SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

LEONID PASTUR

ANTOINE LEJAY

Matrices aléatoires : statistique asymptotique des valeurs propres

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 36 (2002), p. 135-164

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_2002__36__135_0>

Matrices aléatoires :

Statistique asymptotique des valeurs propres

Leonid PASTUR[1] et Antoine LEJAY[2]

Résumé

L'article [3] est une brève introduction à la théorie de la distribution asymptotique des valeurs propres des matrices aléatoires symétriques réelles ou hermitiennes de grande taille. Cette théorie a connu récemment beaucoup d'évolutions motivées par diverses branches des mathématiques et de la physique. L'étude de quelques régimes asymptotiques mène à des résultats et à des techniques intéressants.

1. Introduction

Les matrices aléatoires sont liées aux nombreuses branches des mathématiques et de la physique mathématique. En particulier,

- probabilités et statistiques;
- théorie spectrale;
- algèbres d'opérateurs;
- combinatoire;
- théorie de nombres;
- analyse;
- physique nucléaire;
- théorie quantique des champs;
- chaos quantique;
- théorie des solides;
- systèmes intégrables;
- analyse semi-classique.

Certaines propriétés caractéristiques des matrices aléatoires, en particulier, l'écart entre des valeurs propres successives, décrivent très fidèlement nombre de spectres observés depuis ceux des noyaux et des atomes jusqu'aux des zéros de la fonction zeta de Riemann. Certaines intégrales matricielles donnent des représentations assez utiles et efficaces des fonctions génératrices des caractéristiques numériques des graphes et des sous-variétés, ainsi que des quantités importantes de systèmes intégrables, etc. (voir par exemple les revues [Gi, GMW, KS, Me, GMW, P2, P4, TW, Vo] et les références qu'elles contiennent).

2. Objets et problèmes

Du point de vue analytique, on s'intéresse généralement au comportement d'une intégrale du type

$$\int_{\mathcal{E}_n} F_n(M)\mathbf{P}_n(\,\mathrm{d}M) \tag{2.1}$$

[1]Université Paris 7, UFR de Mathématiques – case 7012, 2, place Jussieu – 75251 Paris, Cedex 5 – France – E-mail : pastur@math.jussieu.fr

[2]Projet OMEGA, INRIA – IECN, Campus scientifique – BP 239 — 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex – France – E-mail : Antoine.Lejay@iecn.u-nancy.fr

[3]Minicours donné par L.Pastur durant les mois de février et de mars 2000 au CMI à l'Université de Provence, dans le cadre de l'École Doctorale et rédigé par A.Lejay et L.Pastur.

où

- $\mathcal{E}_n$ est un ensemble de matrices de taille $n \times n$, par exemple
  - réelles, symétriques $\mathcal{S}_n$,
  - hermitiennes $\mathcal{H}_n$,
  - unitaires $\mathcal{U}_n$, etc. ;
- F_n est une application de $\mathcal{E}_n$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui est généralement prise orthogonalement ou unitairement invariante. Par exemple, dans le cas de $\mathcal{S}_n$,

$$F_n(OMO^{\mathrm{T}}) = F_n(M), \ \forall O \in \mathcal{O}(n) ;$$

- $\mathbf{P}_n$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{E}_n$.

Généralement, on cherche à résoudre des problèmes asymptotiques, c'est-à-dire qu'il faut étudier le comportement de l'intégrale (2.1) lorsque la taille n tend vers l'infini.

Du point de vue probabiliste, on s'intéresse aux problèmes asymptotiques concernant des variables aléatoires $F_n(M)$ définies sur l'espace de probabilité $(\mathcal{E}_n, \mathbf{P}_n)$ et possédant la propriété d'invariance ci-dessus.

Exemple 1. Pour $\mathcal{S}_n$, on regarde la mesure de référence

$$\mathrm{d}_1 M = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{d}M_{j,j} \prod_{j<k\leqslant n} \mathrm{d}M_{j,k} \tag{2.2}$$

qui est un analogue de la mesure de Lebesgue.

Pour $\mathcal{H}_n$, cet analogue sera

$$\mathrm{d}_2 M = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{d}M_{j,j} \prod_{j<k\leqslant n} \mathrm{d}\mathfrak{Re}\, M_{j,k}\, \mathrm{d}\mathfrak{Im}\, M_{j,k}. \tag{2.3}$$

On définit la loi gaussienne comme

$$\mathbf{P}_{n,\beta}(\mathrm{d}_\beta M) = \frac{1}{Z_{n,\beta}} \exp\left(-\frac{n}{4w^2} \operatorname{Tr} M^2\right) \mathrm{d}_\beta M \text{ pour } \beta = 1, 2, \tag{2.4}$$

où $Z_{n,\beta}$ est une constante de normalisation. Si $\beta = 1$ (cas des matrices symétriques réelles), on parlera d'*ensemble gaussien orthogonal* (EGO). Lorsque $\beta = 2$ (cas des matrices hermitiennes), alors il s'agit d'*ensemble gaussien unitaire* (EGU).

Définition 2 (Mesure de comptage normalisée). *Toute matrice M_n symétrique réelle ou hermitienne de taille $n \times n$ est diagonalisable. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ses n valeurs propres réelles. Alors la* mesure de comptage normalisée *N_n de M est définie par*

$$N_n(\Delta) = \frac{1}{n} \operatorname{Card} \{ \ell \in \{1, \ldots, n\} \mid \lambda_\ell \in \Delta \}. \tag{2.5}$$

pour tout ensembles Δ borélien de $\mathbb{R}$.

Si M_n est une matrice aléatoire, sa mesure de comptage est aussi aléatoire, et on s'intéresse à ses propriétés asymptotiques lorsque la taille des matrices tend vers l'infini.

La mesure de comptage normalisée d'une matrice aléatoire est un cas particulier de la *statistique linéaire* $N_n(\varphi)$ des variables aléatoires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ définie par une fonction mesurable bornée à support compact :

$$N_n(\varphi) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \varphi(\lambda_\ell) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) N_n(\,\mathrm{d}\lambda). \tag{2.6}$$

Si nous disposons d'une loi $\mathbf{P}_n$ sur un ensemble de matrices aléatoires $\mathcal{E}_n$ et si $\mathbf{E}_n[\ldots]$ désigne l'espérance par rapport de $\mathbf{P}_n$, on peut bien entendu s'intéresser à :

(i) la moyenne

$$\overline{N}_n(\Delta) = \mathbf{E}_n[N_n(\Delta)];$$

(ii) la covariance

$$\mathbf{Cov}[N_n(\Delta_1), N_n(\Delta_2)] = \mathbf{E}_n[N_n(\Delta_1)N_n(\Delta_2)] - \mathbf{E}_n[N_n(\Delta_1)]\mathbf{E}_n[N_n(\Delta_2)]$$

pour des intervalles Δ_1 et Δ_2 de $\mathbb{R}$, en particulier, la variance

$$\mathbf{Var}[N_n(\Delta)] = \mathbf{Cov}[N_n(\Delta), N_n(\Delta)];$$

(iii) la loi de $N_n(\Delta)$, *i.e.*,

$$\mathbf{P}_n[N_n(\Delta) = k/n] \text{ pour } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

En particulier, la probabilité

$$E_n(\Delta) = \mathbf{P}_n[N_n(\Delta) = 0] \tag{2.7}$$

est appelée la *probabilité de trou* (*hole probability*).

Parmi les types de comportements asymptotiques de ces quantités, nous allons nous intéresser d'abord au *régime global*. Il s'agit de l'étude de la convergence de la suite N_n. Typiquement, N_n converge étroitement en probabilité ou presque sûrement vers une mesure non aléatoire N. On parle alors de la *densité d'état intégrée* (IDS, *Integrated Density of State*).

Exemple 3. Soit $\{q_j\}_{j\geq 1}$ une suite de variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi F. Posons

$$M_n = \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_n \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Alors

$$N_n(\Delta) = n^{-1}\sum_{\ell=1}^{n} \mathbf{1}_\Delta(q_\ell),$$

où $\mathbf{1}_\Delta$ est la fonction indicatrice de $\Delta \subset \mathbb{R}$, donc

$$\overline{N}_n(\Delta) = \mathbf{E}[N_n(\Delta)] = F(\Delta).$$

De plus,

$$\mathbf{Var}[N_n(\Delta)] = F(\Delta)(1 - F(\Delta))/n$$

et nous constatons que $\mathbf{Var}[N_n(\Delta)] = O(1/n)$ quand n est grand, et donc que $N_n(\Delta)$ converge en probabilité vers $F(\Delta)$ pour tout intervalle $\Delta \subset \mathbb{R}$ fixé.

Considérons maintenant la probabilité de trou (2.7) pour (2.8). On a

$$E_n(\Delta) = \mathbf{P}\left[N_n(\Delta) = 0\right] = (1 - F(\Delta))^n. \tag{2.9}$$

Ainsi, si un intervalle Δ est chargé par la loi F, $E_n(\Delta)$ décroît vers 0.

Mais des résultats plus fins peuvent parfois être donnés. Supposons que F a la densité continue f. Dans ce cas $\overline{N}_n(\mathrm{d}\lambda) = f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$, *i.e.*, $f(\lambda)$ est la densité de la moyenne $\overline{N}_n$ de la mesure de comptage normalisée (2.5). Posons

$$\Delta_n = \left[\lambda_0, \lambda_0 + \frac{s}{nf(\lambda_0)}\right] \text{ si } \lambda_0 \text{ est tel que } 0 < f(\lambda_0) < +\infty.$$

Alors dans ces conditions, (2.9) implique que

$$\lim_{n\to\infty} E_n(\Delta_n) = e^{-s}. \tag{2.10}$$

Cet exemple nous amène à considérer une deuxième famille de résultats, classés sous la dénomination de *régime local.* Il s'agit, par exemple, de regarder la statistique des valeurs propres dans les intervalles du type

$$\left[\lambda_0, \lambda_0 + \frac{c}{n\rho_n(\lambda_0)}\right] \text{ pour un } \lambda_0 \text{ tel que } \rho(\lambda_0) > 0,$$

où ρ_n est la densité de la moyenne $\overline{N}_n$ de la mesure de comptage, dont nous supposerons qu'elle est continue et qu'elle converge simplement vers une fonction ρ appelée *densité d'état* :

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(\lambda) = \rho(\lambda), \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

La limite e^{-s} de E_n dans (2.10) est la probabilité que l'intervalle $[0, s]$ ne contienne aucun des points d'un processus de Poisson. C'est pour cela que cette forme de la probabilité de trou est appelée *loi de Poisson* (ou *statistique de Poisson*) dans la théorie des matrices aléatoires (voir par exemple [Mi] pour une formule similaire dans le cas d'une équation de Schrödinger avec potentiel aléatoire).

