

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

THOMAS SIMON

Support d'une équation d'Itô avec sauts en dimension 1

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 36 (2002), p. 314-330

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_2002__36__314_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_2002__36__314_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Support d'une équation d'Itô avec sauts en dimension 1

Thomas Simon*

*Mathematical Institute, 24-29 Saint Giles,
Oxford OX1 3LB, ROYAUME-UNI
e-mail : simon@maths.ox.ac.uk*

Résumé

On décrit le support d'une équation d'Itô uni-dimensionnelle conduite par un processus de Lévy, sans conditions sur ce dernier et sous des hypothèses minimales sur les coefficients. L'idée principale est un contrôle trajectorien de l'équation au moyen d'équations de Marcus associées, qui dépendent continûment du processus porteur. La question de la continuité reste cependant ouverte pour l'équation d'Itô elle-même.

Mots-clés : Équation d'Itô - Équation de Marcus - Processus de Lévy - Support.

MSC 2000 : 60H10

1 Introduction

Cet article constitue une généralisation des résultats de [14], où nous avons donné en dimension 1 un théorème de support pour une certaine classe (introduite par Marcus) d'équations d'Itô non-linéaires portées par un processus de Lévy. Ces équations de Marcus sautent suivant leurs champs de vecteurs de façon "intrinsèque", ce qui permet en particulier de montrer [4] qu'elle dépend continûment (pour la topologie localement uniforme) du processus porteur en dimension 1. Dans [14], le théorème de support est alors obtenu assez facilement en transférant un résultat de petites déviations obtenu dans [15]. Ici, nous nous intéressons au même problème pour des équations d'Itô classiques du type

$$X_t = x + \int_0^t a(X_s) ds + \int_0^t b(X_{s-}) dZ_s, \quad (1)$$

toujours en dimension 1. Ces équations s'écrivent donc plus simplement que les équations de Marcus, mais sautent aussi de façon bien plus abrupte et n'ont pas leur agréable interprétation géométrique. De plus, hormis le cas facile où Z est à variations finies, nous ne sommes pas arrivés à démontrer si, oui ou non, X solution de l'équation (1) est une fonctionnelle continue de Z pour une topologie adaptée au problème du support, question que nous avons posée en remarque finale (b) dans l'article [14].

En revanche, nous montrons que le point de vue évoqué en remarque finale (c) du même article, point de vue consistant à voir une équation d'Itô comme la perturbation d'une équation de Marcus associée, peut s'avérer fructueux pour ce genre de problèmes. Cette perturbation est en fait essentiellement la variation quadratique de Z , quantité dont on montre au paragraphe 2 que l'on peut la contrôler en norme uniforme en même temps que Z lui-même. Au paragraphe 3, nous comparons une équation de Marcus perturbée par cette variation quadratique à des équations de Marcus bi- ou tri-dimensionnelles, suivant que

*auteur soutenu par le réseau TMR "Stochastic Analysis".

$b(X_t)$ est proche ou non de 0. Ces dernières sont introduites de façon que leurs champs de vecteurs commutent, et l'on peut alors invoquer les théorèmes de continuité de la partie IV de [3]. Au paragraphe 4, nous appliquons les résultats précédents à un théorème de support pour l'équation ci-dessus (dans le cas où Z est à variations infinies, l'autre cas étant déjà traité dans [13]). Ce théorème fait intervenir les squelettes

$$\phi_t = x + \int_0^t a(\phi_s) ds + \int_0^t b(\phi_s) \psi_s ds + \sum_{t_p \leq t} b(\phi_{t_p-}) z_p,$$

où $\psi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue quelconque et $\{t_p, z_p\}$ une suite d'instants et de tailles de sauts admissibles. Ces squelettes sont donc plus logiquement reliés à l'équation (1) que dans le Théorème B de [13], où nous avons besoin de surcroît d'une hypothèse supplémentaire sur la mesure de sauts de Z .

Précisons que les équations d'Itô que nous étudions dans cet article sont non seulement différentes, mais plus générales que les équations de Marcus. Sans rien changer aux preuves on peut en effet ajouter à l'équation ci-dessus un terme quelconque non-linéaire du type

$$\sum_{0 \leq s \leq t} c(X_{s-}, \Delta Z_s),$$

et obtenir le théorème de support correspondant.

Et remarquons pour finir cette introduction que contrairement à [13], la méthode employée ici n'utilise pas le caractère markovien du processus X , mais seulement les accroissements indépendants de Z . Ceci laisse à penser qu'une méthode analogue pourrait également être utilisée pour des équations avec sauts dont les solutions ne sont plus markoviennes, comme dans [11] et [5].

2 Compléments sur les petites déviations d'un processus de Lévy

Le but de cette partie est d'obtenir un contrôle simultané des trajectoires et des variations quadratiques d'un processus de Lévy réel à variations infinies. Ceci affine, en dimension 1, un résultat sur les petites déviations de tels processus obtenu dans [15]. C'est par ailleurs le seul résultat vraiment probabiliste démontré dans cet article, tout le reste (ou presque) étant une analyse trajectorielle.

Soit donc $\{Z_t, t \geq 0\}$ un processus de Lévy réel issu de 0. Rappelons sa décomposition de Lévy-Itô : pour tout $t \geq 0$,

$$Z_t = \alpha t + \beta W_t + \int_0^t \int_{|z| \leq 1} z \tilde{\mu}(ds, dz) + \int_0^t \int_{|z| > 1} z \mu(ds, dz),$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, W est un mouvement brownien réel issu de 0, ν une mesure positive sur $\mathbb{R} - \{0\}$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1} \nu(dz) < \infty,$$

μ la mesure de Poisson sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ d'intensité $ds \otimes \nu(dz)$, et $\tilde{\mu} = \mu - ds \otimes \nu$ la mesure compensée. Nous dirons que Z est de type I si ses trajectoires sont p.s à variations finies sur tout compact, c'est à dire si $\beta = 0$ et si

$$\int_{\mathbb{R}} |z| \nu(dz) < \infty.$$

Dans le cas contraire nous dirons que Z est de type II. Dans tout cet article, $\mathbb{P}$ désignera la loi de Z dans l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions càdlàg de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\eta > 0$ on notera $\{\tilde{Z}_t^\eta, t \geq 0\}$ et $\{Z_t^\eta, t \geq 0\}$ les processus de Lévy définis respectivement par

$$\tilde{Z}_t^\eta = \int_0^t \int_{|z| < \eta} z \tilde{\mu}(ds, dz) \quad \text{et} \quad Z_t^\eta = \int_0^t \int_{|z| \geq \eta} z \mu(ds, dz)$$

pour tout $t \geq 0$. Pour tout $t \geq 0$ et tout processus càdlàg X , on utilisera les notations standard :

$$|X|_t^* = \sup_{s \leq t} |X_s| \quad \text{et} \quad [X]_t^d = \sum_{s \leq t} |\Delta X_s|^2.$$

