\bar{g}} d\widetilde{X}_s$ est à variation finie lorsque h satisfait $\int_0^t |h_{s+\bar{g}}||d\widetilde{X}_s| < +\infty$, $\forall t \geqslant 0$.

Si X est une $\mathrm{Q}-$martingale uniformément intégrable, alors $\int_0^t h_{s+\bar{g}} d\widetilde{X}_s$ est une $(\mathbb{P}, (\mathcal{F}_{g+t}))-$ martingale qui s'annule en 0. D'où $\rho\left(\int_0^t h_{s+\bar{g}} d\widetilde{X}_s\right) = \int_{\mathrm{Q}0}^t h_s dX_s$ est une $\mathrm{Q}-$ martingale (Théorème quotient de [1]).
La linéarité de $\int_{\mathrm{Q}}$ résulte de la linéarité de ρ.
Il nous reste à montrer l'associativité de $\int_{\mathrm{Q}}$.
Pour H et K convenablement choisis, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Q}} H_s K_s dX_s &= \rho\left(\int H_{s+\bar{g}} K_{s+\bar{g}} d\widetilde{X}_s\right)\\ &= \rho\left(\int H_{s+\bar{g}} d\left(\int_0^s K_{u+\bar{g}} d\widetilde{X}_u\right)\right)\\ &= \int_{\mathrm{Q}} H_s d\left(\int_{\mathrm{Q}} K_s dX_s\right).\end{aligned}$$

■

Notre but maintenant, est de définir (pour une $\mathrm{Q}-$martingale X) le processus croissant sous Q (qui sera noté $[X]^{\mathrm{Q}}$) tel que $X^2 - [X]^{\mathrm{Q}}$ soit une $\mathrm{Q}-$martingale.

Proposition 2.4. *Supposons que $\mathcal{F}_g^+ = \mathcal{F}_g \vee \sigma(D_\infty > 0)$ et soit (σ_t) un processus progressif nul en 0, tel que $(\sigma_{\bar{g}_t})_{t\geqslant 0}$ soit une Q−martingale. Alors $\sigma_g(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}(1)\cdot\delta_0$, où 0 (dans δ_0) est la fonction constante nulle sur $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.*

Preuve. Si σ est prévisible, alors $\exp(iu\sigma_{\bar{g}_t})$ est une Q−martingale.
Si σ est progressif et $(\sigma_{\bar{g}_t})$ est une Q−martingale, alors (d'après la Proposition 3.8.1 de [1]), $\sigma_{\bar{g}_t} = \alpha_{\bar{g}_t}$ sur H^c où α est un processus prévisible. Donc $\exp(iu\sigma_{\bar{g}_t})D_t = \exp(iu\alpha_{\bar{g}_t})D_t$ est une Q−martingale. On a aussi $\sigma^2_{\bar{g}_t}$ est une Q−martingale. ∎

Dans la suite on va supposer que $\mathcal{F}_g^+ = \mathcal{F}_g \vee \sigma(\{D_\infty > 0\})$. Remarquons que sous cette hypothèse, si $(\sigma_{\bar{g}_t})$ est une Q−martingale, alors $(\sigma^2_{\bar{g}_t})$ est aussi une Q−martingale.

Définition 2.2. *Soit X une Q−martingale uniformément intégrable. On définit le processus $[X]^{\mathrm{Q}} = \rho([\widetilde{X}])$.*

Remarque 2.2.

On signale que $[X]^{\mathrm{Q}}$ dépend de la filtration par rapport à laquelle X est une martingale.

Proposition 2.5.
(i) *Le processus $[X]^{\mathrm{Q}}$ est continu à droite, croissant sur toute excursion de la martingale D.*
(ii) *$X^2 - [X]^{\mathrm{Q}}$ est une Q−martingale uniformément intégrable.*

Preuve.
(i) D'après le Théorème 4.2.1 de [1], on a : (on note $M{:=}XD$)

$$[X]^{\mathrm{Q}}_t = \int_{\gamma_t}^t \frac{1}{D_s^2}\left(d\langle M\rangle_s + X_s^2 d\langle D\rangle_s - 2X_s d\langle M, D\rangle_s\right).$$

Notons pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$A_t^k = \int_0^t \mathbf{1}_{\{|D_s|>\frac{1}{k}\}}\frac{1}{D_s^2}\left(d\langle M\rangle_s + X_s^2 d\langle D\rangle_s - 2X_s d\langle M, D\rangle_s\right).$$

On a $A_t^k - A_{\gamma_t}^k \to [X]^{\mathrm{Q}}_t$ *p.s.*
Soient T un temps d'arrêt et $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{R}^+$ qui décroît vers 0. $[X]^{\mathrm{Q}}$ est continu en T sur l'ensemble $\{T \in H^c\}$, montrons qu'il est continu à droite en T sur $\{T \in H\}$. Posons $A_{n,k} = A^k_{T+\varepsilon_n} - A^k_T$. On a $A_{n,k} \downarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et

$$\limsup_{n\to+\infty}[X]^{\mathrm{Q}}_{T+\varepsilon_n} \leqslant \lim_{n\to+\infty}\lim_{k\to+\infty} A_{n,k} \leqslant \liminf_{k\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} A_{n,k} = 0.$$

Ce qui montre que $[X]^{\mathrm{Q}}$ est continu à droite.

