SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

SAMIA BEGHDADI-SAKRANI

Une martingale non pure, dont la filtration est brownienne

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 36 (2002), p. 348-359

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_2002__36__348_0>

Une martingale non pure, dont la filtration est brownienne

Samia BEGHDADI-SAKRANI

Abstract. Let $(\mathcal{B}_t)_{t\geqslant 0}$ be the filtration of a Brownian motion $(B_t)_{t\geqslant 0}$ on $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. An example is given of an extremal non-pure martingale which generates the filtration $(\mathcal{B}_t)_{t\geqslant 0}$. We discuss an example, due to F. Knight, of a non-extremal martingale with the same property. We also give some examples of filtrations with Sp Mult$\leqslant 2$.

Résumé. Soit $(\mathcal{B}_t)_{t\geqslant 0}$ la filtration d'un mouvement brownien $(B_t)_{t\geqslant 0}$ dans $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Un exemple d'une martingale extrémale non-pure qui engendre la filtration $(\mathcal{B}_t)_{t\geqslant 0}$, est donné. On discute aussi un exemple de F. Knight, d'une martingale non-extrémale avec la même propriété. En plus, on donne des exemples de filtrations avec Sp Mult$\leqslant 2$.

Keywords. Pure and/or extremal martingales; Ocone martingale; Brownian filtration.

0. Introduction

Parmi la série de questions posées à la fin du Chap. V de [11] (ou aussi dans [12] et [15]), figure la question suivante : *Une filtration étant donnée sur un espace probabilisé, comment reconnaître si elle est engendrée par un mouvement brownien ou non ?* Cette question a surtout de l'intérêt pour une filtration faiblement brownienne, i.e. il existe un $\mathcal{F}$−mouvement brownien qui a la propriété de représentation prévisible (PRP) par rapport à $\mathcal{F}$.

En toute généralité, il existe des filtrations faiblement browniennes, qui ne sont pas browniennes, comme cela est montré dans [7], article qui a été suivi par d'autres exemples de filtrations non-browniennes donnés dans [4], [8], [13].

Ces articles constituent des progrès importants qui soulèvent bien sûr de nouvelles questions, notamment, comment établir "effectivement" le caractère non-brownien d'une filtration faiblement brownienne ?

Dans tous les travaux cités ci-dessus, c'est la notion de non-confort (introduite par Tsirel'son dans [13] et que nous ne discuterons pas dans ce papier) de ces filtrations qui sert de critère pour montrer qu'elles sont non-browniennes.

On pourrait, de façon un peu naïve, penser qu'une filtration engendrée par une martingale extrémale non pure ou par une martingale non extrémale, ne peut être

brownienne. En fait, nous montrons dans la section 3, que ceci n'est pas vrai. Le caractère non-brownien d'une filtration faiblement brownienne est beaucoup plus délicat.
Dans la section 2, on montre aussi que la filtration brownienne peut-être engendrée par une martingale non-extrémale. Dans la section 4, on discute la propriété suivante dénotée par $(\star)$ dans [1] :
Notons par M une martingale continue et par $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle. M satisfait la propriété $(\star)$ si et seulement si pour tout T, $\mathcal{F}-$temps d'arrêt p.s. fini tel que $\mathbb{P}(M_T{=}0){=}0$,

$$\mathcal{F}^+_{G_T} = \mathcal{F}^-_{G_T} \vee \sigma(M_T < 0), \qquad (\star)$$

où $G_t = \sup\{s \leqslant t,\ M_s > 0\}$, $t \in [0, +\infty[$.

Les auteurs de [1] ont montré que la propriété $(\star)$ est satisfaite par toute martingale pure. On comprend ici que $(\star)$ est une propriété de filtration plutôt que de martingale. On termine notre article par un complément au Théorème 1 de [14].

1. Préliminaires

Dans ce travail, les espaces de probabilité sont toujours complets, les sous-tribus considérées contiennent tous les négligeables et les filtrations sont continues à droite. Le processus intégrale stochastique de H par rapport à X sera noté $\int HdX$, la filtration naturelle d'un processus X sera notée $\mathcal{F}^X$.
Une $\mathcal{F}-$martingale locale continue X a la PRP par rapport à la filtration $\mathcal{F}$ si pour toute $\mathcal{F}-$martingale M, il existe un processus $\mathcal{F}-$prévisible H tel que