Lemme 1 Pour tout $k > 0$, $T \geq 0$,

$$\mathbb{P} \left[[Z]_t^d \leq kt, \forall t \leq T \right] > 0.$$

Preuve : Le processus $[Z]^d$ est un subordonateur sans dérive, et il est bien connu (voir [1] Prop. III.8) que p.s.

$$\sup_{s \leq t} \left\{ s^{-1} [Z]_s^d \right\} \longrightarrow 0$$

quand $t \downarrow 0$. On peut donc choisir $t_0 > 0$ tel que

$$\mathbb{P} \left[[Z]_t^d \leq (k/2)t, \forall t \leq t_0 \right] > 0.$$

On désigne par Z^0 le processus donné par $Z_t^0 = Z_{t+t_0} - Z_{t_0}$ pour tout $t \geq 0$. En décomposant $[Z^0]_{T-t_0}^d$ en petits et grands sauts, on montre facilement que

$$\mathbb{P} \left[[Z^0]_{T-t_0}^d \leq (k/2)t_0 \right] > 0.$$

On conclut alors par croissance de $[Z^0]^d$ et par indépendance de Z^0 et $\{Z_t, t \leq t_0\}$. $\diamond$

Corollaire 2 Pour tout $k > 0$, $T \geq 0$, il existe $c > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$,

$$\mathbb{P} \left[[\tilde{Z}^\eta]_t^d \leq kt, \forall t \leq T \right] > c.$$

Preuve : Évident compte tenu de la croissance p.s. de $\eta \mapsto [\tilde{Z}^\eta]_t^d$ pour tout $t \geq 0$, qui entraîne l'inclusion presque sûre

$$\left\{ [Z]_t^d \leq kt, \forall t \leq T \right\} \subset \left\{ [\tilde{Z}^\eta]_t^d \leq kt, \forall t \leq T \right\}$$

pour tout $\eta > 0$. $\diamond$

Nous pouvons maintenant établir le résultat principal de ce paragraphe :

Théorème 3 Soit Z un processus de Lévy réel de type II, issu de 0. Pour toute fonction continue $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ nulle en 0, pour tout $T > 0$, $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$

$$\mathbb{P} \left[(|Z - \psi|_T^* < \varepsilon) \cap \left\{ [Z]_t^d \leq \rho t, \forall t \leq T \right\} \right] > 0.$$

Remarques. (a) Par le Lemme 1 et par une conséquence presque immédiate du Théorème principal de [15], on voit que dans le Théorème 3 chacun des deux événements est de probabilité non nulle. Cependant, on ne peut pas conclure directement car ces deux événements ne sont pas indépendants.

(b) Le Théorème 3 est probablement vrai dans $\mathbb{R}^m$ quand Z est entièrement de type II (i.e. aucune de ses projections sur un sous-espace de $\mathbb{R}^m$ n'est de type I). La preuve promet cependant d'être plus technique.

(c) Il pourrait être intéressant d'étudier le comportement asymptotique de la probabilité des événements rares étudiés ci-dessus, quand ε et ρ tendent vers 0. Si Z est un processus symétrique stable d'indice $\gamma \in (0, 2]$, on sait par exemple qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} -\varepsilon^\gamma \log \mathbb{P} \{ |Z|_T^* < \varepsilon \} = C,$$

la valeur exacte de C n'étant connue que dans le cas du mouvement brownien (voir par exemple [6], Formule (10.4) p. 354). On peut par exemple se demander si le même résultat est vrai pour $\gamma \geq 1$ quand on remplace $|Z|_T^*$ par $|Z - \psi|_T^*$ dans l'expression ci-dessus, ψ étant une fonction continue quelconque nulle en 0.

Preuve : On peut évidemment supposer $\alpha = 0$. En considérant une approximation de ψ affine par morceaux et en utilisant les accroissements indépendants de

$$\left\{ (Z_t, [Z]_t^d), t \geq 0 \right\},$$

on se ramène également facilement au cas où ψ est une fonction linéaire : $\psi_t = vt, v \in \mathbb{R}$.

Supposons d'abord $\beta > 0$. Notons, pour tout $0 < \eta \leq 1$,

$$v^\eta = \int_{\eta \leq |z| \leq 1} z v(dz).$$

Comme $|\tilde{Z}^\eta|_T^*$ tend vers 0 en probabilité quand $\eta \downarrow 0$, on peut par le corollaire 2 choisir $\eta > 0$ suffisamment petit de façon que

$$\mathbb{P} \left[\left\{ |\tilde{Z}^\eta|_T^* < \varepsilon/2 \right\} \cap \left\{ [\tilde{Z}^\eta]_t^d \leq \rho t, \forall t \leq T \right\} \right] > 0.$$

D'autre part, $Z^\eta \equiv 0$ sur $[0, T]$ avec probabilité non nulle, indépendamment de $\tilde{Z}^\eta$. Ceci entraîne

$$\mathbb{P} \left[\left\{ |\tilde{Z}^\eta|_T^* < \varepsilon/2 \right\} \cap \left\{ [\tilde{Z}^\eta]_t^d \leq \rho t, \forall t \leq T \right\} \cap \left\{ [Z^\eta]_T^d = 0 \right\} \right] > 0.$$

Il est d'autre part bien connu (voir par exemple [16]) que $t \rightarrow \beta W_t$ approche uniformément sur $[0, T]$ avec probabilité non nulle toute fonction continue nulle en 0, donc en particulier $\psi^\eta : t \mapsto (v + v^\eta)t$. D'autre part, ceci a lieu indépendamment des processus $Z^\eta, \tilde{Z}^\eta$. On en déduit :

$$\mathbb{P} \left[\left\{ |\beta W - \psi^\eta|_T^* < \varepsilon/2 \right\} \cap \left\{ |\tilde{Z}^\eta|_T^* < \varepsilon/2 \right\} \cap \left\{ [\tilde{Z}^\eta]_t^d \leq \rho t, \forall t \leq T \right\} \cap \left\{ [Z^\eta]_T^d = 0 \right\} \right] > 0.$$

Mais l'événement ci-dessus est évidemment contenu dans

$$\{ |Z - \psi|_T^* < \varepsilon \} \cap \left\{ [Z]_t^d \leq \rho t, \forall t \leq T \right\},$$

ce qui permet de conclure.

Supposons maintenant $\beta = 0$. Comme Z est de type II, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |z| \nu(dz) = +\infty.$$

En particulier, il existe une suite $\{\eta_n\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, tendant vers 0 et contenue dans $\text{Supp } \nu$. De plus, on peut choisir cette suite de manière que $(\nu + \nu^{|\eta_n|})$ soit nul ou bien ait le même signe que η_n . Nous laissons au lecteur le soin de le vérifier quand il existe deux suites $\{\eta_n^+ > 0\}$ et $\{\eta_n^- < 0\}$ tendant vers 0 et contenues dans $\text{Supp } \nu$. Dans l'autre cas, $\nu^{|\eta_n|}$ tend vers $\pm\infty$ quand $n \uparrow +\infty$, le signe devant ∞ étant nécessairement celui de η_n , pour n assez grand.