(ii) $\widetilde{X}^2 - \left\langle \widetilde{X} \right\rangle$ est une $(\mathbb{P} - \mathcal{F}_{g+t})_{t>0}$−martingale. D'où $\rho\left(\widetilde{X}^2 - \left\langle \widetilde{X} \right\rangle\right)$ est une Q−martingale. Mais $\rho\left(\widetilde{X}^2 - \left\langle \widetilde{X} \right\rangle\right)_t D_t = \left(X_t^2 - [X]_t^{\mathrm{Q}}\right) D_t$. Donc $X^2 - [X]^{\mathrm{Q}}$ est une Q−martingale. ∎

On définit le crochet droit de deux Q−martingales X et X' par $[X, X']_t^{\mathrm{Q}} = \rho\left(\left\langle \widetilde{X}, \widetilde{X'} \right\rangle\right)_t$. On a $[X, X']^{\mathrm{Q}} = \frac{1}{4}\left([X + X']^{\mathrm{Q}} - [X - X']^{\mathrm{Q}}\right)$ et $[X + X']^{\mathrm{Q}} = [X]^{\mathrm{Q}} + [X']^{\mathrm{Q}} + 2[X, X']$.
On donne maintenant le théorème de caractérisation du processus $[\ ]^{\mathrm{Q}}$.

Théorème 2.1. *$[X]^{\mathrm{Q}}$ est l'unique processus adapté, continu à droite, croissant sur $[\bar{g}, +\infty[$ et nul sur H tel que $X^2 - [X]^{\mathrm{Q}}$ soit une Q−martingale locale.*

Preuve. Soit A un processus adapté continu à droite, croissant sur $[\bar{g}, +\infty[$ et nul sur H tel que $X_t^2 - A_t$ soit une Q−martingale locale. Le processus $\widetilde{X}_t^2 - A_{t+\bar{g}}$ est une $(\mathbb{P}, \mathcal{F}_{g+t})$−martingale continue locale.
D'après le Théorème 1.3, Chap. IV de [8], on a $A_{.+\bar{g}} = \left\langle \widetilde{X} \right\rangle$, d'où $\rho(A_{.+\bar{g}}) = \rho\left(\left\langle \widetilde{X} \right\rangle\right)$. Comme A est optionnel et nul sur H, on a $A \equiv [X]^{\mathrm{Q}}$. ∎

Corollaire 2.1. *Soit X une Q−martingale uniformément intégrable.*
1) *Si X est continue à variation quadratique finie, alors $[X]_t^{\mathrm{Q}} = [X]_t - [X]_{\gamma_t}$.*
2) *Si $[X]^{\mathrm{Q}} \equiv 0$ alors $X \mathbb{1}_{H^c} = \sigma_{\bar{g}_t}$ où σ est un processus prévisible.*
3) *Si T est un $\mathcal{F}$−temps d'arrêt, alors $[X^T]^{\mathrm{Q}} = \left([X]^{\mathrm{Q}}\right)^T - [X]_{\gamma_\cdot \wedge T}^{\mathrm{Q}}$.*
4) *Soit h un processus progressif tel que $\mathbb{E}\left[\int_0^t h_{\bar{g}+s}^2 d\left\langle \widetilde{X} \right\rangle_s\right] < +\infty$, $\forall t \geqslant 0$. Pour toute Q−martingale uniformément intégrable X', on a :*

$$[Y, X']^{\mathrm{Q}} = \int_{\mathrm{Q}} h_s d[X, X']_s^{\mathrm{Q}} \quad \text{où} \quad Y = \int_{\mathrm{Q}} h_s dX_s. \tag{1}$$

En particulier,

$$\left[\int_{\mathrm{Q}} h_s dX_s\right]^{\mathrm{Q}} = \int_{\mathrm{Q}} h_s^2 d[X]_s^{\mathrm{Q}}$$

et

$$\mathrm{Q}\left(\int_{\mathrm{Q}0}^t h_s dX_s\right)^2 = \mathrm{Q}\left(\int_{\mathrm{Q}0}^t h_s^2 d[X]_s^{\mathrm{Q}}\right) \tag{2}$$

5) *Le processus $Y := \int_{\mathrm{Q}} h_s dX_s$ est l'unique Q−martingale uniformément intégrable qui s'annule sur H et qui satisfait la propriété (1) ci-dessus.*
6) *Si T est un $\mathcal{F}$−temps d'arrêt, alors*

$$\int_{\mathrm{Q}} h_s dX_s^T = \int_{\mathrm{Q}} h_s \mathbb{1}_{[0,T]}(s) dX_s = \left[\int_{\mathrm{Q}} h_s dX_s\right]^T - \left[\int_{\mathrm{Q}} h_s dX_s\right]_{\gamma_\cdot \wedge T}.$$

Preuve.