$$M = M_0 + \int HdX.$$

X est dite $\mathcal{F}-$extrémale si $\mathcal{F}_0$ est triviale et si X a la $\mathcal{F}-$PRP. Si de plus $\mathcal{F}^X = \mathcal{F}$, M est dite extrémale (cette terminologie est justifiée par le fait que la loi d'une martingale extrémale est un point extrémal dans l'ensemble convexe $\mathcal{M}$ de toutes les mesures de probabilité sur $W = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, qui rendent le processus des coordonnées une martingale locale).
Une martingale locale continue X telle que $\langle X\rangle_\infty = \infty$ est dite pure si $\mathcal{F}^X_\infty = \mathcal{F}^B_\infty$ où B est le mouvement brownien de Dubins-Schwarz (DDS) associé à X, ce qui équivaut à dire que pour tout t, $\langle X\rangle_t$ est $\mathcal{F}^B_\infty-$mesurable.
Toute martingale pure est extrémale mais l'inverse n'est pas vrai. Yor a donné dans [15] un exemple d'une martingale extrémale non pure, sa filtration naturelle est en fait brownienne, c'est ce qu'on démontre dans ce papier.
On rappelle tout d'abord la définition de l'immersion donnée dans [4].

Définition 1.1. *Une filtration $\mathcal{F}$ est dite immergée dans une filtration $\mathcal{G}$ (définie sur le même espace de probabilité) si toute $\mathcal{F}-$martingale est une $\mathcal{G}-$martingale.*

2. Exemple de martingale non-extrémale dont la filtration est brownienne

On a la caractérisation suivante des martingales extrémales par rapport à une filtration brownienne :

LEMME 2.1. *Soit B un mouvement brownien, $\mathcal{B}$ sa filtration naturelle et M une $\mathcal{B}-$martingale. M est $\mathcal{B}-$extrémale si et seulement si $d\langle M\rangle$ est équivalente à λ p.s., où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$.*

Preuve. Supposons que M soit $\mathcal{B}-$extrémale mais que $d\langle M\rangle$ ne soit pas équivalent à λ *p.s.* Il existe un processus $\mathcal{B}-$prévisible H tel que

$$M = M_0 + \int HdB \quad \text{et} \quad H^2 = \frac{d\langle M\rangle}{d\lambda}.$$

La $\mathcal{B}-$martingale $\int \mathbb{1}_{\{H=0\}}dB$ ne peut être représentée par M.
Si maintenant $d\langle M\rangle \sim \lambda$, il suffit de représenter B comme intégrale stochastique par rapport à M.
On a $H \neq 0$ $\lambda \otimes d\mathbb{P} p.p.$ donc $B = \int \frac{1}{H}dM$. ∎

Dans [10], Lane a donné des réponses partielles à la question suivante [11] :
Si B est un mouvement brownien, f borélienne et M la martingale $\int f(B)dB$, sous quelles conditions la filtration $\mathcal{F}^M$ est-elle brownienne ?
Un exemple important est lorsque $f \geqslant 0$, $\mu(\{f=0\}) > 0$ et $\{f=0\}$ ne contenant aucun intervalle (μ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$). Ce cas a été étudié par Knight dans [9] avec $F = \{f = 0\}$ un sous ensemble de $[0,1]$, construit par la méthode de Cantor, en supprimant $]\frac{3}{8}, \frac{5}{8}[$ puis $]\frac{5}{32}, \frac{7}{32}[$ et $]\frac{19}{32}, \frac{21}{32}[$ et ainsi de suite. On définit les ensembles (F_n) au moyen de leurs complémentaires F_n^c par :

$$F_1^c =]\tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{8}[\quad , \quad F_2^c = F_1^c \cup]\tfrac{5}{32}, \tfrac{7}{32}[\cup]\tfrac{19}{32}, \tfrac{21}{32}[,$$

$$F_n^c = F_{n-1}^c \cup \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} A_n^k, \quad n \geqslant 2,$$

où $A_n^k =]a_n^k, b_n^k[$ sont des intervalles disjoints de longueur $\frac{1}{4^n}$.

$$F^c = \bigcup_n F_n^c = \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcup_{k=1}^{\ell_n} A_n^k \quad \text{avec} \quad \ell_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1.$$

D'où $\mu(F^c) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n^c) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{2}$.

PROPOSITION 2.1. *Soit B un mouvement brownien, $\mathcal{B}$ sa filtration et M la martingale définie par*

$$M = c' \int \mathbb{1}_{\{B<0\}}dB + c'' \int \mathbb{1}_{\{B>1\}}dB + \sum_{n\geqslant 1} \sum_{n=k}^{\ell_n} c_n^k \int \mathbb{1}_{A_n^k}(B)dB,$$

où les nombres (c_n^k), $n \geqslant 1$, $k \in \{1, ..., l_n\}$, c' et c'' sont strictement positifs et tous différents. La martingale M est non extrémale et on a $\mathcal{F}^M = \mathcal{B}$.

REMARQUE 2.1.

Afin de ne pas alourdir la démonstration de cette Proposition, on a rassemblé à la fin de cet article (en appendice) quelques points non détaillés.