3. La loi du demi-cercle

Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe à un problème de statistique des valeurs propres en régime global pour l'ensemble archétype des matrices symétriques réelles à entrées gaussiennes, *i.e.*, l'*ensemble gaussien orthogonal* (abrégé en EGO). Il s'agit de montrer que les valeurs propres se répartissent lorsque la taille tend vers l'infini selon une loi ne dépendant pas de l'aléa, et connue comme la *loi du demi-cercle.*

L'ensemble est défini par (2.2) et (2.4), *i.e.*, les matrices de cet ensemble sont telles que pour tout n il existe une matrice $W_n = \{W_{j,k}\}_{j,k=1}^n$ telle que

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{n}} W_n, \text{ où } W_n = \{W_{j,k}\}_{j,k=1}^n \text{ avec } W_{j,k} = W_{k,j} \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

et que les entrées $W_{j,k}$, $1 \leqslant j < k \leqslant n$ de la partie triangulaire supérieure de W_n sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées et de variance w^2 quand $1 \leqslant j < k$ et $2w^2$ quand $j = k$:

$$\mathbf{E}_n[W_{j,k}] = 0, \quad \mathbf{E}_n[W_{j,k}^2] = (1+\delta_{j,k})w^2, \quad 1 \leqslant j,k \leqslant n. \tag{3.2}$$

Dans ce cas les matrices M_n peuvent être définies pour tout n sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathbf{P})$, avec $\Omega = \mathbb{R}^\infty$ et avec

$$\mathbf{P} = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant \infty} P_{j,k}, \tag{3.3}$$

où

$$P_{j,k}(\mathrm{d}W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{j,k}^2}} e^{-\frac{W^2}{2\sigma_{j,k}^2}} \mathrm{d}W \text{ et } \sigma_{j,k}^2 = \frac{(1+\delta_{j,k})w^2}{n}. \tag{3.4}$$

Théorème 4 (La loi du demi-cercle). *Soit $\mathcal{E}_n$ l'EGO défini comme ci-dessus et soit N_n sa mesure de comptage normalisée* (2.5). *Alors il existe une mesure de probabilité N telle que*

$$N_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{étroite}} N, \ \mathbf{P}\text{-}p.s., \tag{3.5}$$

avec

$$N(\Delta) = \int_\Delta \rho^{(1)}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{3.6}$$

où

$$\rho^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi w^2} \begin{cases} \sqrt{4w^2 - \lambda^2} & \text{si } |\lambda| \leqslant 2w, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons utiliser la *transformée de Stieltjes* de la mesure de comptage normalisée.

Définition 5 (Transformée de Stieltjes). *Soit m une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. La fonction*

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{m(\mathrm{d}\lambda)}{\lambda - z}$$

définie pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Im\mathrm{m}\, z \neq 0$, s'appelle la transformée de Stieltjes *de m.*

Proposition 6. *Soit f la transformée de Stieltjes d'une mesure de probabilité m. Alors*

(i) *f est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$;*

(ii) *$\Im\mathrm{m}\, f(z) \cdot \Im\mathrm{m}\, z > 0$ quand $\Im\mathrm{m}\, z \neq 0$;*

(iii) *$\lim_{y \to +\infty} y|f(iy)| = 1$;*

(iv) *Si* (i)-(iii) *sont vérifiées pour une fonction f, alors il existe une mesure de probabilité m telle que f soit sa transformée de Stieltjes (on appelle de telles fonctions des* fonctions de Nevanlinna *ou* de Herglotz*) ;*

(v) *Si Δ est un intervalle de $\mathbb{R}$ dont les extrémités ne sont pas chargées par la mesure m, alors on a la formule*

$$m(\Delta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_\Delta \Im\mathrm{m}\, f(\lambda + i\varepsilon)\,\mathrm{d}\lambda$$

connue comme la formule d'inversion de Frobenius-Perron *;*

(vi) *La correspondance entre une mesure et sa transformée de Stieltjes est continue et d'inverse continue de l'espace des mesures de probabilité muni de la topologie de la convergence étroite dans l'espace des fonctions analytiques muni la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$.*

Démonstration. Voir [AG]. ∎

Remarquons que grâce au théorème spectral sur les matrices symétriques réelles,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{N_n(\mathrm{d}\lambda)}{\lambda - z} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\lambda_\ell - z} = \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(M_n - z)^{-1}, \tag{3.8}$$

où $\{ \lambda_\ell \}_{\ell=1}^{n}$ est le spectre de M_n. Nous pouvons donc utiliser la *résolvante* $G(z) = (M_n - z)^{-1}$ de M_n pour l'étude de N_n. Rappelons quelques propriétés nécessaires de la trace d'une matrice et de sa résolvante.

Proposition 7. *Soit $\mathcal{M}_n$ l'algèbre des matrices de taille $n \times n$. Désignons par* Tr *l'opération de* trace *:*

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}, \quad \textit{pour tout } A = \{ A_{i,j} \}_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_n.$$

Alors pour tout A, B appartenant à $\mathcal{M}_n$,

(i) $|\operatorname{Tr} A| \leqslant n \|A\|$ *où* $\|A\|$ *est la norme* $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} |Ax|/|x|$ *;*

(ii) $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$ *;*

(iii) $|\operatorname{Tr} AB|^2 \leqslant \operatorname{Tr} AA^* \operatorname{Tr} BB^*$.

Proposition 8. *Soit M une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$ et $G(z) = (M - z)^{-1}$ sa* résolvante *pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors*

(i) $\|G(z)\| \leqslant |\Im\mathrm{m}\, z|^{-1}$ *;*

(ii) $|G_{j,k}(z)| \leqslant |\Im\mathrm{m}\, z|^{-1}$ *pour tout $j, k = 1, \ldots, n$;*

(iii) *$G' \cdot A = -GAG$ pour toute matrice A, où G' est la dérivée de G par rapport à M à z fixé.*

Désignons par $\mathbf{E}[\ldots]$ l'espérance associée à la mesure de probabilité $\mathbf{P}$ définie par l'EGO (voir (3.1)-(3.4)).

Proposition 9. *Soit $\mathcal{E}_n$ l'EGO et Φ une application de classe C^1 de l'espace des matrices symétriques réelles $\mathcal{S}_n$ dans $\mathbb{C}$ telle que sa dérivée Φ' soit bornée. Alors*

$$\mathbf{E}[\Phi'(M) \cdot X] = \frac{n}{2w^2} \mathbf{E}[\Phi(M) \operatorname{Tr}(MX)], \quad \forall X \in \mathcal{S}_n. \tag{3.9}$$

Démonstration. Posons

$$I = \int_{\mathcal{E}_n} \exp\Big(-\frac{n}{4w^2} \operatorname{Tr} M^2\Big) \Phi(M) \, \mathrm{d}_1 M = Z_{n,1} \cdot \mathbf{E}[\Phi(M)],$$

où $Z_n, 1$ est la constante de normalisation dans la définition (2.4). Soit X une matrice symétrique réelle et $\varepsilon > 0$. L'intégrale I est invariante lorsque M est remplacée par $M + \varepsilon X$, car $\mathrm{d}M = \mathrm{d}(M + \varepsilon X)$. Ainsi, comme

$$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \text{ et } \left.\frac{\mathrm{d} \operatorname{Tr}(M + \varepsilon X)^2}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 2 \operatorname{Tr}(MA),$$

il est maintenant clair que (3.9) est vraie. ∎

Remarque 10. Si $n = 1$ et $2w^2/n$ est remplacé par σ^2, alors une intégration par parties donne directement que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int \exp\left(-\frac{M^2}{2\sigma^2}\right) \Phi'(M) \, \mathrm{d}M = \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int \exp\left(-\frac{M^2}{2\sigma^2}\right) \Phi(M) M \, \mathrm{d}M.$$

On peut donc regarder la proposition 9 comme un analogue matriciel de cette formule simple.

Lemme 11. *Soit $\mathcal{E}_n$ l'EGO. Posons*

$$g_n(z) = \frac{1}{n} \operatorname{Tr} G(z) \text{ pour } \Im\mathrm{m}\, z \neq 0$$

où $G = (M - z)^{-1}$ est la résolvante d'une matrice $M \in \mathcal{S}_n$. Alors les égalités suivantes sont satisfaites :

(i) *si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,*

$$\mathbf{E}\left[g_n(z) \right] = -\frac{1}{z} - \frac{w^2}{z} \mathbf{E}\left[g_n^2(z) \right] - \frac{w^2}{zn^2} \mathbf{E}\left[\operatorname{Tr} G^2(z) \right]; \tag{3.11}$$

(ii) *si $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[g_n(z_1) g_n(z_2) \right] = &-\frac{1}{z_1} \mathbf{E}\left[g_n(z_2) \right] - \frac{w^2}{z_1} \mathbf{E}\left[g_n^2(z_1) g_n(z_2) \right] \\ &- \frac{w^2}{n^2 z_1} \mathbf{E}\left[\operatorname{Tr} G^2(z_1) g_n(z_2) \right] - \frac{2w^2}{n^3 z_1} \mathbf{E}\left[\operatorname{Tr} G^2(z_1) G(z_2) \right]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Démonstration. Soient j, k deux indices compris entre 1 et n. On applique la proposition 9 à la fonction $\Phi(M) = (M - z)^{-1}_{j,k} = G_{j,k}(M)$ en utilisant le point (iii) de la proposition 8, ce qui implique que

$$\mathbf{E}\left[(GXG)_{j,k} \right] + \frac{n}{2w^2} \mathbf{E}\left[G_{j,k} \operatorname{Tr} MX \right] = 0, \ \forall X \in \mathcal{S}_n. \tag{3.13}$$

Soient p et q deux indices compris entre 1 et n, et soit $X^{(p,q)}$ la matrice définie par

$$X^{(p,q)}_{j,k} = \delta_{j,p}\delta_{k,q} + \delta_{j,q}\delta_{k,p}.$$

Alors, pour ce choix de $X^{(p,q)}$, on obtient de (3.13)

$$\mathbf{E}\left[G_{j,p} G_{q,k} + G_{j,q} G_{p,k} \right] + \frac{n}{w^2} \mathbf{E}\left[G_{j,k} M_{p,q} \right] = 0. \tag{3.14}$$

En choisissant $j = p$, $k = q$, en sommant (3.14) sur tous les indices j, k de 1 à n et en divisant par n^2, nous obtenons

$$\mathbf{E}\left[g_n^2(z) \right] + \frac{1}{n^2} \mathbf{E}\left[\operatorname{Tr} G^2(z) \right] + \frac{1}{nw^2} \mathbf{E}\left[\operatorname{Tr} G(z) M \right] = 0.$$

Il ne reste plus qu'à utiliser l'identité $G(z)M = G(z)[(M - z) + z] = \mathrm{Id} + zG(z)$ pour obtenir (3.11).