1) Le processus $[X]_t - [X]_{\gamma_t}$ est càdlàg croissant sur $[\bar{g}, +\infty[$, nul sur H et $X_t^2 - [X]_t + [X]_{\gamma_t}$ est une Q−martingale. En effet, X_{γ_t} est une Q−martingale (Lemme 2.1), d'où $X_{\gamma_t}^2$ l'est aussi. Mais $X^2 - [X]$ est une Q−martingale (voir Corollaire 1.1, Chap. VI de [2]). Donc $X_{\gamma_t}^2 - [X]_{\gamma_t}$ et $[X]_{\gamma_t}$ sont deux Q−martingales.

2) Si $[X]^{\mathrm{Q}} \equiv 0$, alors $\left\langle \widetilde{X} \right\rangle = 0$ et $\widetilde{X}$ est constant. Donc $\widetilde{X}=X_{\bar{g}}$ et $\rho(\widetilde{X})=X_{\gamma_t}\mathbb{1}_{H^c}(t)= X_t\mathbb{1}_{H^c}(t)=\sigma_{\bar{g}_t}\mathbb{1}_{H^c}(t)$, avec σ prévisible en utilisant la Proposition 2.4.

3) $\left([X]^{\mathrm{Q}}\right)^T - [X]^{\mathrm{Q}}_{\gamma_t\wedge T}$ est croissant sur $[\bar{g}, +\infty[$, continu à droite, s'annule sur H et (de la même façon que 1)) $X^{T^2} - \left([X]^{\mathrm{Q}}\right)^T - [X]^{\mathrm{Q}}_{\gamma_t\wedge T}$ est une Q−martingale.

4) On a :

$$\begin{aligned}
[Y, X']^{\mathrm{Q}} &= \rho\left(\left\langle \widetilde{Y}, \widetilde{X'} \right\rangle\right) \\
&= \rho\left(\int h_{s+\bar{g}} d\left\langle \widetilde{X}, \widetilde{X'} \right\rangle_s\right) \\
&= \rho\left(\int h_{s+\bar{g}} d[X, X']^{\mathrm{Q}}_{s+\bar{g}}\right) \\
&= \int_{\mathrm{Q}} h_s d\,[X, X']^{\mathrm{Q}}_s .
\end{aligned}$$

L'égalité (2) résulte du fait que $\left(\int_{\mathrm{Q}} h_s dX_s\right)^2 - \int_{\mathrm{Q}} h_s^2 d[X]^{\mathrm{Q}}_s$ est une Q− martingale qui s'annule en 0 (on a $[X]^{\mathrm{Q}}_0 = 0$ et $\int_{\mathrm{Q}0}^0 h_s dX_s = 0$).

5) Si Y et Y' sont de tels processus, alors (d'après le Théorème 2.2, Chap. IV de [8]), $\widetilde{Y} = \widetilde{Y'}$. D'où $Y = Y'$ par unicité de la fonction ρ (notons que si X est une Q−martingale, alors $X\mathbb{1}_{H^c}$ est prévisible).

6) Supposons que X s'annule sur H (voir la remarque ci-dessous) et montrons d'abord que $X^T = \int_{\mathrm{Q}} \mathbb{1}_{[0,T]}(s) dX_s$. Pour toute Q−martingale uniformément intégrable, on a :

$$[X^T, N]^{\mathrm{Q}}_t = \left([X, N]^{\mathrm{Q}}\right)^T_t - [X, N]^{\mathrm{Q}}_{\gamma_t\wedge T}$$

et

$$\int_{\mathrm{Q}0}^t \mathbb{1}_{[0,T]}(s) d[X, N]^{\mathrm{Q}}_s = \rho\left[\int \mathbb{1}_{[0,T]}(s+\bar{g}) d\left\langle \widetilde{X}, \widetilde{N} \right\rangle_s\right]_t .$$

Mais

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathbb{1}_{[0,T]}(s+\bar{g}) d\left\langle \widetilde{X}, \widetilde{N} \right\rangle_s &= \mathbb{1}_{\{T\geqslant\bar{g}\}} \left\langle \widetilde{X}, \widetilde{N} \right\rangle_{(T-\bar{g})\wedge t} \\
&= \mathbb{1}_{\{T\geqslant\bar{g}\}} [X, N]^{\mathrm{Q}}_{(t+\bar{g})\wedge T} = [X^T, N]^{\mathrm{Q}}_{t+\bar{g}}.
\end{aligned}$$

D'où, (grâce à 5)), $X^T = \int_{\mathrm{Q}} \mathbb{1}_{[0,T](s)} dX_s$. L'associativité de $\int_{\mathrm{Q}}$ nous donne le résultat.

■

Remarque 2.3.

On a :

$$\int_{\mathrm{Q}0}^{t} h_s dX_s = \int_0^t h_s d(X - X_{\gamma.})_s$$

et $X - X_{\gamma.}$ est une Q−martingale nulle sur H.

On donne maintenant la formule d'Itô pour des mesures signées.

Théorème 2.2. *Soit $X := (X^1, \cdots, X^d)$ un vecteur de Q−semimartingales continues à droite et $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Alors $F(X)$ est une Q−semimartingale continue à droite et pour tout $t \geqslant 0$,*

$$F(X_t) = F(X_{\gamma_t}) + \sum_i \int_{\mathrm{Q}0}^{t} \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{\mathrm{Q}0}^{t} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d[X^i, X^j]_s^{\mathrm{Q}},$$

(on suppose que les parties martingales sont uniformément intégrables).