Preuve. Les processus B^- et $(B-1)^+$ sont $\mathcal{F}^M$–adaptés (Point 1), il nous reste à démontrer que $B_t\ \mathbb{1}_{\{0<B_t<1\}}$ est $\mathcal{F}^M$–adapté.
On considère les martingales $M_n^k = \int \mathbb{1}_{A_n^k}(B)dB$ (remarquons que (M_n^k) sont aussi $\mathcal{F}^M$–adaptées (Point 1)) et les temps d'arrêt $\left\{(S_n^k)^r, (T_n^k)^r\right\}_{r\geqslant 1}$ d'entrée et de sortie successifs de B dans l'ensemble A_n^k. Ces temps d'arrêt sont $\mathcal{F}_\infty^{M_n^k}$–mesurables car ce sont les instants où $\Delta C_n^k > 0$ avec C_n^k l'inverse de $\langle M_n^k \rangle$.
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, ..., \ell_n\}$ et notons pour tout $r \geqslant 1$

$$S^r := (S_n^k)^r \quad , \quad T^r := (T_n^k)^r \quad , \quad A_n^k =]a,b[\quad , \quad N := M_n^k \quad \text{et} \quad \alpha = c_n^k,$$

(attention ! a, b, N et α dépendent de k et n). Montrons que la suite double $(B_{S^r}, B_{T^r})_{r\geqslant 1}$ est $\mathcal{F}_\infty^M$–mesurable. On a $N_t = 0$ jusqu'à S^1 et $B_{S^1} = a$.
Si $t \in [S^1, T^1]$, alors

$$N_t = \int_{S^1}^t dB_s = B_t - a,$$

d'où on connait B_{T^1} et pour tout $r \geqslant 1$ et $t \in [S^r, T^r]$ on a

$$M_t - M_{S^r} = \alpha(N_t - N_{S^r}) = \alpha(B_t - B_{S^r}). \tag{1}$$

Alors

$$M_{T^r} - M_{S^r} = \alpha(B_{T^r} - B_{S^r}).$$

Donc, si on connait M et B_{T^r}, on peut connaître B_{S^r} et vice-versa.
Si $M_{T^r} - M_{S^r} > 0$ alors $B_{T^r} = b$ et $B_{S^r} = a$.
Si $M_{T^r} - M_{S^r} < 0$ alors $B_{T^r} = a$ et $B_{S^r} = b$.
Il nous reste le cas où $M_{T^r} - M_{S^r} = 0$ (et donc $B_{T^r} = B_{S^r}$).
Remarquons que

$$B_{T^r} = B_{S^{r+1}}. \tag{2}$$

En effet, si B est au dessus de $]a,b[$ après T^r, alors $B_{T^r} = b = B_{S^{r+1}}$, et si B est en dessous de $]a,b[$ après T^r, alors $B_{T^r} = a = B_{S^{r+1}}$.
Supposons qu'on connaisse M jusqu'à l'instant t, puisqu'on connait B_{T^1}, alors de (2), on peut connaître B_{S^2} et B_{T^3} et ainsi de suite, on peut connaître la suite $(B_{T^r},\ B_{S^r})$ pour $T^r, S^r \leqslant t$.
Pour finir la preuve, soit $t_0 \leqslant t$, l'ensemble $\{B_{t_0} \in F^c\}$ est $\mathcal{F}_{t_0}^M$–mesurable (Point 2). Si $B_{t_0} \in F^c$, alors il existe n et k tels que $B_{t_0} \in A_n^k$ et donc, il existe r tel que $t_0 \in]S^r, T^r[$. On a

$$B_{t_0} = B_{t_0} - B_{S^r} + B_{S^r},$$

et l'égalité (1) nous donne

$$B_{t_0} = \frac{1}{\alpha}(M_{t_0} - M_{S^r}) + B_{S^r}.$$

Comme F^c est dense dans $[0,1]$ (Point 3), on a :

$$B_t \, \mathbf{1}_{\{0<B_t<1\}} = \limsup_{s\downarrow t} B_s \, \mathbf{1}_{\left\{B_s\in F^c\right\}} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^M = \mathcal{B}.$$

Il reste à établir que M est non-extrémale. Ceci découle aisément du Lemme 2.1, puisque $\mu(F) > 0$. ■

3. Exemples de martingales extrémales non pures dont les filtrations sont browniennes

On va démontrer maintenant que la filtration de la martingale extrémale non pure donnée dans [15], est brownienne.

THÉORÈME 3.1. *La filtration brownienne peut être engendrée par une martingale extrémale non pure.*

Preuve. Soit B un mouvement brownien et $\mathcal{B}$ sa filtration naturelle. On commence par considérer l'équation stochastique sans terme de drift

$$dX_t = \varphi(X_t)dB_t \quad , \quad X_0 = 0 \quad \text{où} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2+\frac{x}{1+|x|}}}.$$

Remarquons que φ est à variation finie et $\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant |\varphi(x)| \leqslant 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Le Théorème 3.5 (iii), Chap. IX de [11] est applicable : on a donc $\mathcal{F}^X = \mathcal{B}$.