Pour le point (ii), il suffit d'appliquer le même raisonnement à $G_{j_1,k_1} G_{j_2,k_2}$. ∎

Lemme 12. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|\Im z| \geqslant 2w$, alors*

$$\mathbf{Var}[g_n(z)] = \mathbf{E}\left[\,|g_n(z) - \mathbf{E}\,[\,g_n(z)\,]\,|^2\,\right] \leqslant \frac{3}{n^2|\Im z|^2}. \tag{3.15}$$

Démonstration. Notons

$$f_n(z) = \mathbf{E}\,[\,g_n(z)\,]\,, \quad \mathring{g}_n(z) = g_n(z) - f_n(z). \tag{3.16}$$

Soient z_1 et z_2 deux points de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. L'identité (3.11) du lemme 11(i) appliquée à $z = z_1$ multipliée par $f_n(z_2)$, et à laquelle on a ensuite soustrait l'identité (3.12) du lemme 11(ii) conduit à

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\,g_n(z_1)g_n(z_2)\,] - \mathbf{E}[\,g_n(z_1)\,]\mathbf{E}[\,g_n(z_2)\,] &= \overbrace{-\frac{w^2}{z_1}\mathbf{E}[\,g_n^2(z_1)\mathring{g}_n(z_2)\,]}^{T_1} \\ &\quad \underbrace{-\frac{w^2}{z_1 n^2}\mathbf{E}[\,\mathrm{Tr}\,G^2(z_1)\mathring{g}_n(z_2)\,]}_{T_2} \underbrace{-\frac{2w^2}{z_1 n^3}\mathbf{E}[\,\mathrm{Tr}\,G^2(z_1)G(z_2)\,]}_{T_3}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

∘ Pour le terme T_1, comme $g_n(z_1) = \mathring{g}_n(z_1) + f_n(z_1)$, on a

$$\mathbf{E}[\,g_n(z_1)^2\mathring{g}_n(z_2)\,] = \mathbf{E}[\,g_n(z_1)\mathring{g}_n(z_1)\mathring{g}_n(z_2)\,] + f_n(z_1)\mathbf{E}[\,g_n(z_1)\mathring{g}_n(z_2)\,]. \tag{3.18}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z_1 = z$, $z_2 = \bar{z}$ et $\eta = |\Im z|$. On constate de plus que $\mathbf{E}[\,g_n(z_1)\mathring{g}_n(z_2)\,] = \mathbf{E}[\,\mathring{g}_n(z_1)\mathring{g}_n(z_2)\,]$. Comme $\|G(z)\| \leqslant 1/|z| \leqslant 1/|\Im z|$, et que $g_n(z) \leqslant \frac{1}{n} \times n\,\|G(z)\|$ (voir les propositions 7 et 8), alors $|g_n(z)| \leqslant 1/\eta$. De plus, comme $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$, nous déduisons de (3.18) que

$$|\mathbf{E}[\,g_n(z_1)^2\mathring{g}_n(z_2)\,]| \leqslant \frac{2}{\eta}\mathbf{E}[\,|\mathring{g}_n(z)|^2\,],$$

et donc que $|T_1|$ est majoré par $2w^2\,\mathbf{Var}[g(z)]/\eta^2$.

∘ Pour le terme T_2, des techniques similaires et l'inégalité de Cauchy-Schwarz permettent de prouver que

$$|T_2| \leqslant \frac{w^2}{\eta n^2} \times \frac{n}{\eta^2}\mathbf{E}[\,|\mathring{g}_n(z)|\,] \leqslant \frac{w^2}{n\eta^3}\sqrt{\mathbf{Var}[g(z)]},$$

toujours lorsque $z_1 = z$ et $z_2 = \bar{z}$ pour un complexe z tel que $|\Im z| = \eta$.

∘ De même, $|T_3| \leqslant 2w^2/\eta^4 n^2$.

Lorsque $z_1 = z$ et $z_2 = \bar{z}$, alors le terme de gauche de l'égalité (3.17) est égal à $\mathbf{E}\,[\,|g_n(z)|^2\,] - |\mathbf{E}\,[\,g_n(z)\,]\,|^2 = \mathbf{Var}[g_n(z)]$.

Posons $v^2 = \mathbf{Var}[g(z)]$. Alors les estimations précédentes conduisent à

$$v^2\left(1 - \frac{2w^2}{\eta^2}\right) \leqslant \frac{w^2}{n\eta^3}v + \frac{2w^2}{n^2\eta^4}. \tag{3.19}$$

Si $|\Im(z)| = \eta \geqslant 2w$, alors on arrive à l'inégalité quadratique

$$v^2 - \frac{w^2}{2n\eta^3}v - \frac{w^2}{n^2\eta^4} \leqslant 0,$$

d'où $v^2 \leqslant 3/n^2\eta^2$. ∎

Démonstration du théorème 4. D'après l'équation (3.8), $g_n(z) = n^{-1}\operatorname{Tr} G(z)$ est la transformée de Stieltjes de la mesure de comptage normalisée N_n.

Ainsi, l'identité (3.11) du lemme 11(i) s'écrit

$$f_n(z) + \frac{1}{z} + \frac{w^2}{z} f_n^2(z) = -\frac{w^2}{z}\mathbf{E}\left[\left(g_n(z) - \mathbf{E}\left[g_n(z)\right]\right)^2\right] - \frac{w^2}{zn^2}\mathbf{E}\left[\operatorname{Tr} G^2(z)\right]. \tag{3.20}$$

où $f_n(z) = \mathbf{E}[g_n(z)]$. Soit z un nombre complexe tel que $\eta = |\Im\mathrm{m}\, z| \geqslant 2w$. D'après le lemme 12,

$$\left|\frac{w^2}{z}\mathbf{E}\left[\left(g_n(z) - \mathbf{E}\left[g_n(z)\right]\right)^2\right]\right| \leqslant \frac{3}{n^2\eta^2} \times \frac{w^2}{\eta} \leqslant \frac{1}{n^2\eta},$$

d'après la proposition 7(i) et la proposition 8(i), $|\operatorname{Tr} G^2(z)| \leqslant n\,\|G\|^2 \leqslant n/\eta^2$, et donc

$$\left|\frac{w^2}{zn^2}\mathbf{E}\left[\operatorname{Tr} G^2(z)\right]\right| \leqslant \frac{w^2}{n\eta^3} \leqslant \frac{1}{4n\eta}.$$

Ces estimations et l'équation (3.20) impliquent l'inégalité

$$\left|f_n(z) + \frac{1}{z} + \frac{w^2}{z} f_n^2(z)\right| \leqslant \frac{C(\eta)}{n}, \tag{3.21}$$

où $C(\eta)$ ne dépend pas de n.

De plus, $|f_n(z)| \leqslant 1/\eta \leqslant 1/2w$. Donc la suite $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ est uniformément bornée en n sur $\mathbb{C}^{2w} = \{ z \in \mathbb{C}; |\Im\mathrm{m}\, z| > 2w \}$, et elle est analytique sur cet ensemble.

D'après le théorème de Montel (voir le théorème 12.8a de [He, p.563]), il existe une fonction f ainsi qu'une sous-suite $\{ f_{n_j} \}_{j=1}^{\infty}$ qui converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^{2w}$. De plus, f est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. D'après la propriété (iii) de la proposition 6 sur les transformée de Stieltjes, $\Im\mathrm{m}\, f_n(z) \cdot \Im\mathrm{m}\, z > 0$ quand $\Im\mathrm{m}\, z \neq 0$. Ainsi, en passant à la limite, $\Im\mathrm{m}\, f(z) \cdot \Im\mathrm{m}\, z \geqslant 0$.

o En passant à la limite sur l'inégalité (3.21), nous obtenons que pour tout $z \in \mathbb{C}^{2w}$,

$$w^2 f^2(z) + z f(z) + 1 = 0. \tag{3.22}$$

Ce qui veut dire que

$$f(z) = \frac{1}{2w^2}\left(-z \pm \sqrt{z^2 - 4w^2}\right), \ \forall z \in \mathbb{C}^{2w}.$$

D'autre part, la fonction f est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, donc la fonction f est en fait égale à une constante près à $z \mapsto -z \pm R(z)$, où $R(z)$ est une détermination de $\sqrt{z^2 - 4w^2}$. Mais nous savons que par un passage à la limite,

$$\forall \eta \geqslant 2w,\ |f(i\eta)| \leqslant \frac{1}{\eta} \text{ et donc } f(i\eta) \xrightarrow[\eta\to+\infty]{} 0.$$

Nous devons donc choisir la détermination de $R(z)$ qui est telle que $R(z) = z + \mathrm{O}(1)$ quand $z \to +\infty$. La fonction f est donc égale à $f(z) = (2w^2)^{-1}(-z + R(z))$ pour cette détermination de R.

Nous venons donc d'identifier la limite d'une sous-suite de $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$, qui ne dépend pas du choix de la sous-suite. Ainsi $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^{2w}$ vers la fonction f ainsi construite.