Preuve. Il suffit de montrer que

$$X_t Y_t = X_{\gamma_t} Y_{\gamma_t} + \int_{\mathrm{Q}0}^{t} X_s dY_s + \int_{\mathrm{Q}0}^{t} Y_s dX_s + [X, Y]_t^{\mathrm{Q}}.$$

On a :

$$X_t Y_t = X_{\gamma_t} Y_{\gamma_t} + \rho \left(X_{t+\bar{g}} Y_{t+\bar{g}} - X_{\bar{g}} Y_{\bar{g}} \right).$$

Mais $X_{t+\bar{g}}$ et $Y_{t+\bar{g}}$ sont deux $(\mathcal{F}_{g+t})$−semimartingales. Donc

$$X_t Y_t = X_{\gamma_t} Y_{\gamma_t} + \rho \left(\int_{\bar{g}}^{t+\bar{g}} X_s dY_s + \int_{\bar{g}}^{t+\bar{g}} Y_s dX_s + \left\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y} \right\rangle_t \right).$$

D'où le résultat. ∎

Remarque 2.4.

Si $\mathbb{P}'$ est une probabilité sur $\mathcal{F}_\infty$, telle que $\mathrm{Q} \ll \mathbb{P}'$ et $D'_t = \frac{d\mathrm{Q}}{d\mathbb{P}'}|_{\mathcal{F}_t}$ avec $D'_\infty \neq 0$ $\mathbb{P}'$ *p.s.*, le calcul stochastique fait ci-dessus, reste vrai en remplaçant la martingale $D = \left(\frac{d\mathrm{Q}}{d|\mathrm{Q}|}|_{\mathcal{F}_t} \right)_{t \geqslant 0}$ par $(D'_t)_{t \geqslant 0}$.

Voici le Théorème de Girsanov pour des mesures signées :

Théorème 2.3. *Toute $\mathbb{P}$−semimartingale est une Q−semimartingale. Plus précisément, si X est une $\mathbb{P}$−martingale locale, alors $X_t^* = X_t - \int_{\mathrm{Q}0}^{t} \frac{d\langle X, D \rangle_s}{D_s}$ est une Q−martingale locale.*

Preuve Triviale à partir du Théorème 4.1.2 de [1]. ∎

Proposition 2.6. *Si M est une $(\mathbb{P},\mathcal{F})$–martingale qui a la propriété de représentation prévisible (PRP) dans la filtration $\mathcal{F}$, alors $\rho(\widehat{M})$ a la PRP par rapport à $(\mathrm{Q},\mathcal{F})$, où*

$$\widehat{M}_t = M_{t+\bar{g}} - M_{\bar{g}} - \int_{\bar{g}}^{t+\bar{g}} \frac{d\langle M, D\rangle_s}{D_s}.$$

($\rho(\widehat{M})$ a la PRP sous Q si, pour toute Q–martingale X, on a : $\forall t \geqslant$, $X_t = X_{\bar{g}_t} + \int_0^t \eta_s d\rho(\widehat{M})_s$ où $(\eta_{t+\bar{g}})_{t\geqslant 0}$ est un processus $(\mathcal{F}_{g+t})_{t\geqslant 0}$–prévisible.)

Preuve. D'après le Théorème 4.1.2 de [1], $\rho(\widehat{M})$ est une Q–martingale. Soit X une Q–martingale, alors, en appliquant la formule d'Itô, on a :

$$X_{t+\bar{g}} = X_{\bar{g}} + \int_0^t \frac{\widetilde{D}_s d\widehat{N}_s - \widetilde{N}_s d\widehat{D}_s}{\widetilde{D}_s^2},$$

où $N = DX$. D'où

$$X_t = X_{\gamma_t} + \int_0^t \frac{D_s d\rho(\widehat{N})_s - N_s d\rho(\widehat{D})_s}{D_s^2}.$$

Reste à montrer que $\widehat{N}$ est une intégrale stochastique par rapport à $\widehat{M}$. Si $N_t = \int_0^t h_s dM_s$ pour un processus h, $\mathcal{F}$–prévisible, alors $\widehat{N}_t = \int_0^t h_{s+\bar{g}} d\widehat{M}_s$. ∎

En utilisant le calcul stochastique sous Q, on retrouve dans la proposition suivante un résultat de [3] :

Proposition 2.7. *Posons $C_t = v.p \int_0^t \frac{d\langle D\rangle_s}{D_s}$. Pour toute fonction f de classe C^1, on a :*

$$D_t f(C_t) = D_0 f(C_0) + \int_0^t f(C_s) dD_s + \int_0^t f'(C_s) d\langle D\rangle_s.$$

Preuve. On va montrer la Proposition pour $f(x) = x$ et le cas général se fait de façon similaire. D'après le Théorème 2.2, on a :

$$D_t C_t = D_{\gamma_t} C_{\gamma_t} + \int_0^t C_s dD_s + \int_0^t D_s \frac{d\langle D\rangle_s}{D_s}.$$