Pour tout n , on note $\rho_n = \eta_n/2 > 0$ et on considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$B_{\rho_n} = \begin{cases} [-\eta_n, \rho_n] & \text{si } \eta_n > 0 \\ [\rho_n, -\eta_n] & \text{si } \eta_n < 0. \end{cases}$$

Par abus de notations, on pose

$$\nu^{\rho_n} = \int_{B_{\rho_n}^c} z \nu(dz)$$

(où pour tout ensemble A , A^c désigne le complémentaire de A), et on note comme ci-dessus $\psi^{\rho_n} : t \mapsto (\nu + \nu^{\rho_n})t$. On pose également

$$\tilde{Z}_t^{\rho_n} = \int_0^t \int_{B_{\rho_n}} z \tilde{\mu}(ds, dz) \quad \text{et} \quad Z_t^{\rho_n} = \int_0^t \int_{B_{\rho_n}^c} z \mu(ds, dz).$$

Par une petite variation du Corollaire 2, on peut choisir n_0 assez grand de telle sorte que pour tout $n > n_0$,

$$\mathbb{P} \left[\left\{ \left| \tilde{Z}_T^{\rho_n} \right|_T^* < \varepsilon/2 \right\} \cap \left\{ \left[\tilde{Z}^{\rho_n} \right]_t^d \leq \rho t/2, \forall t \leq T \right\} \right] > 0.$$

Par indépendance, il suffit donc de montrer que

$$\mathbb{P} \left[\left\{ \left| Z^{\rho_n} - \psi^{\rho_n} \right|_T^* < \varepsilon/2 \right\} \cap \left\{ \left[Z^{\rho_n} \right]_t^d \leq \rho t/2, \forall t \leq T \right\} \right] > 0.$$

Ceci est vrai s'il existe une sous-suite $\{\mu_n\}$ de $\{\rho_n\}$ telle que $|\nu + \nu^{\mu_n}|$ tende vers 0 quand $n \uparrow \infty$: il suffit alors, pour n assez grand, de considérer l'événement $\left\{ \left| Z^{\mu_n} \right|_T^* = \left[Z^{\mu_n} \right]_T^d = 0 \right\}$, de probabilité non nulle pour tout n puisque $\mu_n > 0$.

Si $|\nu + \nu^{\rho_n}|$ est borné inférieurement quand $n \uparrow \infty$, alors on peut faire sauter Z^{ρ_n} à des instants successifs arbitrairement proches de

$$\frac{|\eta_n|}{|\nu + \nu^{\rho_n}|}, 2 \frac{|\eta_n|}{|\nu + \nu^{\rho_n}|}, \dots, \text{Ent} \left[\frac{|\nu + \nu^{\rho_n}| T}{|\eta_n|} \right] \frac{|\eta_n|}{|\nu + \nu^{\rho_n}|}$$

(où Ent désigne la partie entière), avec à chaque fois des sauts de valeur arbitrairement proche de η_n , le tout avec probabilité non nulle puisque $\eta_n \in \text{Supp } \nu \cap B_{\rho_n}^c$ pour tout n . En remarquant que η_n et $(\nu + \nu^{\rho_n})$ ont même signe pour tout n , on laisse au lecteur le soin de montrer que sur cet événement, pour n suffisamment grand et des instants et valeurs de sauts suffisamment proches des données fixes,

$$\left| Z^{\rho_n} - \psi^{\rho_n} \right|_T^* < \varepsilon/2$$

en même temps que pour tout $t \leq T$,

$$[Z^{\rho_n}]_t^d \leq \left(2|\eta_n|^2 \mathbb{E} n t \left[\frac{|v + v^{\rho_n}|}{\rho_n} \right] \right) t.$$

Dans la deuxième inégalité, la constante devant t est majorée par

$$K\rho_n \int_{\rho_n < |z| \leq 1} |z| \nu(dz)$$

pour une certaine constante K , quantité qui tend vers 0 quand $n \uparrow \infty$, puisque ρ_n tend vers 0 et que

$$\int_{|z| \leq 1} |z|^2 \nu(dz) < +\infty.$$

Ceci achève la démonstration. ◇

3 Liens entre équations de Marcus et équations d'Itô

Soit $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localement lipschitzienne à croissance linéaire, $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , à dérivée bornée et localement lipschitzienne. Soit Z un processus de Lévy réel. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on considère l'équation d'Itô

$$X_t = x + \int_0^t a(X_s) ds + \int_0^t b(X_{s-}) \circ dZ_s, \quad (1)$$

écrite pour des raisons de concision sous la forme de Meyer-Stratonovitch : dans le deuxième terme à droite on intègre suivant Stratonovitch le long de la partie brownienne de Z , et X saute suivant

$$\Delta X_t = b(X_{t-}) \Delta Z_t.$$

Les conditions sur a et b assurent l'existence d'une unique solution forte à cette équation [7]. Quand Z est de type I, la deuxième intégrale dans (1) est une intégrale de Stieltjes, et on peut résoudre (1) trajectoire par trajectoire. Quand Z est de type II, cette deuxième intégrale est stochastique et on résout (1) de façon globale. On supposera dans tout ce paragraphe que Z est de type II.

On associe à (1) une équation dite "de Marcus", partant du même x et portée par le même Z avec les mêmes coefficients, mais sautant de façon différente :

$$Y_t = x + \int_0^t a(Y_s) ds + \int_0^t b(Y_{s-}) \diamond dZ_s, \quad (2)$$

où la deuxième intégrale est définie par

$$\int_0^t b(Y_{s-}) \diamond dZ_s = \int_0^t b(Y_{s-}) \circ dZ_s + \sum_{s \leq t} c(Y_{s-}, \Delta Z_s),$$

avec $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonction localement lipschitzienne telle que si (x, z) varie dans un compact fixe de $\mathbb{R}^2$

$$|c(x, z)| \leq K|z|^2$$

pour une certaine constante K , et choisie de façon que dans (2), en chaque instant t où Z saute, Y_t soit donnée par l'intégrale au temps 1 du champ de vecteurs $x \mapsto \Delta Z_t b(x)$, partant de Y_{t-} .