La fonction φ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, d'où $\mathcal{F}^{\langle X\rangle} = \mathcal{F}^X$.

On définit la martingale

$$M_t = \tilde{\gamma}_{\langle X\rangle_t} \quad \text{où} \quad \tilde{\gamma}_t = \int_0^t \operatorname{sgn}\gamma_s d\gamma_s$$

et γ est le mouvement brownien de DDS associé à X.

On a : $\mathcal{F}^{\langle M\rangle} = \mathcal{F}^X = \mathcal{F}^M = \mathcal{B}$.

Il nous reste à montrer que M est extrémale non pure. Comme φ est strictement positive, dA est équivalente à la mesure de Lebesgue, mais $\mathcal{F}^M$ est une filtration brownienne, en conséquence, à l'aide du Lemme 2.1, on déduit que M est extrémale. M est non pure car

$$\mathcal{F}^{\tilde{\gamma}}_\infty \subsetneq \mathcal{F}^{\gamma}_\infty = \mathcal{F}^M_\infty.$$

■

Voici un autre exemple d'une martingale extrémale non pure qui engendre une filtration brownienne :

Théorème 3.2. *Soit B un mouvement brownien. Il existe un processus prévisible H strictement positif tel que $N_t = \int_0^t H(B_u, u \leqslant s) dB_s$ soit une martingale extrémale non pure.*

Preuve. Notons (T_t) un changement de temps strictement croissant et absolument continu tel que (B_{T_t}) engendre une filtration non brownienne (en vertu du Théorème 4.1 de [8]). On a $M_t := B_{T_t} = \int_0^t f(M_u, u \leqslant s) d\gamma_s$ (voir Proposition 3.8, Chap. V de [11]), pour γ un mouvement brownien et f un processus prévisible qui peut-être choisi strictement positif. Comme M est pure (donc $\mathcal{F}^M_C = \mathcal{F}^B$), $B_t = \int_0^t g(B_u, u \leqslant s) d\gamma_{C_s}$, où g est un processus $\mathcal{F}^B$-prévisible et C l'inverse de T, donc $N_t := \gamma_{C_t} = \int_0^t H_s dB_s$, avec $H = \frac{1}{g}$. Comme la filtration de M est non brownienne, on a $\mathcal{F}^M \neq \mathcal{F}^\gamma$ et la martingale γ_C n'est pas pure. Mais $\mathcal{F}^N = \mathcal{F}^B$, donc M est une martingale extrémale. ■

Remarque 3.1.

Le Théorème ci-dessus, répond affirmativement à la question suivante posée à la fin du Chap. V de [11] : *Existe-t-il un processus prévisible H strictement positif tel que la martingale $N_t = \int_0^t H_s dB_s$ soit non pure ?*

4. Une classe de martingales qui satisfont la propriété $(\star)$

Dans [1], les auteurs ont discuté une propriété $(\star)$ vérifiée par toutes les martingales pures, en donnant des exemples de martingales extrémales non pures et de martingales non extrémales qui néanmoins satisfont la propriété $(\star)$. Les résultats de Tsirel'son [13] (de [3] aussi) permettent de mieux comprendre quand, et pourquoi, cette propriété est satisfaite. On rappelle la propriété $(\star)$:
Soit M une martingale continue et $\mathcal{F} = \mathcal{F}^M$. Pour tout T, $\mathcal{F}$-temps d'arrêt p.s. fini tel que $\mathbb{P}(M_T=0)=0$,

$$\mathcal{F}^+_{G_T} = \mathcal{F}^-_{G_T} \vee \sigma(M_T < 0), \tag{$\star$}$$

où $G_t = \sup\{s \leqslant t,\ M_s = 0\}$, $t \in [0, \infty[$.

L'exemple donné dans [1] d'une martingale extrémale non pure qui satisfait la propriété $(\star)$ est en fait l'exemple de Yor [15]. On a démontré ci-dessus que sa filtration est brownienne et donc, il est évident que cette martingale vérifie $(\star)$ grâce à la propriété de Barlow démontrée dans [3]. De la même façon, notre martingale non extrémale de la Proposition 2.1, satisfait $(\star)$.
De façon générale, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.1. *Soit $\mathcal{F}$ une filtration telle que toutes les $\mathcal{F}$-martingales soient continues et* Sp Mult$[\mathcal{F}] \leqslant 2$ *(voir la définition ci-dessous), alors toutes les martingales qui engendrent $\mathcal{F}$ satisfont la propriété $(\star)$.*