D'où

$$D_t C_t = \int_0^t C_s dD_s + \langle D\rangle_t - \left(\int_0^{\gamma_t} C_s dD_s + \langle D\rangle_{\gamma_t}\right).$$

($D_{\gamma_t} = 0$ si $\gamma_t \neq 0$ et $C_0 = 0$). Mais $D_t C_t$ est continu, donc $\int_0^{\gamma_t} C_s dD_s + \langle D\rangle_{\gamma_t}$ est continu, en particulier il est continu en $d_t = \inf\{s > t, D_s = 0\}$. Donc :

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_0^{\gamma(d_t-\varepsilon)^+} C_s dD_s + \langle D\rangle_{\gamma_{d_t-\varepsilon}}\right)\mathbb{1}_{\{d_t<+\infty\}} = \left(\int_0^{d_t} C_s dD_s + \langle D\rangle_{d_t}\right)\mathbb{1}_{\{d_t<+\infty\}}.$$

Alors, $-\int_{\bar{g}_t}^{d_t} C_s dD_s = \langle D\rangle_{d_t} - \langle D\rangle_{\bar{g}_t}$. Donc $\int_0^{d_t} C_s dD_s + \langle D\rangle_{d_t} = 0$, et puis $\int_0^{\gamma_t} C_s dD_s + \langle D\rangle_{\gamma_t} = 0$, $\forall t \geqslant 0$. ■

Voici maintenant le contre exemple promis à la suite de la Proposition 1.3 :

Exemple 2.1.

Considérons W la mesure de Wiener sur $C([0,1],\mathbb{R})$ et (B_t) le processus canonique sur cet espace, qui est donc un mouvement brownien sous W. Posons $\mathrm{Q} := B_1 \cdot W$ et $B_t^* := X_t - v.p \int_0^t \frac{ds}{B_s}$.
Le processus B^* est une Q−martingale qui a la PRP par rapport à Q (Proposition 2.7). Notons

$$Y_t := {}_{\mathrm{Q}}\!\int_0^t \frac{1}{\sqrt{|B_s|}} dB_s^*.$$

Comme ${}_{\mathrm{Q}}\!\int_0^t \frac{1}{|B_s|} ds < +\infty$ (Lemme 4.1.1 de [1]), Y est une Q−martingale. Mais le processus de variation quadratique de Y est égal à $\int_0^t \frac{1}{|B_s|} ds = +\infty$, $\forall t > 0$.

3. Exemples et applications

Exemple 3.1.

On considère la mesure de Wiener W sur $C([0,1])$ et (X_t) le processus canonique sur cet espace, qui est donc un mouvement brownien sous W.
On note $\mathcal{F}_t \equiv \sigma(X_s, s \leqslant t)_{t\leqslant 1}$ la filtration naturelle de X. On définit la mesure signée $\mathrm{Q} = X_1 \cdot W$. On a : $\mathrm{Q}(1) = 0$ (on suppose que $X_0 = 0$). D'après le Théorème 1.1, on a : $\mathrm{Q}|_{\sigma(M)} = 0$ pour tout Q−mouvement brownien M.
Considérons les deux classes suivantes :

$$\mathcal{C}_1 = \{A \in \mathcal{F}_1, \mathrm{Q}(A) = 0\},$$
$$\mathcal{C}_2 = \{A \in \mathcal{F}_1, W(\mathbb{1}_A \cdot \mathrm{sgn}X) = 0\}.$$

Lemme 3.1.
(i) $\Omega \in \mathcal{C}_j$, $j = 1,2$.
(ii) *Si* $A \in \mathcal{C}_j$, *alors* $A^c \in \mathcal{C}_j$, $j = 1,2$.
(iii) *Si* (A_n) *est une suite croissante d'éléments de* $\mathcal{C}_j$, *alors* $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}_j$, $j = 1,2$.
(iv) *Si* A *et* B *sont deux ensembles disjoints de* $\mathcal{C}_j$, *alors* $A \cup B \in \mathcal{C}_j$, $j = 1,2$.

Preuve. Évident. ■

Lemme 3.2.
(i) $\sigma(\mathcal{C}_1) = \mathcal{F}_1$ *(ce qui montre que* $\mathcal{C}_1$ *n'est pas une tribu).*
(ii) $\mathcal{C}_1 = \{A,\ A$ *est* $\mathbb{P}'$*−indépendant de* $\mathrm{sgn}X\}$, *où* $\mathbb{P}' = \sqrt{\frac{\pi}{2}}|X_1| \cdot W$.