○ D'après l'inégalité de Tchebychev et le lemme 12, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left[\, |f_n(z) - g_n(z)| > \varepsilon \,\right] \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\, \mathbf{Var}[g_n(z)] \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 \eta^2 n^2}.$$

Ainsi la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left[\, |f_n(z) - g_n(z)| > \varepsilon \,\right]$ est convergente. Le lemme de Borel-Cantelli implique donc que pour tout $z \in \mathbb{C}^{2w}$,

$$f_n(z) - g_n(z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\ \mathbf{P}\text{-p.s. et donc } g_n(z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(z),\ \mathbf{P}\text{-p.s..}$$

○ En utilisant la proposition 6(iv), on conclut qu'il existe une mesure de probabilité N telle que f soit sa transformée de Stieltjes. Si g_n converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^{2w}$, alors la proposition 6(v) permet d'affirmer que

$$N_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{étroite}} N,\ \mathbf{P}\text{-p.s..}$$

Il faut donc démontrer la convergence uniforme de g_n vers f. Soit z_0 un point de $\mathbb{C}^{2w}$. Alors il existe un ensemble $\Omega(z_0)$ de mesure pleine pour $\mathbf{P}$ tel que $g_n(z_0)$ converge vers $f(z_0)$ pour tout point de $\Omega(z_0)$. Recommençons pour des points $z_1, z_2, \ldots$ de $\mathbb{C}^{2w}$ tels que cette suite $\{ z_j \}_{j=0}^{\infty}$ ait au moins un point d'accumulation dans $\mathbb{C}^{2w}$. Parallèlement à cela, il existe une suite de sous-ensembles $(\Omega(z_j))_{j=0,1,\ldots}$ de mesure pleine pour $\mathbf{P}$ tels que $g_n(z_j)$ converge vers $f(z_j)$ pour tout point de $\Omega(z_j)$. Le théorème de Vitali (voir le théorème 12.8d de [He, p. 565]) permet donc d'affirmer que g_n converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^{2w}$ pour toute réalisation appartenant à $\Omega^* = \cap_{j\geqslant 0}\Omega(z_j)$, qui est de mesure pleine.

○ Il ne nous reste plus qu'à identifier cette mesure N. D'après la formule d'inversion de Perron-Frobenius (proposition 6(v)), pour tout intervalle Δ,

$$N(\Delta) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \mathfrak{Im}\, f(\lambda + i\varepsilon)\, \mathrm{d}\lambda.$$

Or $\mathfrak{Im}\, f(\lambda + i\varepsilon)$ converge vers $(2w^2)^{-1}(4w^2 - \lambda^2)_+^{1/2}$ uniformément en λ quand $\varepsilon \to 0$, où x_+ désigne $\max(x, 0)$. Ainsi,

$$N(\Delta) = \frac{1}{2\pi w^2} \int_{\Delta\cap[-2w,2w]} (4w^2 - \lambda^2)_+^{1/2}\, \mathrm{d}\lambda,$$

ce qui est bien la loi du demi-cercle pour l'EGO. ∎

Remarque 13. En utilisant les mêmes idées on peut aussi montrer les assertions suivantes :

(i) La loi du demi-cercle pour l'EGU avec la densité (*cf* (3.5) et (3.6))

$$\rho^{(2)}(\lambda) = \frac{1}{4\pi w^2}(8w^2 - \lambda^2)_+^{1/2}. \tag{3.23}$$

On peut donc écrire les densités de l'EGO ($\beta = 1$) et l'EGU ($\beta = 2$) comme

$$\rho^{(\beta)}(\lambda) = \frac{2}{\pi a_\beta^2}(a_\beta^2 - \lambda^2)_+^{1/2}, \tag{3.24}$$

où $a_\beta^2 = 4\beta w^2$.

(ii) Les formes asymptotiques de la covariance de $g_n(z_1)$ et $g_n(z_2)$ pour $\Im\mathrm{m}\, z_{1,2} \geq 2w$:

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}_\beta[g_n(z_1), g_n(z_2)] = &-\frac{1}{\beta n^2(z_1 - z_2)^2} \\ &\times \left(1 - \frac{z_1 z_2 - a_\beta^2}{\sqrt{(z_1^2 - a_\beta^2)(z_2^2 - a_\beta^2)}}\right) + \mathrm{O}(n^{-4}),\ n \to \infty, \end{aligned}\tag{3.25}$$

où $a_\beta^2 = 4\beta w^2$ et $\beta = 1, 2$ (voir [KKP] pour un cas plus général).

4. Quelques généralisations

Donnons maintenant quelques généralisations du théorème (de la loi du demi-cercle). Leurs preuves reposent sur les mêmes idées (voir [KKP, P3, PV]).

4.1. Ensemble de Wishart

Soit $A^{(m,n)} = (A_{\mu,k})_{\mu=1,\dots,m;k=1,\dots,n}$ une matrice de taille $m \times n$ dont toutes les entrées $A_{\mu,k}$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées. Nous supposerons de plus que

$$\mathbf{E}[\, A_{\mu,k}\,] = 0 \text{ et } \mathbf{E}[\,(A_{\mu,k})^2\,] = a^2 \text{ pour } \mu = 1, \dots, m \text{ et } k = 1, \dots, n.$$

Posons

$$M_n = \frac{1}{n}(A^{(m,n)})^T A^{(m,n)} = \left\{\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^m A_{\mu,j}A_{\mu,k}\right\}_{j,k=1}^n .$$

Maintenant, si le nombre de lignes m est choisi en fonction de n de telle sorte que $m(n)/n$ converge vers une constante c strictement positive lorsque n tend vers l'infini, alors la mesure de comptage normalisée des valeurs propres N_n de M_n converge presque sûrement vers la mesure de probabilité N dont la transformée de Stieltjes est encore une solution de l'équation quadratique (*cf* (3.22))

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{c}{z}\frac{a^2 f(z)}{1 + a^2 f(z)}.$$

La densité $\rho(\lambda)$ de cette mesure N est donnée par (*cf* (3.7))

$$\rho(\lambda) = (1 - c)_+ \delta(\lambda) + \frac{1}{2\pi a^2 \lambda}\left((\lambda - \lambda_-)(\lambda_+ - \lambda)\right)_+^{1/2},$$

où $\lambda_\pm = a^2(1 \pm \sqrt{c})^2$ et $x_+ = \max\{0, x\}$ (voir [MP, Gi, P3]).

4.2. La loi déformée du demi-cercle

Considérons l'ensemble de matrices aléatoires

$$M_n^{(0)} + M_n \tag{4.1}$$

plus général que l'ensemble gaussien orthogonal — on parlera alors de *l'EGO déformé* — où M_n est l'*EGO* et $\{ M_n^{(0)} \}_{n\geq 1}$ est une suite de matrices déterministes dont la suite des mesures de comptage associées $\{ N_n^{(0)} \}_{n=1}^{\infty}$ converge vers une mesure de probabilité $N^{(0)}$. De façon plus générale, on peut aussi supposer que $\{ M_n^{(0)} \}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de matrices aléatoires indépendantes de M_n et dont la suite des mesures de comptage associée converge vers $N^{(0)}$ presque sûrement. Soit $f^{(0)}$ la transformée de Stieltjes de $N^{(0)}$. Alors la mesure de comptage de $M_n^{(0)} + M_n$ converge presque sûrement vers la mesure de comptage non aléatoire N dont la transformée de Stieltjes f est solution de l'équation fonctionnelle [P1]

$$f(z) = f^{(0)}(z + w^2 f(z)).$$

Si $N_n^{(0)} = 0$, alors $f^0(z) = -1/z$ et nous retrouvons bien que

$$f(z) = -\frac{1}{z + w^2 f(z)},$$

qui est l'équation quadratique (3.22).

4.3. Ensemble de Wigner

Soit $M_n = n^{-1/2} W^{(n)}$, où $W^{(n)} = \{ W_{j,k}^{(n)} \}_{j,k=1}^{n}$ avec $W_{j,k}^{(n)} = W_{k,j}^{(n)}$ pour tous les indices $j, k = 1, \ldots, n$. Nous supposerons de plus que les variables aléatoires $W_{j,k}^{(n)}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $1 \leqslant j < k \leqslant n$ sont indépendantes, et que (*cf* (3.2))

$$\mathbf{E}_n[W_{j,k}^{(n)}] = 0, \ \mathbf{E}_n[(W_{j,k}^{(n)})^2] = \frac{(1 + \delta_{j,k})}{n} w^2 > 0.$$

Si les matrices $W_n^{(n)}$ vérifient la condition

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^{n} \int \mathbf{1}_{\{ |W| \geqslant \tau\sqrt{n} \}} W^2 P_n[W_{j,k}^{(n)} \in dW] = 0, \ \forall \tau > 0, \tag{4.2}$$

alors la mesure de comptage N_n converge en probabilité vers la loi du demi-cercle [P1, Gi]. La réciproque est aussi vraie [Gi]. La condition (4.2) est l'analogue matriciel de la condition de Lindeberg pour le théorème de la limite centrale des probabilités. Pour ce résultat et pour d'autres concernant l'ensemble de Wigner, voir [Gi, KKP].

4.4. Somme de matrices

Soient A_n et B_n deux matrices hermitiennes et U_n une matrice unitaire. Ces matrices sont toutes de taille $n \times n$. Supposons que les mesures de comptage normalisées de A_n et de B_n tendent lorsque n tend vers l'infini vers deux mesures N^A et N^B.

Nous pouvons nous poser la question suivante : quelle est à la limite la mesure de comptage $A_n + U_n B_n U_n^*$ sous la condition que U_n est aléatoire et uniformément distribuée sur $\mathcal{U}_n$ muni de la mesure de Haar de $U(n)$ et que les matrices A_n et B_n ne sont pas aléatoires (ou sont aléatoires et indépendantes de U_n) ?

Les résultats qui suivent sont détaillés dans [PV, Sp, VDN, Vo].