Avant de prouver cette proposition, on rappelle la définition suivante qui figure dans [3] :

DÉFINITION 4.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{T}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Appelons $\mathcal{Q}$ l'ensemble de toutes les partitions finies et mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$, pour $Q \in \mathcal{Q}$, $|Q|$ est le cardinal de Q.*
La multiplicité conditionnelle de $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{T}$ est la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$:

$$\text{Mult}\,[\mathcal{A}|\mathcal{T}] = \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{Q}} |Q| \mathbb{1}_{S_B}(Q)$$

où

$$S_B(Q) = \{\forall A \in Q,\, \mathbb{P}(A|\mathcal{T}) > 0\}.$$

La multiplicité de scindage d'une filtration $\mathcal{F}$ est le plus petit entier n tel que : Mult $[\mathcal{F}_{L^+}|\mathcal{F}_L] \leqslant n$, pour tout temps honnête L pour $\mathcal{F}$. On la note Sp Mult $[\mathcal{F}]$.

Preuve de la proposition 4.1. Grâce à la Proposition 2.1 de [1] (dûe à [2] p. 269), il suffit de démontrer $(\star)$ pour $T = t$.
Soit $A = \{M_t > 0\}$, on a $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_{G_t}] = 0$ *p.s.*, car $M_{G_t} = 0$ *p.s.* (c'est le Théorème XX-35 de [6]), d'où

$$\mathbb{E}[M_t\ \mathbb{1}_A|\mathcal{F}_{G_t}] = -\mathbb{E}[M_t\ \mathbb{1}_{A^c}|\mathcal{F}_{G_t}] \quad p.s. \tag{3}$$

On définit les ensembles $C_1 = \{\mathbb{P}(A|\mathcal{F}_{G_t}) = 0\}$ et $C_2 = \{\mathbb{P}(A^c|\mathcal{F}_{G_t}) = 0\}$, qui sont dans $\mathcal{F}_{G_t}$. On a

$$\mathbb{P}(A \cap C_1) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A^c \cap C_2) = 0$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{C_1} M_t\ \mathbb{1}_{\{0<M_t<n\}}|\mathcal{F}_{G_t}] \leqslant n\mathbb{P}(A \cap C_1|\mathcal{F}_{G_t}) = 0,$$

d'où

$$\mathbb{1}_{C_1}\mathbb{E}[M_t\ \mathbb{1}_A|\mathcal{F}_{G_t}] = 0$$

et de (3), on a

$$\mathbb{1}_{C_1}\mathbb{E}[M_t\ \mathbb{1}_{A^c}|\mathcal{F}_{G_t}] = 0.$$

Alors, $\mathbb{E}[M_t\ \mathbb{1}_{C_1\cap A^c}] = 0$ et $C_1 \subset \{M_t = 0\}$.

De la même façon, on a $C_2 \subset \{M_t = 0\}$.

En appliquant l'hypothèse $\{M_t = 0\}$ est $\mathbb{P}$−négligeable, on aura $\mathbb{P}(C_1 \cup C_2) = 0$. Donc

$$\mathcal{F}^+_{G_t} = \mathcal{F}_{G_t} \vee \sigma(M_t > 0),$$

d'après la Proposition 3 de [3] (voir aussi Lemme 4.3, Chap. I de [5]). ∎

Voici un exemple d'une filtration de Sp Mult$\leqslant 2$.

DÉFINITION 4.2. *Une filtration engendrée par une martingale pure est dite pure.*

PROPOSITION 4.2. *Soient $\mathcal{F}$une filtration et $C = (C_t)$ un changement de temps pour $\mathcal{F}$. Notons $\widehat{\mathcal{F}} := (\mathcal{F}_{C_t})$. On a :*
(a) Sp Mult$(\mathcal{F}) \leqslant$ Sp Mult$(\widehat{\mathcal{F}})$. *Si de plus C est strictement croissant, on a :* Sp Mult$(\mathcal{F}) =$ Sp Mult$(\widehat{\mathcal{F}})$.
En particulier, si $\mathcal{F}$ est pure (non triviale), alors Sp Mult$(\mathcal{F}) = 2$.
(b) *Soient $\mathcal{F}$ la filtration naturelle d'une martingale continue M et C l'inverse de $\langle M \rangle$.*
Si $\widehat{\mathcal{F}}$ est brownienne, alors M est extrémale et $\mathcal{F}$ est pure.