Preuve.
(i) Il est facile de voir que la tribu $\mathcal{G}_1$ de la filtration de Goswami-Rao de X est incluse dans $\mathcal{C}_1$ (car Q est impaire : $\mathrm{Q}(H(X)) = -\mathrm{Q}(H(-X))$).
Soit $X_t^* = X_t - v.p\int_0^t \frac{1}{X_s}ds$. X^* est un Q−mouvement brownien, d'où $\sigma(X^*) \subset \mathcal{C}_1$.
On a, si $g_1 = \sup\{t \leqslant 1, X_t = 0\}$, alors :

$$|X_{t+g_1}| = \mathrm{sgn}X_1(X^*_{t+g_1} - X^*_{g_1}) + \int_0^t \frac{ds}{|X_{s+g_1}|}.$$

Comme $X^*_{t+g_1} - X^*_{g_1}$ est un $(\mathbb{P}', \mathcal{F}_{g_1+t})$−mouvement brownien, on a :

$$\sigma\left(|X|_{(s+g_1)\wedge 1}, s \geqslant 0\right) = \sigma\left(\mathrm{sgn}X\left(X^*_{(s+g_1)\wedge 1} - X^*_{g_1}\right), s \geqslant 0\right).$$

De la même façon :

$$\sigma\left(|X|_{(s+g_t)\wedge 1}, s \geqslant 0\right) = \sigma\left(\mathrm{sgn}X_t\left(X^*_{(s+g_t)\wedge 1} - X^*_{g_t}\right), s \geqslant 0\right) \quad \forall t \in [0,1].$$

Donc

$$\sigma(|X|) \vee \sigma(X^*) = \mathcal{F}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_1).$$

(ii) Évident. ■

Question 3.1.

Peut-on caractériser plus explicitement les classes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$?

Exemple 3.2. *Martingales mesures et mesures signées.*

Considérons W la mesure de Wiener sur $C([0,1], \mathbb{R})$ et (X_t) le processus canonique sur cet espace, qui est donc un mouvement brownien sous W.
On note $(\mathcal{F}_t := \sigma\{X_s, s \leqslant t\})_{t\leqslant 1}$ la filtration naturelle du processus canonique, et on considère :

$$X_t^\Phi := X_t - \int_0^t \Phi_s ds, \tag{3}$$

pour un processus $\{\Phi_s\}$ $(\mathcal{F}_s)$−prévisible, dont on suppose que

$$\int_0^1 |\Phi_s| ds < \infty. \tag{4}$$

On se pose ensuite la question suivante :

Question 3.2.

Existe-t-il une mesure de probabilité $\widetilde{W}$ équivalente au sens de Radon-Nikodym à W telle que sous $\widetilde{W}$, $(X_t^\Phi,\ t \leqslant 1)$ soit une $(\mathcal{F}_t)$−martingale ?

Posons

$$\widetilde{W}|_{\mathcal{F}_t} = D_t \cdot W|_{\mathcal{F}_t},$$

et supposons que la réponse à la question soit affirmative. Alors, nécessairement on doit avoir :

$$\frac{d\langle D, X\rangle_s}{D_s} = \Phi_s ds, \tag{5}$$

d'où, $D_t = 1 + \int_0^t D_s \Phi_s dX_s$, et on doit avoir :

$$\int_0^t \Phi_s^2 ds < \infty \quad p.s. \tag{6}$$

Si on a seulement l'hypothèse (4), et non pas (6), on peut se demander s'il n'est pas possible de réaliser le même type de construction, mais avec

$$\widetilde{W}|_{\mathcal{F}_t} = \Delta_t \cdot W|_{\mathcal{F}_t}, \tag{7}$$

(Δ_t) pouvant être signée. La relaxation de la condition de stricte positivité pouvant peut-être permettre d'atteindre les processus Φ satisfaisant seulement (4).
Puisque l'on a supposé que (Δ_t) peut changer de signe, autant faire commencer (Δ_t) en 0 au temps 0.
Notons donc :

$$\Delta_t = \int_0^t \delta_s dX_s,$$

et l'identité (5) avec Δ au lieu de D va nous donner l'équation :

$$\frac{\delta_s}{\Delta_s} = \Phi_s. \tag{5'}$$

Une sous-question est donc maintenant posée :

Question 3.3.

Pour quelles martingales continues (Δ_t) telles que $\Delta_0 = 0$, a-t-on :

$$\int_0^t \frac{|\delta_s| ds}{|\Delta_s|} < \infty\,? \tag{8}$$

Supposons que $\{s,\ \delta_s = 0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle, on peut alors écrire

$$\int_0^t \frac{|\delta_s| ds}{|\Delta_s|} \equiv \int_0^t \frac{\delta_s^2 ds}{|\delta_s||\Delta_s|} \equiv \int_0^t \frac{(d\langle\Delta\rangle_s)}{|\delta_s||\Delta_s|} = \int_0^{\langle\Delta\rangle_t} \frac{du}{|\delta_{\tau_u}||\beta_u|}, \tag{9}$$

où (τ_u) est l'inverse de $(\langle\Delta\rangle_t,\ t \geqslant 0)$ et $(\beta_u,\ u \geqslant 0)$ est le mouvement brownien de DDS attaché à (Δ_t).
Remarquons maintenant que si le processus $(\delta_s,\ s \geqslant 0)$ est localement borné, alors d'après (9) par exemple, la propriété d'intégrabilité (8) ne peut être satisfaite.
Néanmoins, il existe des processus prévisibles (δ_s) tels que (8) soit satisfaite. En effet, voici un exemple :

Soit Δ la martingale $\Delta_t = \int_0^t \frac{1}{\Delta_s^{2n}} dX_s$, Δ est adaptée à $\mathcal{F}$ (d'après le Théorème 3.3, Chap. III de [2]).