Soient N^{A_n} et N^{B_n} les mesures de comptage normalisées de A_n et de B_n. Supposons que

$$\sup_n \int |\lambda| N^{A_n}(\mathrm{d}\lambda) < \infty, \quad \sup_n \int |\lambda| N^{B_n}(\mathrm{d}\lambda) < \infty.$$

Notons f^A et f^B les transformées de Stieltjes des mesures de comptages normalisées N^A et N^B. Alors la transformée de Stieltjes de la mesure de comptage normalisée de $A_n + U_n B_n U_n^*$ converge en probabilité vers une fonction de Nevanlinna f (voir la proposition 6), vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} f(z) = f^A\left(z - \dfrac{\Delta_2(z)}{f(z)}\right), \\ f(z) = f^B\left(z - \dfrac{\Delta_1(z)}{f(z)}\right), \\ \Delta_1(z) + \Delta_2(z) - zf(z) = 1, \end{cases} \tag{4.3}$$

où les fonctions f, Δ_1 et Δ_2 sont analytiques et vérifient de plus

$$\mathfrak{Im}\, f(z) \cdot \mathfrak{Im}\, z > 0,\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ et } \lim_{y \to +\infty} y f(iy) = 1,$$
$$\Delta_1(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} 0 \text{ et } \Delta_2(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} 0.$$

En fait,

$$\Delta_1(z) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{E}_n \left[\frac{1}{n} \operatorname{Tr}(A_n G(z))\right] \text{ et } \Delta_2(z) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{E}_n \left[\frac{1}{n} \operatorname{Tr}(B_n G(z))\right],$$

où G est la résolvante de $A_n + U_n B_n U_n^*$.

Nous avons vu dans la démonstration de la loi du demi-cercle (théorème 4), que la spécificité de l'ensemble gaussien orthogonal n'intervenait que dans la proposition 9, qui donne un résultat de différentiation. Pour démontrer que f est solution de (4.3), il faut alors utiliser à la place de l'équation (3.9) de la proposition 9 la formule de différentiation [PV]

$$\int_{\mathcal{U}_n} \Phi'(UAU^*) U(XA - AX) U^* \,\mathrm{d}U = 0,\ \forall A, X \in \mathcal{H}_n,$$

pour toute fonction Φ de l'espace des matrices hermitiennes de taille $n \times n$ à valeurs dans l'espace $\mathbb{C}$ qui soit bornée et différentiable. Pour démontrer cette formule, il suffit de remplacer U par $Ue^{i\varepsilon X}$ et de différencier par rapport à ε.

Le système (4.3) peut aussi s'interpréter de la façon suivante. Soit N une mesure de probabilités à support compact et f sa transformée de Stieltjes. Cette fonction f peut s'écrire

$$f(z) = -\frac{1}{z + \Sigma(z)}. \tag{4.4}$$

Dans ce cas, $\Sigma(z)$ est aussi une fonction de Nevanlinna dont la mesure associé a pour masse totale $\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 N(\mathrm{d}\lambda)$. Comme $f(z) = -z^{-1}(1 + O(1/z))$ quand $z \to +\infty$, f est alors inversible au voisinage de l'infini. Soit $z(f)$ cette inverse, qui est analytique au voisinage de 0, et $R(f) = \Sigma(z(f))$. Cette fonction R est appelée *R-transformée* de la mesure N [VDN].

Revenons au cas $A_n + U_n B_n U_n^*$. Le système (4.3) et la formule (4.4) impliquent que si R^A et R^B sont les R-transformées des mesures de comptage N^A et N^B et si R^{A+B} est la R-transformée de la limite de la mesure de comptage normalisée associée à $A_n + U_n B_n U_n^*$, alors

$$R^{A+B}(f) = R^A(f) + R^B(f). \tag{4.5}$$

Si nous pensons à deux variables aléatoires ξ_1 et ξ_2 indépendantes, alors la loi de leur somme est donnée par la convolutions des lois de ces variables aléatoires. Maintenant, si $\chi_k(\lambda) = \mathbf{E}\left[e^{i\lambda\xi_k}\right]$ sont les fonctions caractéristiques de ξ_k pour $k = 1, 2$, la fonction caractéristique χ_{1+2} de $\xi_1 + \xi_2$ vérifie $\chi_{1+2} = \chi_1\chi_2$, et donc $\log\chi_{1+2} = \log\chi_1 + \log\chi_2$. Nous pouvons donc voir la relation (4.5) comme un équivalent non-commutatif de cette dernière relation.

On peut ainsi travailler sur la « somme » d'un nombre arbitraire de matrices aléatoires. Ce qui amène à se poser les questions suivantes : y a-t-il un équivalent

- du théorème de la limite centrale ?
- de la formule de Lévy-Khintchine ?

etc. Ces questions sont les objets de la théorie des *probabilités libres.* Il s'agit d'une généralisation non-commutative de la théorie conventionnelle des probabilités liée à plusieurs problèmes intéressants de la théorie des algèbres d'opérateurs, de combinatoire, d'analyse harmonique (voir [VDN, Vo]).

5. Ensembles invariants

Les ensembles invariants sont tels que la loi correspondante est invariante par rapport à l'application $M_n \mapsto U_n^* M_n U_n$, où U_n est unitaire ($\beta = 2$) ou orthogonale ($\beta = 1$). Ainsi, la loi d'un ensemble invariant ne dépend en fait que des valeurs propres $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ des matrices. Ainsi, si $\mathbf{P}_{n,\beta}$ est une telle loi sur les matrices de taille $n \times n$ ayant une densité $\tilde{q}_{n,\beta}$:

$$\mathbf{P}_{n,\beta}(\mathrm{d}_\beta M) = \tilde{q}_{n,\beta}(M)\,\mathrm{d}_\beta M$$

et $\mathrm{d}_\beta M$ pour $\beta = 1$ ou 2 est donnée par (2.2) ou (2.3), alors cette densité peut se réécrire comme

$$\tilde{q}_{n,\beta}(M) = q_{n,\beta}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

On étudie dans ce paragraphe les ensembles sur les matrices de taille $n \times n$ dont la probabilité a pour densité

$$\tilde{q}_{n,\beta}(M) = \frac{1}{Z_{n,\beta}} \exp\left(-n \operatorname{Tr} V(M)\right) = \frac{1}{Z_{n,\beta}} \exp\left(-n \sum_{\ell=1}^{n} V(\lambda_\ell)\right), \tag{5.1}$$

où $Z_{n,\beta}$ est une constante de normalisation, et V est un polynôme de degré pair et tendant vers $+\infty$ à l'infini. Cette classe d'ensembles est connue sous le nom de *modèles matriciels* (*matrix models*).

Le cas le plus simple est

$$V(\lambda) = \frac{\lambda^2}{4w^2},$$

qui correspond à l'ensemble gaussien orthogonal (EGO) ou unitaire (EGU) (voir (2.4)).

Un deuxième cas, qui conduit à des résultats différents est donné par

$$V(\lambda) = \frac{\lambda^4}{4} + a\frac{\lambda^2}{2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Théorème 14. *Soit $\mathcal{E}_n$ un ensemble orthogonalement ou unitairement invariant de la forme* (5.1) *pour un polynôme V. Soit $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres d'une matrice M rangées par ordre croissant : $-\infty < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n < +\infty$. Alors la densité de la loi jointe de Λ est*

$$q_{n,\beta}(\Lambda)\,\mathrm{d}\Lambda = \frac{1}{Q_{n,\beta}} \exp\left(-n\sum_{\ell=1}^{n} V(\lambda_\ell)\right) \times |\Delta(\Lambda)|^\beta\,\mathrm{d}\Lambda,$$

où

$$\Delta(\Lambda) = \prod_{j<k}(\lambda_j - \lambda_k),$$

avec $\beta = 1$ dans le cas d'un ensemble orthogonalement invariant, $\beta = 2$ pour un ensemble unitairement invariant et $\mathrm{d}\Lambda = (\mathrm{d}\lambda_1, \ldots, \mathrm{d}\lambda_n)$.

Démonstration. Travaillons tout d'abord sur un ensemble orthogonalement invariant ($\beta = 1$). D'après le théorème spectral pour les matrices symétriques réelles,

$$M_{j,k} = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell \psi_{\ell,j}\psi_{\ell,k}, \tag{5.2}$$

où, pour $\ell = 1, \ldots, n$, $\psi_\ell = \{\psi_{\ell,k}\}_{k=1}^{n}$ sont les vecteurs propres de M. Il est par ailleurs possible de choisir ces vecteurs propres de façon à ce que leurs premières composantes non nulles soient positives.

La matrice $\Psi = \{\psi_{\ell,k}\}_{\ell,k=1}^{n}$ est orthogonale, et $\Psi^{-1}M\Psi$ est une matrice diagonale Λ, que l'on peut, à un arrangement près des colonnes de Ψ, choisir égale à $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Si nous notons $\mathrm{d}\Psi$ la mesure de Haar sur le groupe des matrices orthogonales, alors nous pouvons écrire

$$\frac{1}{Z_{n,1}} e^{-n\,\mathrm{Tr}\,V(M)}\,\mathrm{d}_1 M = \frac{1}{Z_{n,1}} e^{-n\sum_{\ell=1}^{n} V(\lambda_\ell)}\,\mathrm{Jac}\,\frac{\partial M}{\partial\Lambda\partial\Psi}\,\mathrm{d}\Lambda\,\mathrm{d}\Psi,$$

où $\mathrm{Jac}\,\dfrac{\partial M}{\partial\Lambda\partial\Psi}$ est une notation pour le jacobien du changement de variables.

Le groupe $\mathcal{O}(n)$ des matrices orthogonales est un ensemble à $n(n-1)/2$ paramètres, donc la matrice $\dfrac{\partial M}{\partial\Lambda\partial\Psi}$ peut s'écrire

$$\frac{\partial M}{\partial\Lambda\partial\Psi} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial M}{\partial\Lambda} \text{ ne dépend pas de } \lambda \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial M}{\partial\Psi} \text{ est linéaire en } \lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} n \text{ lignes} \\ \\ \dfrac{n(n-1)}{2} \text{ lignes} \end{array}$$

car (5.2) est linéaire en Λ. Le déterminant de $\dfrac{\partial M}{\partial\Lambda\partial\Psi}$ est un polynôme homogène en Λ de degré $n(n-1)/2$. De plus, ce polynôme est nul dès que $\lambda_j = \lambda_k$ pour deux indices j, k différents. Il contient donc le facteur $\prod_{j<k}(\lambda_j - \lambda_k)^{\alpha_{j,k}}$ pour des entiers $\alpha_{j,k} \geqslant 1$, mais son degré est au plus $n(n-1)/2$, donc $\alpha_{j,k} = 1$ pour tout $j, k = 1, \ldots, n$. Ainsi,

$$\operatorname{Jac}\frac{\partial M}{\partial\Lambda\partial\Psi} = \Delta(\lambda)C_n(\Psi)$$

pour une fonction C_n qu'il n'est pas utile d'expliciter si on utilise la mesure de Haar et la normalisation Q_n.