Nous renvoyons à [9] pour une définition précise de la fonction c , et pour une étude approfondie de l'équation (2) portée par une semimartingale générale et multi-dimensionnelle. Comme il a été remarqué dans [4], le choix de c permet en fait de résoudre (2) trajectoire par trajectoire, suivant la méthode de [3]. En combinant le Théorème 5.4 de [4], le Lemme 4 et le Théorème 11 de [3], on obtient le résultat suivant, que nous avons déjà partiellement utilisé dans [14] :

Théorème 4 (Doss, Errami-Russo-Vallois) *L'équation (2) admet une unique solution forte dont la trajectoire peut être représentée par*

$$Y = \Phi(x, Z)$$

où $\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ est une fonctionnelle localement lipschitzienne pour la norme localement uniforme, et croissante en la première variable :

$$x_1 \geq x_2 \implies \Phi_t(x_1, Z) \geq \Phi_t(x_2, Z) \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Remarques (a) Le Théorème ci-dessus est faux pour l'équation (1) en général, comme le montre le contre-exemple suivant :

$$X_t = x + \int_0^t X_{s-} \circ dZ_s.$$

La solution à cette équation est explicite, et connue sous le nom d'exponentielle de Doléans du processus Z (voir par exemple [8] p. 59) :

$$X_t = x \exp Z_t \prod_{s \leq t} (1 + \Delta Z_s) \exp(-\Delta Z_s).$$

En fixant x , on peut facilement construire une suite $\{Z_n\}$ de fonctions déterministes de saut pur et tendant vers 0 uniformément, telles que la suite $\{X_n\}$ d'exponentielles de Doléans ne tende pas vers x simplement. On peut en revanche vérifier que la solution de l'équation de Marcus correspondante

$$X_t = x + \int_0^t X_{s-} \diamond dZ_s$$

est bien continue pour la norme localement uniforme, puisque sa solution est donnée par la simple exponentielle :

$$X_t = x \exp Z_t.$$

(b) L'exponentielle de Doléans devient continue si l'on munit l'espace $\mathbb{R} \times \mathcal{D}$ de la norme suivante :

$$\|(x, Z)\| = |x| + \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \left(|Z_n^*| + \sqrt{|Z_n^d|} \right),$$

et l'espace $\mathcal{D}$ de la norme localement uniforme. On peut naturellement se demander si cette propriété n'est pas vraie pour l'équation (1) en toute généralité. Une propriété plus faible est vérifiée quand b ne s'annule jamais (voir la remarque suivant la Proposition 6 ci-dessous).

On peut évidemment récrire (1) de la façon suivante :

$$X_t = x + \int_0^t a(X_s) ds + \int_0^t b(X_{s-}) \diamond dZ_s - \sum_{0 < s \leq t} c(X_{s-}, \Delta Z_s),$$

et on voit facilement que pour une certaine sous-suite tendant vers 0, $X^\eta \rightarrow X$ p.s. pour la topologie localement uniforme, où X^η est solution de

$$X_t^\eta = x + \int_0^t a(X_s^\eta) ds + \int_0^t b(X_{s-}^\eta) \diamond dZ_s - \sum_{0 < s \leq t} c(X_{s-}^\eta, \Delta Z_s^\eta).$$

Chaque X^η est une fonctionnelle continue de (x, Z) , donnée explicitement par

$$X_t^\eta = \Phi_{t-T_p} \left(c(X_{T_p-}^\eta, Z_p) + \Phi_{S_p-} \left(\dots + \Phi_{S_2-} \left(c(X_{T_1-}^\eta, Z_1) + \Phi_{S_1-}(x, Z), Z^{T_1} \right) \dots \right), Z^{T_p} \right)$$

sur $T_p \leq t < T_{p+1}$, où $\{T_n, Z_n\}$ est la suite des instants et tailles de sauts de Z^η , où l'on a noté $T_0 = 0$, $S_n = T_n - T_{n-1}$, et où $\{Z_s^{T_n}, s \geq 0\}$ désigne le processus $\{Z_{T_n+s}, s \geq 0\}$ pour tout n . Malheureusement, on ne peut pas passer à la limite uniforme quand $\eta \downarrow 0$, essentiellement parce que la vitesse de convergence de Z_t vers 0 quand $t \downarrow 0$ est trop lente si Z est de type II. On contourne alors la difficulté en encadrant X par des équations de Marcus perturbées.

Pour tout intervalle compact fixe M de $\mathbb{R}$, on note K_M la constante telle que

$$|c(x, z)| \leq K_M |z|^2$$

pour tout $(x, z) \in M^2$. En utilisant la représentation explicite ci-dessus et en appliquant successivement après chaque saut de Z^η le Théorème 4, on voit que p.s. sur $\{t \leq T_M^\eta\}$

$$X_t^{\eta-} \leq X_t^\eta \leq X_t^{\eta+},$$

où $X^{\eta\pm}$ est solution de

$$X_t^{\eta\pm} = x + \int_0^t a(X_s^{\eta\pm}) ds + \int_0^t b(X_{s-}^{\eta\pm}) \diamond dZ_s \pm K_M \sum_{0 < s \leq t} |\Delta Z_s^\eta|^2,$$

et où l'on a noté $T_M^\eta = \inf \{t \geq 0, (X_{t-}^\eta, \Delta Z_t^\eta) \notin M^2\}$. En passant à la limite il est clair que p.s. sur $\{t \leq T_M\}$

$$X_t^- \leq X_t \leq X_t^+,$$

où $X^\pm$ est solution de

$$X_t^\pm = x + \int_0^t a(X_s^\pm) ds + \int_0^t b(X_{s-}^\pm) \diamond dZ_s \pm K_M \sum_{0 < s \leq t} |\Delta Z_s|^2,$$

et où de même, on a noté $T_M = \inf \{t \geq 0, (X_{t-}^\pm, \Delta Z_t) \notin M^2\}$.

On cherche maintenant à savoir dans quelle mesure X^- et X^+ dépendent continûment de (x, Z) . Le principal problème vient du troisième terme, qui est certes à variations finies et ne dépend plus de $X^\pm$, mais saute infiniment souvent. Ceci interdit de traiter ce terme comme une perturbation de la dérive (ce que nous pensions au départ), quand bien même le Lemme 1 permet de le "coincer" entre la fonction nulle et une fonction linéaire de pente aussi petite qu'on le veut. Ce troisième terme agit plutôt comme une perturbation de toute l'équation (2), équation parfaitement régulière et qui définit par exemple un flot stochastique [9], mais

le problème est que cette perturbation n'est pas infinitésimale, de sorte qu'il paraît difficile d'appliquer les théorèmes classiques du calcul des variations.

On est alors obligé de considérer deux situations différentes pour les trajectoires de X . On commence par étudier le cas où $b(X_t)$ est loin de 0. On introduit les processus Y^- et Y^+ solutions de

$$Y_t^\pm = x + \int_0^t a(Y_s^\pm) ds + \int_0^t b(Y_s^\pm) \diamond dZ_s \pm \int_0^t b(Y_s^\pm) \diamond d[Z]_s^d. \quad (3)$$

La proposition suivante est facile mais joue un rôle-clé dans cet article.