Preuve.
(a) Supposons que Sp Mult$(\mathcal{F}) = n \in \mathbb{N}^*$. Soit M une $\mathcal{F}$−martingale araignée de multiplicité $n+1$, bornée et issue de l'origine. Alors $M_C = \mathbb{E}[M_\infty|\widehat{\mathcal{F}}]$ est une $\widehat{\mathcal{F}}$−martingale araignée de multiplicité $n+1$ et est issue de l'origine, la Proposition 13 de [3] nous donne $M_\infty = 0$ *p.s.* et Sp Mult$(\mathcal{F}) \leqslant n$.
Si C est strictement croissant et si τ est son inverse, alors d'après le Lemme 5.9 de [12], on a :

$$\widehat{\mathcal{F}}_\tau = \mathcal{F}_{C_\tau} = \mathcal{F}.$$

Si $\mathcal{F}$ est pure, il existe un changement de temps que l'on note aussi C, tel que $\mathcal{F}_C$ soit brownienne, alors Sp Mult$(\widehat{\mathcal{F}}) = 2$ et Sp Mult$(\mathcal{F}) \leqslant 2$.

(b) Soient W un mouvement brownien qui engendre $\widehat{\mathcal{F}}$ et X la martingale $W_{\langle M\rangle}$ (par construction, X est pure).
Montrons que M est extrémale : soit B le mouvement brownien de DDS de M, B est un $\widehat{\mathcal{F}}$−mouvement brownien qui a la $\widehat{\mathcal{F}}$−PRP (car $\widehat{\mathcal{F}}$ est brownienne), comme $\mathcal{F}_{C_0}$ est triviale, $\mathcal{F}_0$ l'est aussi, et M est extrémale.
Remarquons maintenant que

$$\mathcal{F}^X_\infty = \mathcal{F}^W_\infty = \widehat{\mathcal{F}}_\infty = \mathcal{F}_\infty. \tag{4}$$

et

$$M_t = \int_0^t \mathcal{E}_{\langle M\rangle_s} dX_s,$$

avec $\mathcal{E}_t := \frac{d\langle B,W\rangle_t}{dt}$. D'où X est $\mathcal{F}$−extrémale (et comme elle est extrémale), la Proposition 7.1 de [12], nous donne que $\mathcal{F}^X$ est immergée dans $\mathcal{F}$. On a donc $\mathcal{F} = \mathcal{F}^X$ en utilisant (4). ∎

La question suivante se pose maintenant naturellement :
Est-ce que la réciproque de la Proposition 2.2 est vraie ? i.e. si toutes les martingales qui engendrent une filtration $\mathcal{F}$ satisfont la propriété $(\star)$, a-t-on : Sp Mult$(\mathcal{F})$=2 *?*

Pour l'instant, nous n'avons pas de réponse générale à cette question. Remarquons, en tout cas, que l'exemple suivant donné dans [1] section 6, n'apporte pas de réponse négative : soit

$$M_t = \int_0^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{(X_s^2 + Y_s^2)^\alpha},$$

où $(X_t + iY_t)$ est un mouvement brownien plan issu de $z \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in]-\infty, \frac{1}{2}]$.
Soient $\mathcal{F}$ la filtration de M, C l'inverse de $\langle M\rangle$ et $\widehat{\mathcal{F}} = \left(\mathcal{F}_{C_t}\right)_{t\geqslant 0}$.
$\widehat{\mathcal{F}}$ est brownienne, donc $\mathcal{F}$ est pure et d'après la Proposition 4.1, M satisfait la propriété $(\star)$.

On termine notre article par un complément au Théorème 1 de [14].

THÉORÈME 4.1. *Soit M une martingale locale d'Ocone de filtration naturelle $(\mathcal{M}_t)$ et φ un processus $(\mathcal{M}_t)-$ prévisible tels que $D_t^\varphi := \exp\left(\int_0^t \varphi_s dM_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 d\langle M\rangle_s\right)$ soit une martingale.*
Si $\mathrm{Q}|_{\mathcal{F}_t} = D_t^\varphi \cdot \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$, alors $\widetilde{M} := M - \int_0^\cdot \varphi_s d\langle M\rangle_s$ satisfait

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Q}}(\widetilde{M}) = \mathcal{L}_{\mathbb{P}}(M).$$

Preuve. Notons (comme dans [14]) $(\mathcal{N}_t)$ la filtration naturelle de $\langle M\rangle$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathrm{Q}}\left[F(\widetilde{M}_u,\ u \leqslant t)\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(\widetilde{M}_u,\ u \leqslant t)D_t^\varphi\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(\widetilde{M}_u,\ u \leqslant t)D_t^\varphi|\mathcal{N}_\infty\right]\right].\end{aligned}$$

Mais $\mathbb{P}_M = \int \mathbb{P}(\langle M\rangle \in da)\cdot W^a$ (où W^a est la loi d'un processus gaussien ayant a comme crochet). D'où