Pour un ensemble gaussien unitairement invariant ($\beta = 2$), l'idée de la démonstration reste la même (voir [Me, Mu, TW]). ∎

À partir de maintenant, nous travaillerons avec l'EGU, l'ensemble gaussien unitairement invariant.

Rappels (Polynômes orthogonaux (voir [Sz])**).** Soit $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive et telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^k w(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda < +\infty \text{ pour tout } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Une telle fonction s'appelle un *poids* du produit scalaire $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x$. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, w(x)\mathrm{d}x)$ appliqué aux fonctions $\lambda \mapsto \lambda^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ donne une famille de polynômes $\{\,P_\ell(\lambda)\,\}_{\ell=0}^{\infty}$ tels que

(i) $P_\ell(\lambda)$ est un polynôme de degré ℓ : $P_\ell(\lambda) = \gamma_\ell\lambda^\ell + \cdots$ avec $\gamma_\ell > 0$;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} P_\ell(\lambda)P_k(\lambda)w(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \delta_{\ell,k}$ pour $\ell, k = 0, 1, 2, \ldots$.

Ces polynômes orthonormés vérifient la relation de récurrence

$$\lambda P_\ell(\lambda) = r_\ell P_{\ell+1}(\lambda) + s_\ell P_\ell(\lambda) + r_{\ell-1}P_{\ell-1}(\lambda) \tag{5.3}$$

pour $\ell = 0, 1, \ldots$ et avec $r_{-1} = 0$. Posons $\psi_\ell(\lambda) = \sqrt{w(\lambda)}P_\ell(\lambda)$ de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_\ell(\lambda)\psi_k(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \delta_{i,j}.$$

La fonction

$$K_n(\lambda, \mu) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \psi_\ell(\lambda)\psi_\ell(\mu) \tag{5.4}$$

est le *noyau reproduisant* du système $\{\,\psi_\ell\,\}_{\ell=0}^{\infty}$. Il vérifie les relations :

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} K_n(\lambda, \lambda)\,\mathrm{d}\lambda = n$;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} K_n(\lambda, \mu)K_n(\mu, \nu)\,\mathrm{d}\mu = K_n(\lambda, \nu)$ pour tout $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$;

(iii) pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$,

$$K_n(\lambda, \mu) = r_{n-1} \frac{\psi_n(\lambda)\psi_{n-1}(\mu) - \psi_{n-1}(\lambda)\psi_n(\mu)}{(\lambda - \mu)}. \tag{5.5}$$

Cette formule (5.5) est la *formule de Christoffel-Darboux.*

Théorème 15. *Soit $\mathcal{H}_n$ l'ensemble unitairement invariant défini par un polynôme V (cf (5.1)), et $\{ P_\ell^{(n)} \}_{\ell=0}^\infty$ le système de polynômes orthonormaux définis par rapport au poids $w_n(\lambda) = \exp(-nV(\lambda))$. Alors*

(i) *La densité $p_n^{(2)}$ de la loi jointe des valeurs propres restreinte aux fonctions symétriques de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est*

$$p_n^{(2)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{1}{n!} \left(\det\{ \psi_{j-1}^{(n)}(\lambda_k) \}_{j,k=1}^n \right)^2,$$

où

$$\psi_\ell^{(n)}(\lambda) = \exp^{-\frac{n}{2}V(\lambda)} P_\ell^{(n)}(\lambda), \tag{5.6}$$

i.e., si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction symétrique sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\mathbf{E}_n [f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)] = \int_{\mathbb{R}^N} f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) p_n^{(2)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \, \mathrm{d}\lambda_1 \cdots \mathrm{d}\lambda_n ;$$

(ii) *Si N_n est la mesure de comptage normalisée d'ensemble (voir définition 2), alors*

$$\overline{N}_n(\Delta) = \mathbf{E}_n [N_n(\Delta)] = \int_\Delta \rho_n(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda \tag{5.7}$$

avec

$$\rho_n(\lambda) = \frac{1}{n} K_n(\lambda, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} (\psi_\ell^{(n)}(\lambda))^2, \tag{5.8}$$

ou

$$\rho_n(\lambda) = \frac{r_{n-1}^{(n)}}{n} \left[\psi_n^{(n)}(\lambda)' \psi_{n-1}^{(n)}(\lambda) - \psi_n^{(n)}(\lambda) \psi_{n-1}^{(n)}(\lambda)' \right] ; \tag{5.9}$$

oú $r_{n-1}^{(n)}$ est le coefficient du polynôme $P_{n-1}^{(n)}$ dans la relation de récurrence

$$P_\ell^{(n)}(\lambda) = r_\ell^{(n)} P_{\ell+1}^{(n)}(\lambda) + s_\ell^{(n)} P_\ell^{(n)}(\lambda) + r_{\ell-1}^{(n)} P_{\ell-1}^{(n)}(\lambda) \tag{5.10}$$

pour $\ell = n$ (cf (5.3)).

(iii) *Soit ℓ un entier compris entre* 1 *et n. Notons la loi marginale de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ par*

$$p_{n,\ell}(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) = \int_{\mathbb{R}^{n-\ell}} p_n^{(2)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell, \lambda_{\ell+1}, \ldots, \lambda_n) \, \mathrm{d}\lambda_{\ell+1} \cdots \mathrm{d}\lambda_n, \tag{5.11}$$

et posons

$$R_{n,\ell} = \frac{n!}{(n-\ell)!} p_{n,\ell}(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell). \tag{5.12}$$

Cette fonction $R_{n,\ell}$ s'appelle la fonction de corrélation. *Alors*

$$R_{n,\ell}(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) = \det\{ K_n(\lambda_j, \lambda_k) \}_{j,k=1}^\ell ; \tag{5.13}$$

(iv) *La variance d'une statistique linéaire définie par* (2.6) *vérifie*

$$\mathbf{Var}[N_n(\varphi)] = \frac{1}{2n^2}\int_{\mathbb{R}^2}(\varphi(\lambda)-\varphi(\mu))^2 K_n^2(\lambda,\mu)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu. \tag{5.14}$$

Rappels (Déterminant de Fredholm). Soit Q un opérateur intégral de noyau continu q défini sur $D\times D$, *i.e.*, $Qf(\lambda)=\int_D q(\lambda,\mu)f(\mu)\,\mathrm{d}\mu$, où D est un compact de $\mathbb{R}$. Alors le *déterminant de Fredholm* de Q, noté $\det(I-Q)$ est défini par

$$\det(I-Q) = 1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\int_{D^m}\begin{vmatrix} q(\lambda_1,\lambda_1) & \cdots & q(\lambda_1,\lambda_m)\\ \vdots & & \vdots\\ q(\lambda_m,\lambda_1) & \cdots & q(\lambda_m,\lambda_m)\end{vmatrix}\mathrm{d}\lambda_1\cdots\mathrm{d}\lambda_m. \tag{5.15}$$

Théorème 16. *Soit* $E_n^{(2)}(\Delta)=\mathbf{P}_n\left[N_n(\Delta)=0\right]$ *la probabilité de trou pour l'ensemble* (5.1) *avec* $\beta=2$. *Alors*

$$E_n^{(2)}(\Delta)=\det(I-K_n(\Delta)), \tag{5.16}$$

où $K_n(\Delta)$ *est l'opérateur intégral sur* Δ *défini par le noyau* $K_n(\lambda,\mu)$, *i.e.*,

$$(K_n(\Delta)f)(\lambda)=\int_\Delta K_n(\lambda,\mu)f(\mu)\,\mathrm{d}\mu,\quad \lambda\in\Delta.$$

Ces deux théorèmes sont vrais pour les ensembles *unitairement invariants.* Pour les ensembles orthogonalement invariants, les résultats sont moins bons (voir [Mu, Me, P4]).

Démonstration du théorème 15. D'après le théorème 14,

$$p_n^{(2)}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\frac{1}{Q_{n,2}n!}\exp\left(-n\sum_{\ell=1}^{n}V(\lambda_\ell)\right)\prod_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n}(\lambda_j-\lambda_k)^2.$$

Mais

$$\Delta(\Lambda)=\prod_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n}(\lambda_j-\lambda_k)=\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1\\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{\prod_{\ell=0}^{n-1}\gamma_\ell}\det\{P_{j-1}^{(n)}(\lambda_k)\}_{j,k=1}^{n},$$

où $\gamma_\ell^{(n)}$ est le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme $P_\ell^{(n)}$. Ainsi,

$$p_n^{(2)}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\frac{1}{Q_{n,2}n!\left(\prod_{\ell=0}^{n-1}\gamma_\ell^{(n)}\right)^2}\left(\det\{\psi_{j-1}^{(n)}(\lambda_k)\}_{j,k=1}^{n}\right)^2.$$

Il reste maintenant à calculer la constante de normalisation. Nous allons utiliser le résultat suivant. Soit $\{f_\ell\}_{\ell=1}^n$ et $\{g_\ell\}_{\ell=1}^n$ deux ensembles de fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n}\det\{f_\ell(\lambda_m)\}_{\ell,m=1}^n\det\{g_\ell(\lambda_m)\}_{\ell,m=1}^n\,\mathrm{d}\lambda_1\cdots\mathrm{d}\lambda_n=n!\det\{(f_\ell,g_m)\}_{\ell,m=1}^n, \tag{5.17}$$

où (f,g) désigne le produit scalaire

$$(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Ce résultat, connu comme le *théorème de Gram*, découle du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt [CH]. En prenant $f_\ell = g_\ell = \psi_\ell^{(n)}$, on obtient bien que $Q_n\left(\prod_{\ell=0}^{n-1}\gamma_\ell\right)^2 = 1$, et le point (i) est démontré.