Si Y est la semimartingale $Y_t = X_t - \int_0^t \frac{1}{\Delta_s^{2n+1}} ds$, alors $\frac{d\langle \Delta, Y\rangle_s}{\Delta_s} = \frac{ds}{\Delta_s^{2n+1}}$, avec $\int_0^t \frac{1}{|\Delta_s|^{2n+1}} ds < +\infty$.

D'où, Y est une Q−martingale, où $\mathrm{Q} = \Delta_1 \cdot \mathbb{P}$ et $\int_0^t \frac{1}{|\Delta_s|^{4n+1}} ds = +\infty$ (sinon $L_t(\Delta) = 0$).

Exemple 3.3. *Mesures complexes.*

a) Considérons W la mesure de Wiener sur $\Omega := C([0,1], \mathbb{R})$, X le processus des coordonnées et $\mathcal{F}$ la filtration de X.
Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, posons $T_{-a} = \inf\{t \geqslant 0,\ X_t = -a\}$. Il est bien connu que, sous $\mathbb{P}_a^{(3)} := \frac{(X_{1\wedge T_{-a}} + a)}{a} \cdot W$, $(X_t + a)_{t \geqslant 0}$ est un BES (3) issu de a .
Pour définir un processus "type Bessel" à valeurs complexes, on procède de la même façon que ci-dessus.
Un processus adapté χ est dit une martingale pour une mesure complexe $\mathrm{Q} := \mathrm{Q}_1 + i\mathrm{Q}_2$ avec Q_1 et Q_2 deux mesures réelles, si χ est une martingale pour Q_1 et pour Q_2.
Considérons la mesure complexe suivante :

$$\mathrm{Q}^z = \frac{(z + X_1)}{z} \cdot W, \quad \text{avec} \quad z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}.$$

Posons $\widehat{X}_t = X_t - C_t$ où $C_t = \int_0^t \frac{ds}{z + X_s}$.

Proposition 3.1.
(i) *$\widehat{X}$ est une Q^z−martingale issue de 0 et $\widehat{X}$ est un mouvement brownien réel sous Q^z.*
(ii) *On considère l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$\chi_t = z + B_t + \int_0^t \frac{1}{\chi_s} ds, \tag{E}$$

où $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ et B est un mouvement brownien réel.

$\left((\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{Q}^z), X + z, \widehat{X}\right)$ est une solution de cette équation qui n'est pas forte.

Preuve. On vérifie facilement que $\widehat{X}(z + X)$ est une W−martingale.
(i) Notons $a := \Re\frac{1}{z}$ et $b := \Im\frac{1}{z}$, $\mathrm{Q}_1^z := (1 + aX_1) \cdot W$ et $\mathrm{Q}_2^z := bX_1 \cdot W$. On a : $\mathrm{Q}^z = \mathrm{Q}_1^z + i\mathrm{Q}_2^z$. $\widehat{X}$ est une Q_1^z−martingale avec $\left\langle \widehat{X} \right\rangle_t = t$. D'où $\widehat{X}$ est un Q_1^z−mouvement brownien réel.
De la même façon, $\mathrm{Q}_2^z|_{\sigma(\widehat{X})} = 0$ d'après le Théorème 1.1. Ce qui montre que, pour une fonction mesurable F bornée, on a :

$$\mathrm{Q}^z\left(F(\widehat{X})\right) = \mathrm{Q}_1^z\left(F(\widehat{X})\right) = W(F).$$

(ii) On a clairement que $\sigma(\widehat{X}) \subsetneq \sigma(X)$, car sur $\sigma(\widehat{X})$, Q^z est une probabilité et est sur $\sigma(X)$ une mesure complexe $(\mathrm{Q}^z(X_1^2) = z)$.
D'où, $X + z$ est une solution de l'équation (E) qui n'est pas forte. ■

b) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, W_z^{\mathbb{C}})$ l'espace canonique d'un mouvement brownien plan $Z = X + iY$ issu de $z = a + ib \in \mathbb{C}$.
On considère la mesure complexe : $\widehat{\mathrm{Q}} = Z_1 \cdot W_z^{\mathbb{C}}$. Remarquons que sous $\widehat{\mathrm{Q}}$, le processus des coordonnées Z est une martingale (et donc Z^n est aussi une $\widehat{\mathrm{Q}}$−martingale pour tout $n \in \mathbb{N}$).
La proposition suivante nous donne une caractérisation des mesures complexes Q qui sont absolument continues par rapport à $W_z^{\mathbb{C}}$ et telles que Z soit une Q−martingale.