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(\widetilde{M}_u,\ u\leqslant t)D_t^\varphi H(\langle M\rangle_s,\ s\geqslant 0)\right] =$$
$$\int \mathbb{P}(\langle M\rangle \in da)\, H(a_s, s\geqslant 0) W^a\left(F(\widetilde{\omega}_u, u\leqslant t)\exp\left(\int_0^t \varphi(\omega_u, u\leqslant s)d\omega_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 da_s\right)\right)$$

où $\widetilde{\omega}_u = \omega_u - \int_0^t \varphi(\omega_u,\ u \leqslant s)da_s$.
Mais pour W^a : si $\mathbb{P}' = \exp\left(\int_0^t \varphi(\omega_u,\ u \leqslant s)d\omega_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 da_s\right)\cdot W^a$, alors la propriété (ii) de [9] est satisfaite, c'est-à-dire

$$\{\widetilde{\omega}, \mathbb{P}'\} = \{\omega, W^a\}.$$

D'où

$$\begin{aligned}W^a &\left(F(\widetilde{\omega}_u,\ u \leqslant t)\exp\left(\int_0^t \varphi_s d\omega_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 da_s\right)\right) \\ &= \mathbb{P}'\left(F(\widetilde{\omega}_u,\ u \leqslant t)\right) = W^a\left(F(\omega_u,\ u \leqslant t)\right).\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(\widetilde{M}_u,\ u \leqslant t)D_t^\varphi H(\langle M\rangle_s,\ s \geqslant 0)\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(M_u,\ u \leqslant t)H(\langle M\rangle_s,\ s \geqslant 0)\right]$$

et

$$\mathbb{E}_{\mathrm{Q}}\left[F(\widetilde{M}_u,\ u \leqslant t)\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F(M_u,\ u \leqslant t)\right].$$

■

Comme on l'a déjà dit (dans le Paragraphe 1), la loi d'une martingale extrémale est un point extrémal dans l'ensemble convexe $\mathcal{M}$ de toutes les mesures de probabilité sur $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, qui rendent le processus des coordonnées, une martingale locale.
En fait une martingale locale d'Ocone est extrémale si et seulement si elle est gaussienne (voir [14]), on a en plus le résultat suivant :

Théorème 4.2. *Soit Π la distribution d'un processus croissant, continu et nul en 0. Si X est une martingale locale d'Ocone telle que $\mathcal{L}(\langle X\rangle) = \Pi$, alors $\mathcal{L}(X)$ est un point extrémal dans l'ensemble convexe $\mathcal{M}_\Pi := \{\mathbb{P} \in \mathcal{M},\ \mathcal{L}_\mathbb{P}(\langle X\rangle) = \Pi\}$.*
($\mathcal{L}_\mathbb{P}(\langle X\rangle)$ est la loi de $\langle X\rangle$ sous $\mathbb{P}$).

Preuve. Notons $\mathbb{P}_0 := \mathcal{L}(X)$, $\mathcal{F}$ la filtration naturelle de X et $(\mathcal{N}_t)_{t\geqslant 0}$ celle de $\langle X\rangle$. Soient $\mathbb{P}' \ll \mathbb{P}_0$, $D_t := \left.\dfrac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}_0}\right|_{\mathcal{F}_t}$ et $\widetilde{X}_t = X_t - \displaystyle\int_0^t \frac{d\langle X, D\rangle_s}{D_s}$.
Si $\mathcal{L}_{\mathbb{P}'}(\langle X\rangle) = \Pi$, alors $\mathcal{L}_{\mathbb{P}'}(\widetilde{X}) = \mathcal{L}(X)$. En effet (voir Théorème 2 de [14])

$$D_t = 1 + \int_0^t h_s dF_s + \int_0^t \varphi_s dX_s,$$

où F est une $(\mathcal{N}_t)_{t\geqslant 0}$–martingale locale et h et φ sont deux processus $\mathcal{F}$–prévisibles. La condition $\mathcal{L}_{\mathbb{P}'}(\langle X\rangle) = \Pi$ est équivalente à $\mathbb{E}[D_t|\mathcal{N}_t] = 1$, $\forall t \geqslant 0$. D'où, $\mathcal{L}_{\mathbb{P}'}(F) = \mathcal{L}_{\mathbb{P}_0}(F)$, c'est-à-dire que F est une $\mathbb{P}'$–martingale locale et $\displaystyle\int_0^t \frac{d\langle F, D\rangle_s}{D_s} = 0$, donc $\displaystyle\int_0^t h_s d\langle F\rangle_s = 0$ et $D_t = 1 + \displaystyle\int_0^t \varphi_s dX_s$.
Puisque D appartient à l'espace stable engendré par X, si $P' \in \mathcal{M}_\Pi$, alors $D \equiv 1$ (en raisonnant de la même façon que dans le Théorème 4.1) et $\mathbb{P}$ est extrémale dans $\mathcal{M}_\Pi$. ∎