Proposition 5 *Il existe $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{D}$ localement lipschitzienne pour la norme localement uniforme, telle que*

$$Y^\pm = \Psi(x, \{Z, \pm[Z]^d\}).$$

Remarque Le fait que Ψ soit localement lipschitzienne signifie : pour tout $T > 0$, pour tout compact de $\mathbb{R} \times (\mathcal{D}([0, T], \mathbb{R}))^2$ relativement à la norme $|\cdot| + |\cdot|_T^* + |\cdot|_T^*$, il existe une constante K telle que pour tout (x, u_1, u_2) et (y, v_1, v_2) dans ce compact,

$$|\Phi(x, u_1, u_2) - \Phi(y, v_1, v_2)|_T^* \leq K(|x - y| + |u_1 - v_1|_T^* + |u_2 - v_2|_T^*).$$

Preuve : Les équations (3) peuvent se récrire sous la forme d'équations de Marcus bi-dimensionnelles :

$$Y_t^\pm = x + \int_0^t a(Y_s^\pm) ds + \int_0^t b(Y_s^\pm) \diamond dZ_s^\pm$$

où Z^- et Z^+ sont les processus de Lévy bi-dimensionnels donnés respectivement par

$$Z_t^\pm = (Z_t, \pm[Z]_t^d)$$

pour tout $t \geq 0$, et où b désigne par abus de notation la matrice de champs de vecteurs (b, b) . Dans cette matrice (b, b) les deux champs de vecteurs sont identiques, et donc commutent. La condition de Frobenius, qui est cruciale dans la preuve du Théorème 19 dans [3], est donc remplie, et on peut en fait reprendre pour les équations (3) exactement les mêmes calculs que dans la Partie IV de [3] (ce que nous laissons au lecteur). Le Théorème 19 et la Proposition 20 dans [3] donnent alors la proposition. $\diamond$

Soit maintenant $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit ϕ l'unique solution de

$$\phi_t = x + \int_0^t a(\phi_s) ds + \int_0^t b(\phi_s) \psi_s ds. \quad (4)$$

On suppose d'abord $b(x) > \lambda > 0$ et on note

$$\xi_t = \int_0^t \psi_s ds, \quad t_\phi = \inf\{t \geq 0, b(\phi_t) = \lambda\}.$$

On remplace maintenant la condition initiale x par X_0 dans l'équation (1), où X_0 est une variable aléatoire indépendante de Z . Pour tout $\eta > 0$, on considère l'événement

$$\Omega_{\psi, \lambda}^\eta = \{|X_0 - x| < \eta\} \cap \{|Z - \xi_{t_\phi}^*| < \eta\} \cap \{|[Z]_{t_\phi}^d| \leq \eta\}.$$

Proposition 6 Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$\Omega_{\psi, \lambda}^{\eta} \subset \left\{ |X - \phi|_{t_{\phi}}^* < \varepsilon \right\},$$

où ϕ est la solution de (4).

Preuve : On pose $K_{\lambda} = \{y \in \mathbb{R}, b(y) \geq \lambda/2\}$ et on introduit l'intervalle compact

$$M = \{y \in \mathbb{R}, |y| \leq 1 \text{ ou } \exists 0 \leq t \leq t_{\phi} \text{ tel que } |\phi_t - y| \leq 1\}.$$

On considère Y^- et Y^+ définis comme dans (3) ci-dessus mais en ajoutant la constante positive $(2K_M/\lambda)$ devant le troisième membre à droite. On désigne par C_t l'intervalle $[Y_t^-, Y_t^+]$ pour tout $t \geq 0$, et on pose

$$T = \inf\{t \geq 0, C_t \not\subset M \cap K_{\lambda} \text{ ou } \Delta Z_t \notin M\}.$$

En reprenant la définition de l'intégrale de Marcus, on voit facilement que p.s. sur $\{t \leq T\}$,

$$Y_t^- \leq X_t^- \text{ et } X_t^+ \leq Y_t^+,$$

de sorte que

$$Y_t^- \leq X_t \leq Y_t^+.$$

De plus, par la Proposition 5, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\Omega_{\psi, \lambda}^{\eta} \subset \{t_{\phi} \leq T\} \cap \left\{ |\phi - Y^-|_{t_{\phi}}^* < \varepsilon/2 \right\} \cap \left\{ |\phi - Y^+|_{t_{\phi}}^* < \varepsilon/2 \right\}.$$

Ceci achève la démonstration. ◇

Remarque La Proposition 6 est aussi évidemment valable si $b(x) < \lambda$ pour un certain $\lambda < 0$. Si la fonction b ne s'annule jamais, ceci entraîne donc que l'application

$$\Theta: \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \\ (x, Z) \mapsto X \end{cases}$$

où X est la solution de (1), est *continue* en tous les points de $\mathbb{R} \times C_0^1$ (C_0^1 désignant les fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 et nulles en 0), quand $\mathbb{R} \times \mathcal{D}$ est munie de la norme $\|\cdot\|$ ci-dessus et $\mathcal{D}$ de la norme localement uniforme. Par le Théorème 3 ceci donne alors facilement un théorème de support pour (1), dans ce cas particulier. Nous préférons cependant donner l'énoncé du théorème dans le cas général, voir pour cela la partie suivante de cet article.

On s'intéresse maintenant à la situation opposée où $b(X_t)$ est proche de 0, c'est-à-dire où la dynamique de (1) est proche de celle de l'équation déterministe donnée par le coefficient a . On note encore par ϕ l'unique solution de

$$\phi_t = x + \int_0^t a(\phi_s) ds. \quad (5)$$

On suppose $|b(x)| < \lambda$ pour un certain $\lambda > 0$, et on note

$$t_{\phi} = \inf\{t \geq 0, |b(\phi_t)| = \lambda\}.$$

On remplace la condition initiale x par X_0 dans l'équation (1), où X_0 est une variable aléatoire indépendante de Z . Pour tout $\eta > 0$, on considère l'événement

$$\Omega_{\lambda}^{\eta} = \{|X_0 - x| < \eta\} \cap \left\{ |Z|_{t_{\phi}}^* < \eta \text{ et } |Z|_{t_{\phi}}^d < \eta \right\}.$$

La proposition suivante est un peu plus délicate, car on ne peut pas faire appel directement à la Proposition 5.

Proposition 7 Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$\Omega_\lambda^\eta \subset \{ |X - \phi|_{t_\Phi}^* < \varepsilon \},$$

où ϕ est la solution de (5).