Proposition 3.2. *Si* Q *est une mesure sur* $C([0,1], \mathbb{C})$ *telle que* $\mathrm{Q} \ll W_z^{\mathbb{C}}$, *alors* Z *est une* Q−*martingale si et seulement si*

$$D_t := \frac{d\mathrm{Q}}{dW_z^{\mathbb{C}}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \delta + \int_0^t u_s dZ_s,$$

où $\delta \in \mathbb{C}$ *et* u *un processus* $\mathcal{F}$−*prévisible.*

Preuve. Il existe deux processus prévisibles u et v tels que

$$D_t = \delta + \int_0^t u_s dZ_s + \int_0^t v_s d\overline{Z}_s.$$

ZD est une $W_z^{\mathbb{C}}$−martingale si et seulement si $v_t = 0 \;\; dtd\mathbb{P}\; p.s.$ ■

Poroposition 3.3.
(i) $\widehat{Z}_t = \overline{Z}_t - 2\displaystyle\int_0^t \frac{1}{Z_s} ds$ *est une* $\widehat{\mathrm{Q}}$−*martingale et on a :*
si $z = 0$, *alors* $\widehat{\mathrm{Q}}|_{\sigma(\widehat{Z})} = 0$;
si $z \neq 0$, *alors* $\widehat{Z}$ *est un mouvement brownien plan sous* $\frac{1}{z} \cdot \widehat{\mathrm{Q}}$.
(ii) *Si* $z \neq 0$, *le triplet* $\big((\Omega, \mathcal{F}, \widehat{\mathrm{Q}}), \overline{Z}, \widehat{Z}\big)$ *est une solution de l'équation différentielle stochastique :* $\chi_t = z + B_t + \displaystyle\int_0^t \frac{ds}{\overline{\chi}_s}$ *où* B *est un mouvement brownien plan.*

Preuve.
(i) En appliquant la formule d'Itô, on obtient facilement que pour tout $t \geqslant 0$,

$$\widehat{Z}_t Z_t = M_t + \langle Z, \overline{Z} \rangle_t - 2\int_0^t \frac{Z_s}{Z_s} ds = M_t,$$

où M est une $W_z^{\mathbb{C}}$−martingale.

On a :

$$\widehat{\mathrm{Q}} = X \cdot W_z^{\mathbb{C}} + iYW_z^{\mathbb{C}} = \widehat{\mathrm{Q}}_1 + i\widehat{\mathrm{Q}}_2,$$

$$\left\langle \Re\widehat{Z} \right\rangle_t = \left\langle \Im\widehat{Z} \right\rangle_t = t \quad \text{et} \quad \left\langle \Re\widehat{Z}, \Im\widehat{Z} \right\rangle_t = 0.$$

D'où $\widehat{Z}$ est un $\frac{1}{a}\widehat{\mathrm{Q}}_1$ et $\frac{1}{b}\widehat{\mathrm{Q}}_2$−mouvement brownien plan (si a et b sont différents de 0). Si F est une fonction mesurable bornée, alors

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{Q}}\big(F(Z)\big) &= aW_z^{\mathbf{C}}(F) + ibW_z^{\mathbf{C}}(F)\\ &= zW_z^{\mathbf{C}}(F).\end{aligned}$$

■

Remarque 3.1.

Dans les derniers mois, nous avons vu au moins deux sources d'intérêt pour des processus complexes, ou des mesures complexes proches de ceux que nous avons considérés dans ce papier ; citons seulement les travaux récents de Lawler-Schramm-Werner [7] où l'équation (E) ci-dessus joue un rôle important, ainsi que Jarrow (1999), dans : Review of Finance Studies, où figurent certaines mesures signées.

Références

[1] Azéma J., Yor M. (1992) : Sur les zéros des martingales continues, Sém. Pro. XXVI, Lec. Not. in Math. 1526, p. 248-306, Springer.

[2] Beghdadi-Sakrani S. (2000) : Martingales continues, filtrations faiblement browniennes et mesures signées, Thèse de l'Univ. P. et M. Curie, Paris.

[3] Bertoin J. (1989) : Applications de la théorie spectrale des cordes vibrantes aux fonctionnelles additives principales d'un brownien réfléchi. Ann. I.H.P. **25**, 3, p. 307-323.

[4] Biane Ph., Yor M. (1987) : Valeurs principales associées aux temps locaux browniens, Bull. Sc. Math. 2ème série, 111, p. 23-101. Not. in Math. 1526, p. 248-306, Springer.

[5] Dellacherie C., Meyer P. A. (1980) : Probabilités et potentiel, Chap. V à VIII, Théorie des martingales, Hermann.

[6] Föllmer H. (1981) : Calcul d'Itô sans probabilités, Sém. Pro. XV, Lec. Not. in Math. 850, p. 143-150, Springer.

[7] Lawler G. F., Schramm O., Werner W. : Values of Brownian intersection exponents I: Hafl-plane exponents, à paraître.

[8] Revuz D., Yor M. (1994) : Continuous Martingales and Brownian Motion, second edition, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer.

[9] Ruiz de Chavez J. (1984) : Le Théorème de Paul Lévy pour des mesures signées, Sém. Pro. XVIII, Lec. Not. in Math. 1059, p. 245-255, Springer.

[10] Russo F., Vallois P. : Stochastic calculus with respect to continuous finite quadratic variation processes, à paraître.

S. Beghdadi-Sakrani
Laboratoire de Probabilité, Tour 56,
Université Pierre et Marie Curie, 4, place Jussieu,
75252 Paris Cedex 05, France.