Maintenant, par symétrie,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_n\left[N_n(\Delta)\right] &= \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\mathbf{E}_n\left[\mathbf{1}_\Delta(\lambda_n)\right] = \mathbf{E}_n\left[\mathbf{1}_\Delta(\lambda_1)\right] \\
&= \int_\Delta \mathrm{d}\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} p_n^{(2)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\,\mathrm{d}\lambda_2\cdots\mathrm{d}\lambda_n \\
&= \frac{1}{n!}\int_\Delta \mathrm{d}\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\det\{\,\psi_{j-1}^{(n)}(\lambda_k)\,\}_{j,k=1}^n\right)^2 \mathrm{d}\lambda_2\cdots\mathrm{d}\lambda_n.
\end{aligned}$$

Mais

$$\det\{\,\psi_{j-1}^{(n)}(\lambda_k)\,\}_{j,k=1}^n = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+1}\psi_j^{(n)}(\lambda_1)\Psi_j^{(n)}(\lambda_2,\ldots,\lambda_n), \tag{5.18}$$

où

$$\Psi_j^{(n)}(\lambda_2,\ldots,\lambda_n) = \det\{\,\psi_k^{(n)}(\lambda_m)\,\}_{k=1,\ldots,n;k\neq j;m=2,\ldots,n}.$$

En utilisant encore le théorème de Gram (5.17), nous vérifions que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Psi_{j_1}^{(n)}(\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\Psi_{j_2}^{(n)}(\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\,\mathrm{d}\lambda_2\cdots\mathrm{d}\lambda_n = \delta_{j_1,j_2}(n-1)!.$$

Donc

$$\mathbf{E}_n\left[N_n(\Delta)\right] = \int_\Delta \left(n^{-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}(\psi_\ell^{(n)}(\lambda))^2\right)\mathrm{d}\lambda,$$

ce qui achève la démonstration de (5.8).

La démonstration de (5.9) utilise (5.8) et la formule de Christoffel-Darboux (5.5) pour $\lambda = \mu$.

Pour démontrer (iii) pour $\ell > 1$, on utilise la même idée et le théorème de Laplace au lieu de (5.18) pour développer $\det\{\,\psi_{j-1}^{(n)}(\lambda_k)\,\}_{j,k=1}^n$ (voir aussi [Me]).

Pour (iv), on remarque d'abord que

$$\mathbf{E}_n\left[N_n(\varphi)\right] = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda_1)K_n(\lambda_1,\lambda_1)\,\mathrm{d}\lambda_1,$$

(*cf* (5.7) et (5.8)), et que, d'après (5.11) et (5.13), on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_n\left[N_n^2(\varphi)\right] &= \frac{1}{n}\mathbf{E}_n\left[\varphi^2(\lambda_1)\right] + \frac{n(n-1)}{n^2}\mathbf{E}_n\left[\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_2)\right] \\
&= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} \varphi^2(\lambda_1)K_n(\lambda_1,\lambda_1)\,\mathrm{d}\lambda_1 + \frac{1}{n^2}\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_2)K_n^2(\lambda_1,\lambda_2)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{Var}[N_n(\varphi)] = \mathbf{E}_n\left[N_n^2(\varphi)\right] - \mathbf{E}_n\left[N_n(\varphi)\right]^2$, la formule (5.14) est vérifiée. ∎

Démonstration du théorème 16. Utilisons le théorème 15(iii) :

$$E_n^{(2)}(\Delta) = \mathbf{P}_n\left[\lambda_\ell \notin \Delta \text{pour } \ell = 1, \dots, n\right] = \mathbf{E}\left[\prod_{\ell=1}^{n}(1 - \mathbf{1}_\Delta(\lambda_\ell))\right]$$

$$\overset{\text{par symétrie}}{=} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{\ell!(n-\ell!)}$$

$$\times \int_{\Delta^\ell} \mathrm{d}\lambda_1 \cdots \mathrm{d}\lambda_\ell \int_{\mathbb{R}^{n-\ell}} p_n^{(2)}(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell, \lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_n) \mathrm{d}\lambda_{\ell+1} \cdots \mathrm{d}\lambda_n$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \int_{\Delta^\ell} R_{n,\ell}(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)\, \mathrm{d}\lambda_1 \cdots \mathrm{d}\lambda_\ell$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \int_{\Delta^\ell} \det\{K_n(\lambda_j, \lambda_k)\}_{j,k=1}^{\ell}\, \mathrm{d}\lambda_1 \cdots \mathrm{d}\lambda_\ell.$$

D'après (5.15) c'est le déterminant de Fredholm de $(I - K_n(\Delta))$. Le théorème 16 est ainsi démontré. ∎

L'usage efficace de ce formalisme a besoin de formules asymptotiques pour les polynômes orthogonaux $P_\ell^{(n)}$ pour $\ell \sim n$ (voir *e.g.*, [DK⁺]). Mais certains résultats peuvent être déduits des formules elles-mêmes, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 17. *Soit $N_n(\varphi)$ une statistique linéaire* (2.6) *pour une fonction φ bornée. Alors*

(i) $\mathbf{Var}[N_n(\varphi)] \leqslant \dfrac{2}{n}(\operatorname{ess\,sup}_{\lambda\in\mathbb{R}} |\varphi(\lambda)|)^2$;

(ii) *Si φ est lipschitzienne de constante C, alors*

$$\mathbf{Var}[N_n(\varphi)] \leqslant \frac{C^2}{n^2}(r_{n-1}^{(n)})^2.$$

Démonstration. D'après le théorème 15(iv) et la propriété d'orthogonalité (ii) des noyaux reproduisants, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}[N_n(\varphi)] &= \frac{1}{2n^2} \iint_{\mathbb{R}^2} (\varphi(\lambda) - \varphi(\mu))^2 K_n^2(\lambda, \mu)\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\mu \\
&\leqslant \frac{(2\,\|\varphi\|_\infty)^2}{2n^2} \iint_{\mathbb{R}^2} K_n^2(\lambda, \mu)\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\mu \\
&= \frac{2\,\|\varphi\|_\infty^2}{n^2} \int_{\mathbb{R}} K_n(\lambda, \lambda)\, \mathrm{d}\lambda = \frac{2\,\|\varphi\|_\infty^2}{n^2} n = \frac{2\,\|\varphi\|_\infty^2}{n},
\end{aligned}$$

ce qui démontre (i).

Pour l'assertion (ii), la formule de Christoffel-Darboux (5.5) et le caractère orthonormé des fonctions $\psi_\ell^{(n)}$ impliquent que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Var}[N_n(\varphi)] \leqslant \frac{C^2}{2n^2} \iint_{\mathbb{R}^2} (\lambda - \mu)^2 K_n^2(\lambda, \mu)\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\mu \\
&= \frac{C^2 (r_n^{(n-1)})^2}{2n^2} \iint_{\mathbb{R}^2} (\psi_n^{(n)}(\lambda)\psi_{n-1}^{(n)}(\mu) - \psi_{n-1}^{(n)}(\lambda)\psi_n^{(n)}(\mu))^2\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\mu = \frac{C^2 (r_{n-1}^{(n)})^2}{n^2}, \quad (5.19)
\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration du théorème. ∎

Les coefficients $r_{n-1}^{(n)}$ sont généralement bornés en n (voir [PS]) et on obtient donc une majoration en $1/n^2$ de la variance $\mathbf{Var}[N_n(\varphi)]$ (*cf* le lemme 12).

Proposition 18. *Si $\mathcal{E}_n$ est l'EGU, alors les polynômes orthogonaux $P_\ell^{(n)}$ se déduisent des polynômes d'Hermite $\{h_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ — qui forment une base orthonormale pour le produit scalaire $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ — par la relation*

$$P_\ell^{(n)}(\lambda) = \frac{n^{1/4}}{\sqrt{2w}} h_\ell\left(\frac{\sqrt{n}}{2w}\lambda\right). \tag{5.20}$$

En particulier, le coefficient du polynôme $P_{l-1}^{(n)}$ dans la relation de récurrence (5.10) *est*

$$r_{\ell-1}^{(n)} = w\sqrt{2\ell/n}. \tag{5.21}$$

Démonstration. Comme

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} h_\ell(x)h_m(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{\ell,m}, \tag{5.22}$$

le changement de variable $x = \sqrt{n}\lambda/2w$ implique que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{n\lambda^2}{4w^2}} h_\ell\left(\frac{\sqrt{n}}{2w}\lambda\right) h_m\left(\frac{\sqrt{n}}{2w}\lambda\right) \frac{\sqrt{n}}{2w}\,\mathrm{d}\lambda = \delta_{\ell,m}, \tag{5.23}$$

d'où (5.20).

De plus, on déduit de la relation (voir [Sz])

$$\sqrt{\frac{\ell+1}{2}}h_{\ell+1}(x) + \sqrt{\frac{\ell}{2}}h_{\ell-1}(x) = xh_\ell(x)$$

que $r_{\ell-1}^{(n)} = w\sqrt{2\ell/n}$. ∎

Corollaire 19. *Pour l'EGU, on obtient l'inégalité*

$$\mathbf{Var}[N_n(\varphi)] \leqslant \frac{2w^2}{n^2|\Im\mathrm{m}\, z|^4},$$

pour $\varphi(\lambda) = (\lambda - z)^{-1}$, $\Im\mathrm{m}\, z \neq 0$.

Remarque 20. Comme $N_n((\cdot - z)^{-1}) = n^{-1}\operatorname{Tr}(M - z)^{-1} = g_n(z)$, on a ainsi obtenu une nouvelle démonstration de l'estimation de la variance de $g_n(z)$ du type (3.15), maintenant pour tout z tel que $\Im\mathrm{m}\, z \neq 0$.

Démonstration. D'après le théorème 17 et (5.21),

$$\mathbf{Var}[N_n(\varphi)] \leqslant \frac{C^2}{n^2} \underbrace{(r_{n-1}^{(n)})^2}_{\leqslant 2w^2} \leqslant \frac{2w^2}{n^2}C^2,$$

où C est la constante de Lipschitz de φ, qui est égale à $|\Im\mathrm{m}\, z|^{-2}$ pour $\varphi = (\lambda - z)^{-1}$. ∎

Proposition 21 (Formules asymptotiques de Plancherel-Rotah). *Soit $\psi_\ell(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} h_\ell(x)$. Alors*

(i) *Si* $x = \sqrt{2\ell+1}\cos\theta$, *on a uniformément en* $0 < \varepsilon \leqslant |\theta| \leqslant \pi - \varepsilon$,

$$\psi_\ell(x) = \left(\frac{2}{\ell}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\pi \sin\theta}} \left[\cos\left(\frac{2\ell+1}{4}(\sin 2\theta - 2\theta) + \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\ell}\right)\right], \ \ell \to \infty;$$

(ii) *Si* $x = \pm\sqrt{2\ell+1}\,\mathrm{ch}\,\theta$, *on a uniformément en* $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant 1/\varepsilon$,

$$\psi_\ell(x) = \frac{1}{(2\ell)^{1/4}\sqrt{\pi\,\mathrm{sh}\,\theta}} \exp\left[-\frac{2\ell+1}{4}(\mathrm{sh}\,2\theta - 2\theta)\right]\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\ell}\right)\right), \ \ell \to \infty;$$

(iii) *Si* $x = \pm\sqrt{2\ell+1} \pm 2^{-1/2}\ell^{-1/6}s$, *on a uniformément en* s *dans un compact de* $\mathbb{C}$,

$$\psi_\ell(x) = 2^{1/4}\ell^{-1/12}(\mathrm{Ai}\,(s) + \mathrm{O}(\ell^{-3/4})), \ \ell \to \infty,$$

où Ai *est la* fonction d'Airy, *c'est-à-dire la solution de l'équation différentielle*

$$y'' - xy = 0 \text{ telle que } y(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Démonstration. Voir [Sz], théorème 8.22.9. ∎

Le théorème suivant se démontre en utilisant ces formules.