Preuve : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $b_\lambda(x) = b(x) + 4\lambda$, et on récrit (1) de la façon suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s) ds + \int_0^t b_\lambda(X_{s-}) \diamond dZ_s - \left(4\lambda Z_t + \sum_{0 < s \leq t} c(X_{s-}, \Delta Z_s) \right).$$

Pour tout $\eta > 0$ on note $\{T_p^\eta, p \in \mathbb{N}^*\}$ la suite des instants de sauts du processus Z^η , et on pose $T_0^\eta = 0$. On considère X^η solution de

$$X_t^\eta = X_0 + \int_0^t a(X_s^\eta) ds + \int_0^t b_\lambda(X_{s-}^\eta) \diamond dZ_s - \left(4\lambda \bar{Z}_t^\eta + \sum_{0 < s \leq t} c(X_{s-}^\eta, \Delta Z_s^\eta) \right),$$

où pour tout $t \geq 0$ on a noté

$$\bar{Z}_t^\eta = Z_{T_p^\eta}^\eta 1_{\{T_p^\eta \leq t < T_{p+1}^\eta\}}.$$

Soit M un intervalle compact fixe de $\mathbb{R}$. En utilisant le Théorème 4, on voit que p.s. sur $\{t \leq T_M^\eta\}$

$$X_t^{\eta-} \leq X_t^\eta \leq X_t^{\eta+},$$

où l'on a défini T_M^η comme auparavant, $X^{\eta\pm}$ étant cette fois-ci la solution de

$$X_t^{\eta\pm} = x + \int_0^t a(X_s^{\eta\pm}) ds + \int_0^t b_\lambda(X_{s-}^{\eta\pm}) \diamond dZ_s \pm \left(4\lambda |\bar{Z}_t^\eta|^* + K_M \sum_{0 < s \leq t} |\Delta Z_s^\eta|^2 \right),$$

et où l'on a noté pour tout $t \geq 0$

$$|\bar{Z}_t^\eta|^* = |Z_{T_p^\eta}^\eta|^* 1_{\{T_p^\eta \leq t < T_{p+1}^\eta\}}.$$

Le pas de la subdivision aléatoire donnée par $\{T_p^\eta\}$ tend p.s. vers 0 quand $\eta \downarrow 0$, et on peut à nouveau passer à la limite p.s. quand $\eta \downarrow 0$ (quitte à prendre une sous-suite) dans les inégalités ci-dessus. On a donc p.s. sur $\{t \leq T_M\}$

$$X_t^- \leq X_t \leq X_t^+,$$

où l'on a défini T_M comme auparavant, $X^\pm$ étant la solution de

$$X_t^\pm = X_0 + \int_0^t a(X_s^\pm) ds + \int_0^t b_\lambda(X_{s-}^\pm) \diamond dZ_s \pm \left(4\lambda |Z_t|^* + K_M \sum_{0 < s \leq t} |\Delta Z_s|^2 \right).$$

On considère maintenant Y^- et Y^+ solutions respectives de

$$Y_t^\pm = X_0 + \int_0^t a(Y_s^\pm) ds + \int_0^t b_\lambda(Y_{s-}^\pm) \diamond dZ_s^\pm$$

où Z^- et Z^+ sont les semimartingales tri-dimensionnelles données respectivement par

$$Z_t^\pm = \left(Z_t, \pm 8|Z_t|^*, \pm (2K_M/\lambda) |Z_t|^d \right)$$

pour tout $t \geq 0$, et où b_λ désigne par abus de notation la matrice de champs de vecteurs $(b_\lambda, b_\lambda, b_\lambda)$. En reprenant exactement les mêmes notations que dans la preuve de la Proposition 6 et en remarquant que sur $\{t \leq T\}$ pour tout $x \in C_t$ $b_\lambda(x) \geq \lambda/2$, on voit facilement que p.s. sur $\{t \leq T\}$,

$$Y_t^- \leq X_t \leq Y_t^+.$$

Par commutation des champs de vecteurs dans la matrice $(b_\lambda, b_\lambda, b_\lambda)$, on peut appliquer à Y^- et Y^+ une proposition analogue à la Proposition 5 (puisque celle-ci est valable dans le cadre général des semimartingales), et donc montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\Omega_\lambda^\eta \subset \{t_\phi \leq T\} \cap \left\{|\phi - Y^-|_{t_\phi}^* < \varepsilon/2\right\} \cap \left\{|\phi - Y^+|_{t_\phi}^* < \varepsilon/2\right\}.$$

Ceci achève la démonstration. $\diamond$

4 Application au support

Nous souhaitons maintenant appliquer les résultats des deux paragraphes précédents à la caractérisation du support fonctionnel de l'équation (1). Rappelons de quoi il s'agit : X solution de (1) est une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathcal{D}_x, d)$, où $\mathcal{D}_x$ est l'espace des fonctions càdlàg de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ partant de x et d désigne la distance de Skorohod-Prokhorov locale : pour tous $f, g \in \mathcal{D}_x$

$$d(f, g) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} (1 \wedge d_n(f, g))$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d_n est une certaine fonctionnelle des restrictions de f, g à l'intervalle $[0, n+1]$ faisant intervenir des changements de temps strictement croissants (nous renvoyons à [8] pp. 293-294 pour une définition précise de d_n). Comme dans [16] on cherche à déterminer le support topologique de X en termes de "squelettes", i.e. de solutions à des équations différentielles ordinaires.

Nous ne traiterons que le cas où Z est de type II. Le cas facile de type I est déjà traité dans [13], où nous avons également donné, quand $\beta = \rho$ et sous une hypothèse de variation régulière au voisinage de 0 sur la mesure de sauts (le cas multi-dimensionnel étant aussi abordé avec une condition supplémentaire), une description assez compliquée du support de (4). Les squelettes que nous introduisons ici sont plus naturellement reliés à l'équation.

On désigne par U l'ensemble des suites $u = \{u_p\} = \{t_p, z_p\}$ où $\{t_p\}$ est une suite strictement croissante de $(0, +\infty)$ tendant vers $+\infty$ et $\{z_p\}$ une suite quelconque de $\text{Supp } \nu - \{0\}$. Pour tout $u \in U$ et toute fonction $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on introduit l'équation différentielle par morceaux :

$$\phi_t = x + \int_0^t a(\phi_s) ds + \int_0^t b(\phi_s) \psi_s ds + \sum_{t_p \leq t} b(\phi_{t_p-}) z_p. \quad (6)$$

Par les conditions sur a et b et le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a une unique solution globale à (6). Soit S l'ensemble des solutions de (6), u variant dans U et ψ dans l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\bar{S}$ la fermeture S dans $(\mathcal{D}_x, d)$.