5. Appendice

Point 1. Remarquons que

$$\int \mathbb{1}_{\{B<0\}} dB = \frac{1}{c'} \int \mathbb{1}_{\{B<0\}} dM$$

et

$$\int \mathbb{1}_{\{B>1\}} dB = \frac{1}{c''} \int \mathbb{1}_{\{B>1\}} dM.$$

D'où, en appliquant le Lemme de Skorokhod (Lemme 2.1, Chap. VI de [11]) il suffit de voir que les ensembles $\{B_t < 0\}$ et $\{B_t > 1\}$ sont $\mathcal{F}_t^M$–mesurables pour tout t :

$$\left\{B_t < 0\right\} = \left\{\frac{d\langle M\rangle}{dt}(t) = c'\right\} \quad \text{et} \quad \left\{B_t > 0\right\} = \left\{\frac{d\langle M\rangle}{dt}(t) = c''\right\},$$

et de la même façon pour les martingales (M_n^k), $n \geqslant 1$, $k \in \{1, ..., \ell_n\}$.

Point 2. D'après le Point 1, la martingale $\displaystyle\int \mathbb{1}_{F^c}(B) dB = \sum_n \sum_k M_n^k$ est $\mathcal{F}^M$–adaptée, ainsi donc que son crochet.

Point 3. On va montrer seulement que $0 \in \overline{F^c}$, plus précisément : $\inf F^c = 0$.
Soit $x_n = \inf F_n^c$. On a

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2} - \frac{1}{2 \times 4^n},\ n \geqslant 2 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{3}{8},$$

d'où

$$x_n = \frac{x_1}{2^{n-1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{n+1-k} \times 4^k}.$$

Mais

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{-k} \times 4^k} = \frac{1}{2^n \times 4}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right),$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 0.$$

Références

[1] AZÉMA J., RAINER C., YOR M. (1996) : Une propriété des martingales pures, Sém. Prob. XXX, Lec. Not. in Math. 1626, p. 243-254, Springer.

[2] AZÉMA J., YOR M. (1992) : Sur les zéros des martingales continues, Sém. Prob. XXVI, Lec. Not. in Math. 1526, p. 248-306, Springer.

[3] BARLOW M. T., ÉMERY M., KNIGHT F. B., SONG S., YOR M. (1998) : Autour d'un théorème de Tsirel'son sur les filtrations browniennes et non-browniennes, Sém. Prob. XXXII, Lec. Not. in Math. 1686, p. 265-305, Springer.

[4] BEGHDADI-SAKRANI S., ÉMERY M. (1999) : On certain probabilities equivalent to coin-tossing, D'après SCHACHERMAYER, Sém. Prob. XXXIII, Lec. Not. in Math. 1709, p. 240-256, Springer.

[5] BEGHDADI-SAKRANI S. (2000) : Martingales continues, filtrations faiblement browniennes et mesures signées, Thèse de l'Univ. P. et M. Curie, Paris.

[6] DELLACHERIE C., MAISONNEUVE B., MEYER P. A. (1992) : Probabilités et potentiel, Chap. XVII à XXIV, Processus de Markov (fin), Compléments de calcul stochastique, Hermann.

[7] DUBINS L., FELDMAN J., SMORODINSKY M., TSIREL'SON B. (1996) : Decreasing sequences of σ−fields and a measure change for Brownian motion, Ann. Prob. 24, p. 882-904.

[8] ÉMERY M., SCHACHERMAYER W. (1999) : Brownian filtrations are not stable under equivalent time-changes, Sém. Prob. XXXIII, Lec. Not. in Math. 1709, p. 267-276, Springer.

[9] KNIGHT F. B. (1987) : On invertibility of martingale time changes, Sém. Stoch. Proc., Birkhäuser, Basel 1988, p. 193-221.

[10] LANE D. A. (1978) : On the fields of some Brownian martingales, Ann. Prob. 6, p. 499-508.

[11] REVUZ D., YOR M. (1994) : Continuous Martingales and Brownian Motion, second edition, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer.

[12] STROOCK D. W., YOR M. (1980) : On extremal solutions of martingale problems, Ann. Scient. E.N.S., 4ème série, t. 13, p. 95-164.

[13] TSIREL'SON B. (1997) : Triple points: From non-Brownian filtrations to harmonic measures, GAFA, Geom. Funct. Anal. 7, p. 1096-1142.

[14] VOSTRIKOVA L., YOR M. (2000): Some invariance properties (of the laws) of Ocone's martingales, Sém. Prob. XXXIV, Lec. Not. in Math. 1729, p. 417-431, Springer.

[15] YOR M. (1979) : Sur l'étude des martingales continues extrémales, Stochastics, vol. 2.3, p. 191-196.

S. BEGHDADI-SAKRANI
Laboratoire de Probabilité, Tour 56,
Université Pierre et Marie Curie, 4, place Jussieu,
75252 Paris Cedex 05, France.