Théorème 8 *Supposons Z de type II. Alors*

$$\text{Supp } X = \bar{S}.$$

Preuve : L'inclusion $\text{Supp } X \subset \overline{S}$ est une routine que nous laissons au lecteur, et nous traitons seulement l'inclusion réciproque. On fixe donc $\{u_n\}$, ψ et ϕ solution de l'équation (6) correspondante; on veut montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}[d_n(X, \phi) < \varepsilon] > 0.$$

En reprenant le déroulement de la preuve du Théorème principal de [14] et en utilisant les accroissements indépendants de Z , on voit qu'il suffit en fait de montrer

$$\mathbb{P}[|X - \phi|_n^* < \varepsilon] > 0$$

pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon > 0$, où ϕ est la solution de (6) sans troisième membre. Le cas où $b \circ \phi$ ne s'annule pas sur $[0, n]$ découle alors directement du Théorème 3 et de la Proposition 6. Dans le cas général, on doit décomposer l'axe des temps suivant les intervalles où $b \circ \phi$ est proche de 0, de manière à pouvoir appliquer la Proposition 7. Pour tout $\lambda \geq 0$ on pose donc

$$K_\lambda = \{0 \leq t \leq n, |b(\phi_t)| \leq \lambda\}.$$

Comme $b \circ \phi$ est continue et à dérivée bornée sur $[0, n]$, pour tout $\lambda > 0$ K_λ est une réunion finie de vrais intervalles fermés disjoints :

$$K_\lambda = \bigcup_{i=0}^{N_\lambda} [t_{2i}^\lambda, t_{2i+1}^\lambda]$$

avec $t_i^\lambda < t_{i+1}^\lambda$ pour tout i et $N_\lambda < +\infty$. En revanche, K_0 peut contenir des singletons et il se peut aussi que $N_0 = +\infty$. On choisit $\lambda > 0$ suffisamment petit tel que $b \circ \phi$ s'annule au moins une fois sur chaque intervalle de K_λ , et on note

$$M_\lambda = \bigcup_{i=0}^{N_\lambda} [t_{2i}^\lambda, t_{2i+1}^\lambda]$$

où t_{2i+1}^λ désigne cette fois-ci l'extrémité droite du grand intervalle de $K_{2\lambda}$ contenant $[t_{2i}^\lambda, t_{2i+1}^\lambda]$, et où l'on a réarrangé les indices de manière que la réunion définissant M_λ soit disjointe.

On considère alors $\phi^\lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 par morceaux et unique solution de l'équation différentielle donnée par $\phi_0^\lambda = x$ et

$$\frac{d\phi_t^\lambda}{dt} = \begin{cases} a(\phi_t^\lambda) & \text{si } t \in M_\lambda, \\ a(\phi_t^\lambda) + b(\phi_t^\lambda)\psi_t & \text{si } t \in M_\lambda^c. \end{cases}$$

On admet provisoirement qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$|\phi - \phi^\lambda|_n^* < \varepsilon/2 \quad (7)$$

où ϕ est la solution de (6) sans troisième membre. On est donc ramené à démontrer que

$$\mathbb{P}[|X - \phi^\lambda|_n^* < \varepsilon/2] > 0.$$

Par abus de notations on pose $t_{2i+1}^\lambda = t_{2i+1}^{2\lambda}$ pour tout $i \geq 0$, dans la réunion définissant M_λ . On pose également $t_{-1}^\lambda = 0$ et $t_{2N_\lambda+2}^\lambda = n$. Pour tout $-1 \leq i \leq 2N_\lambda + 1$ on note

$$s_i = t_{i+1}^\lambda - t_i^\lambda \text{ et } \xi_t^i = \int_{t_i^\lambda}^{t_i^\lambda + t} \psi_s ds \text{ pour tout } t \geq 0.$$

On considère également les processus Z^i donnés par

$$Z_t^i = Z_{t_1^\lambda + t}^\lambda - Z_{t_1^\lambda}^\lambda$$

pour tout $t \geq 0$, et les événements

$$\Omega_\eta^i = \begin{cases} \{|Z_{s_i}^i|^* < \eta\} \cap \{|Z_{s_i}^i|^d < \eta\} & \text{si } i \text{ est pair,} \\ \{|Z_{s_i}^i - \xi_i^i|^* < \eta\} \cap \{|Z_{s_i}^i|^d < \eta\} & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

On note enfin

$$\Omega_\eta^\lambda = \bigcap_{i=-1}^{2N_\lambda+1} \Omega_\eta^i.$$

Par indépendance et par le Théorème 3, on voit que pour tout $\eta > 0$,

$$\mathbb{P} [\Omega_\eta^\lambda] > 0.$$

De plus, comme $N_\lambda < +\infty$, on voit en appliquant successivement les Propositions 6 et 7 qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\Omega_\eta^\lambda \subset \{|X - \phi^\lambda|_\eta^* < \varepsilon/2\}.$$

Pour terminer la démonstration, il reste donc à vérifier (7) quand λ est suffisamment petit.

On note

$$M = \{y \in \mathbb{R}, \exists 0 \leq t \leq n \text{ tel que } |\phi_t - y| \leq 1\}$$

et on pose

$$t_\lambda = \inf \{t \geq 0, \phi_t^\lambda \notin M\}.$$

Soit K_1 une constante de Lipschitz pour a et b sur M . On pose

$$K_2 = K_1 \exp(K_1 T), \quad K_3 = |\psi|_\eta^*, \quad K = \sup\{K_2, K_3\}.$$

On note enfin, pour tout $-1 \leq i \leq 2N_\lambda + 1$,

$$\rho_i^\lambda = K(t_{i+1}^\lambda - t_i^\lambda).$$

Par une application répétée du lemme de Gronwall, on voit que

$$|\phi - \phi^\lambda|_{t_\lambda}^* \leq 2\lambda \left(1 + \rho_{2N_\lambda+1}^\lambda\right) \left(\rho_{2N_\lambda+1}^\lambda + \left(1 + \rho_{2N_\lambda}^\lambda\right) \left(\rho_{2N_\lambda}^\lambda + \dots\right)\right).$$

On conclut alors facilement quand N_0 est fini. Si N_0 est infini, on se ramène au cas fini en remarquant que pour tous $0 \leq a, b \leq 1$

$$(a+b)(1+a+b) \geq (a(1+a)+b)(1+b),$$

ce qui entraîne que la quantité à droite de λ dans le terme de droite est décroissante à partir d'un certain rang quand N_λ tend vers l'infini. $\diamond$

Remarques (a) En adaptant les sauts dans l'équation (6), ce résultat se généralise facilement au cas où l'on ajoute à l'équation (1) un terme en

$$\sum_{0 \leq s \leq t} c(X_{s-}, \Delta Z_s),$$

avec $c(x, z) \leq K|z|^2$ pour une certaine constante K quand (x, z) varie dans un compact fixe de $\mathbb{R}^2$. En particulier, on peut donc donner un théorème de support aux équations géométriques discontinues définies par Cohen [2], dans le cas uni-dimensionnel. On retrouve aussi les équations de Marcus et le Théorème principal de [14].

(b) Si on définit maintenant

$$\gamma = \inf \left\{ \alpha > 0, \int_{|z| \leq 1} |z|^\alpha \nu(dz) < +\infty \right\},$$

alors quand $\gamma < 2$ on peut encore affaiblir la condition sur c ci-dessus et supposer seulement

$$c(x, z) \leq K|z|^{\gamma'},$$

pour une certaine constante K quand (x, z) varie dans un compact fixe de $\mathbb{R}^2$, avec $\gamma' \in (\gamma, 2]$. En effet, on peut aisément reprendre le Lemme 1 et le Théorème 3 en remplaçant $|Z|_t^d$ par

$$\sum_{s \leq t} |\Delta Z_s|^{\gamma'}.$$

Dans le cas $\beta = 0$, c'est ce type d'équations qui étaient étudiées dans [13]. Ici nous avons choisi de ne traiter que le cas linéaire pour ne pas alourdir les notations.

On note C_x l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ partant de x . Le corollaire suivant se démontre de la même façon que les Corollaires 1 et 2 dans [14] :

Corollaire 9 (i) Si Z est de type II et si b ne s'annule pas, alors $\text{Supp } X$ est la fermeture des squelettes suivants

$$\phi : t \mapsto \psi_t + \sum_{t_p \leq t} b(\psi_{t_p-}) z_p,$$

où ψ est une fonction quelconque de C_x et en reprenant les mêmes notations pour $\{t_p, z_p\}$. En particulier $\text{Supp } X$ contient C_x .

(ii) Si Z est de type II, si b ne s'annule pas et si $\text{Supp } \nu = \mathbb{R}$, alors

$$\text{Supp } X = \mathcal{D}_x.$$

Dans le cas (i) on voit donc que $\text{Supp } X_t = \mathbb{R}$ pour tout $t > 0$. Dans le cas $\beta = 0$ on sait de plus que si le coefficient b est *elliptique*, i.e. si

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} |b(x)| > 0,$$

et sous des conditions supplémentaires de régularité sur a , b et ν , alors X_t admet une densité régulière pour tout $t > 0$ (voir le Corollaire 4.4 dans [10]). On peut donc naturellement se demander si cette densité est partout positive quand Z est de type II.

Nous terminons cet article en énonçant une conjecture sur le cas multi-dimensionnel. Malgré son énoncé très naturel, cette conjecture semble assez difficile à démontrer en toute généralité sur le processus porteur, comme il est souhaitable.

On considère sur $\mathbb{R}^d$ l'équation d'Itô suivante

$$X_t = x + \int_0^t b(X_{s-}) \circ dZ_s$$

écrite une nouvelle fois sous forme Meyer-Stratonovitch, avec Z processus de Lévy m -dimensionnel et $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d}$ suffisamment bornée et régulière. Si (α, Q, ν) sont les caractéristiques locales de Z , on pose

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^m / \int_{|z| \leq 1} | \langle x, z \rangle | \nu(dz) < \infty \right\},$$

où $\langle, \rangle$ désigne le produit scalaire associé à une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$. On note

$$L = K^\perp \oplus \text{Im } Q \quad \text{et} \quad \alpha_K = \alpha - \int_{|z| \leq 1} z_K \nu(dz),$$

où z_K désigne le projeté orthogonal de z sur K (de sorte que l'intégrale dans la définition de α_K a bien un sens). Ces notations sont bien sûr motivées par le célèbre théorème de Tortrat [17] (voir également Sharpe [12] pour une présentation plus claire de ce résultat) sur le support des lois indéfiniment divisibles dans $\mathbb{R}^m$, et l'on conjecture que le support de X dans $(\mathcal{D}_x, d)$ est la fermeture des squelettes suivants :

$$\phi_t = x + \int_0^t b(\phi_s) (\alpha_K + \psi_s^L) ds + \sum_{t_p \leq t} b(\phi_{t_p-}) z_p,$$

où ψ^L est une fonction continue quelconque de $\mathbb{R}^+$ dans L et $\{t_p, z_p\}$ une suite quelconque de U .

Le cas où Z est de type I est déjà traité dans [13]. Dans le cas de type II, pour d quelconque et $m = 1$ (ou $m = 2$ avec un processus porteur du type (Z_t, t)), on peut reprendre facilement tous les raisonnements de cet article. Dans le cas m, d quelconques et b constant (i.e. quand X est lui-même un processus de Lévy), ce résultat est démontré dans [15].

Remerciements : Ce travail fut en partie effectué à l'Université Humboldt de Berlin, et je remercie Peter Bank d'une discussion très intéressante sur les perturbations d'E.D.S.

Références

- [1] J. Bertoin. *Lévy processes*. Cambridge University Press, 1996.
- [2] S. Cohen. Géométrie différentielle stochastique avec sauts I et II. *Stoch. and Stoch. Reports* 56, pp. 179-225, 1996.
- [3] H. Doss. Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires. *Ann. I.H.P. Prob. Stat.* XIII, pp. 99-125, 1977.
- [4] M. Errami, F. Russo et P. Vallois. Itô formula for $C^{1,\lambda}$ functions of a càdlàg process and related calculus. À paraître dans *Probab. Theory Relat. Fields*.
- [5] N. Fournier. Support theorem for the solution of a white noise driven parabolic S.P.D.E. with temporal Poissonian jumps. À paraître dans *Bernoulli*.
- [6] B. Fristedt. Sample functions of stochastic processes with stationary, independent increments. Dans : *Advances in Probability and Related Topics* 3, pp. 241-396. Dekker, New York, 1974.

- [7] N. Ikeda et S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North-Holland, 1989.
- [8] J. Jacod et A. N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*. Springer, 1987.
- [9] T. G. Kurtz, E. Pardoux et Ph. Protter. Stratonovich stochastic differential equations driven by general semimartingales. *Ann. I.H.P. Prob. Stat.* 31, pp. 351-377, 1995.
- [10] J. Picard. On the existence of smooth densities for jump processes. *Probab. Theory Rel. Fields* 105 (4), pp. 481-511, 1996.
- [11] E. Saint-Loubert-Bié. Étude d'une E.D.P.S. conduite par un bruit Poissonnien. *Probab. Theory Rel. Fields* 111 (2), pp. 287-321, 1998.
- [12] M. J. Sharpe. Support of convolution semigroups and densities. Dans : Heyer (editeur), *Probability measures on groups and related structures XI*, pp. 364-369. World Scientific Publishing, River Edge, 1995.
- [13] Th. Simon. Support theorem for jump processes. *Stoch. Proc. Appl.* 89 (1), pp. 1-30, 2000.
- [14] Th. Simon. Support of a Marcus equation in dimension 1. *Elec. Comm. Probab.* 5, pp. 149-157, 2000.
- [15] Th. Simon. Sur les petites déviations d'un processus de Lévy. *Pot. Analysis* 14 (2), pp. 155-173, 2001.
- [16] D. W. Stroock et S. R. S. Varadhan. On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle. Dans : *Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.* III, pp. 333-359. Univ. California Press, Berkeley, 1972.
- [17] A. Tortrat. Le support des lois indéfiniment divisibles dans un groupe Abélien localement compact. *Math. Z.* 197, pp. 231-250, 1988.