Théorème 22. *Soit* $\mathcal{H}_n$ *l'EGU,* N_n *sa mesure de comptage normalisée et* ρ_n *la densité de la mesure* $\mathbf{E}\,[N_n]$. *Alors*

(i) *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *la fonction* $\rho_n(\lambda)$ *tend vers la densité de la loi du demi-cercle* (3.23) *de l'EGU*

$$\rho^{(2)}(\lambda) = \frac{1}{4\pi w^2}(8w^2 - \lambda^2)_+^{1/2}$$

uniformément sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\sqrt{2}w, 2\sqrt{2}w\}$;

(ii) *Pour toute fonction* φ *bornée et de classe* C^2,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^2 \mathbf{Var}[N_n(\varphi)] \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-2\sqrt{2}w^2}^{2\sqrt{2}w^2} \mathrm{d}\lambda \int_{2\sqrt{2}w^2}^{2\sqrt{2}w^2} \left(\frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)}{\lambda - \mu}\right)^2 \frac{8w^2 - \lambda\mu}{\sqrt{8w^2 - \lambda^2}\sqrt{8w^2 - \mu^2}}\,\mathrm{d}\mu &\quad (5.24)\\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-2\sqrt{2}w^2}^{2\sqrt{2}w^2} \frac{\varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{8w^2 - \lambda^2}} \int_{2\sqrt{2}w^2}^{2\sqrt{2}w^2 2} \frac{\varphi'(\mu)\sqrt{8w^2 - \mu^2}}{\mu - \lambda}\,\mathrm{d}\mu, &\quad (5.25)
\end{aligned}$$

(cf (3.25)*)* ;

(iii) *Soit* λ_0 *tel que* $\rho(\lambda_0) \neq 0$. *Alors*

$$\frac{1}{(n\rho_n(\lambda_0))^\ell} R_{n,\ell}\left(\lambda_0 + \frac{\xi_1}{n\rho_n(\lambda_0)}, \dots, \lambda_0 + \frac{\xi_\ell}{n\rho_n(\lambda_0)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \det\left\{\frac{\sin\pi(\xi_j - \xi_k)}{\pi(\xi_j - \xi_k)}\right\}_{j,k=1}^{\ell}$$

uniformément en $(\xi_1, \dots, \xi_\ell)$ *sur tous les compacts de* $\mathbb{R}^\ell$;

(iv) *La probabilité de trou* $E_n^{(2)}\left[\left(\lambda_0, \lambda_0 + \frac{s}{s\rho_n(\lambda_0)}\right)\right]$ *où* $E^{(2)}$ *est donné par* (5.16) *converge uniformément en* s *sur tous les compacts de* $\mathbb{R}$ *vers* $\det(I - Q_s^{(2)}) = E^{(2)}(s)$, *où* $Q_s^{(2)}$ *est un opérateur intégral défini sur* $[0, s]$ *par la formule*

$$(Q_s^{(2)}f)(\xi) = \int_0^s \frac{\sin(\pi-\eta)}{\pi(\xi-\eta)} f(\eta)\,\mathrm{d}\eta, \quad \xi \in [0,s];$$

(v) *Uniformément en* s *sur tout compact de* $\mathbb{R}$,

$$2^{1/2}wn^{1/3}\rho_n\left(2\sqrt{2}w + \sqrt{2}wn^{-2/3}s\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} r(s) \stackrel{\text{déf}}{=} -s(\mathrm{Ai}'(s))^2 + (\mathrm{Ai}(s))^2,$$

avec

$$r(s) = \begin{cases} \sqrt{\frac{|s|}{\pi}} - \frac{\cos(4|s|^{3/2})}{4\pi s} + \mathrm{O}(s^{-3/2}), & s \to -\infty, \\ \frac{17}{96\pi\sqrt{s}} e^{-\frac{4s^{3/2}}{3}}(1+\mathrm{o}(1)), & s \to +\infty. \end{cases}$$

Remarque 23. La convergence dans (i) est plus forte que la loi du demi-cercle du théorème 4, où l'on avait seulement la convergence étroite de N_n vers N.

Esquisse de la démonstration. On sait que les fonctions $\psi_\ell^{(n)}(x)$ sont bornées indépendamment de x et ℓ. Donc, d'après la formule (5.8), la proposition 18 et la proposition 21(i) on a pour $|\lambda| < 2\sqrt{2}w$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \rho_n(\lambda) &= \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} \psi_\ell^{(n)}(\lambda)^2 && (5.26) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{\leq 0\ell<\varepsilon n} \psi_\ell^{(n)}(\lambda)^2 + \sum_{(1-\varepsilon)n<\ell\leq n} \psi_\ell^{(n)}(\lambda)^2 + \sum_{\ell=\varepsilon n}^{(1-\varepsilon)n} \psi_\ell^{(n)}(\lambda)^2 \\ &= \mathrm{O}(\varepsilon) + \frac{1}{n}\sum_{\ell=\varepsilon n}^{(1-\varepsilon)n} \frac{1}{\pi w}\sqrt{\frac{n}{2\ell}} \cos^2\left(\ell\Gamma(\theta_{n,\ell}) + \gamma(\theta_{n,\ell})\right) \frac{1}{\sin\theta_{n,\ell}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right), \ n \to \infty, \end{aligned}$$

avec

$$\Gamma(\theta) = \sin 2\theta/2 - \theta, \quad \gamma(\theta) = \frac{1}{2}\Gamma(\theta) + \frac{\pi}{4},$$

et

$$\sqrt{n}\lambda/2w = \sqrt{2\ell+1}\cos\theta_{n,\ell}.$$

Comme $\cos\theta_{n,\ell} \simeq (2\sqrt{2}w)^{-1}\sqrt{n/\ell}$, on en déduit donc que on peut remplacer dans (5.26) $\cos^2\left(\ell\Gamma(\theta_{n,\ell}) + \gamma(\theta_{n,\ell})\right)$ par $1/2$, d'où

$$\rho_n(\lambda) \simeq \mathrm{O}(\varepsilon) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}w}\int_{\frac{\lambda^2}{8w^2}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t - \frac{\lambda^2}{8w^2}}}.$$

L'intégrale dans la dernière équivalence est une approximation de la somme dans l'expression (5.26) de ρ_n. D'où la loi du demi-cercle (i) pour $|\lambda| < 2\sqrt{2}w$. Si $|\lambda| > 2\sqrt{2}w$, on déduit de la proposition 21(ii) que $\lim_{n\to\infty}\rho_n(\lambda) = 0$.

Pour montrer (ii) on écrit, d'après le théorème 15(iv) et la formule de Christoffel-Darboux (5.5),

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}[N_n(\varphi)] = \frac{(r_{n-1}^{(n)})^2}{n^2} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \Phi^2(\lambda, \mu) \\ \times \Big((\psi_n^{(n)}(\lambda))^2 (\psi_{n-1}^{(n)}(\mu))^2 - \psi_n^{(n)}(\lambda)\psi_{n-1}^{(n)}(\lambda)\psi_n^{(n)}(\mu)\psi_{n-1}^{(n)}(\mu) \Big) \, \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}\mu, \quad (5.27)\end{aligned}$$

où

$$\Phi(\lambda, \mu) = \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)}{\lambda - \mu}.$$

D'après les propositions 18 et 21(ii), les contributions dans (5.27) des intégrales sur $|\lambda|, |\mu| > 2\sqrt{2}w$ tendent vers zéro lorsque $n \to \infty$. De plus, la proposition 21(i) implique la formule asymptotique pour $n \to \infty$

$$\begin{aligned}(\psi_n^{(n)}(\lambda))^2 &= \frac{1}{\sqrt{2w^2}\pi \sin \theta_{n,n}} \cos^2 (n\Gamma(\theta_{n,n}) + \gamma(\theta_{n,n})) + \mathrm{O}(1/n) \qquad (5.28) \\ &= d(\lambda) \, (1 + \cos(2n\Gamma(\theta_{n,n}) + 2\gamma(\theta_{n,n}))) + \mathrm{O}(1/n),\end{aligned}$$

où $d(\lambda) = \left(\pi\sqrt{8w^2 - \lambda^2}\right)^{-1}$, et la formule correspondante pour $(\psi_{n-1}^{(n)}(\mu))^2$. Comme $\Phi(\lambda, \mu)$ est continue, les contributions dans (5.27) des termes de (5.28) contenant

$$\cos (2n\Gamma(\theta_{n,n}) + 2\gamma(\theta_{n,n})) \;\text{ et }\; \cos (2(n-1)\Gamma(\theta_{n,n-1}) + 2\gamma(\theta_{n,n-1}))$$

tendent vers zéro lorsque $n \to \infty$. On peut donc remplacer $(\psi_n^{(n)}(\lambda))^2$ et $(\psi_{n-1}^{(n)}(\mu))^2$ dans (5.27) par $d(\lambda)$ et $d(\mu)$. De même, d'après la proposition 21(i),

$$\begin{aligned}&\psi_n^{(n)}(\lambda)\psi_{n-1}^{(n)}(\lambda) \\ &\quad = d(\lambda) \Big[\cos(n(\Gamma(\theta_{n,n}) - \Gamma(\theta_{n,n-1})) + \Gamma(\theta_{n,n-1}) + \gamma(\theta_{n,n}) - \gamma(\theta_{n,n-1})) \\ &\qquad + \cos(n(\Gamma(\theta_{n,n}) + \Gamma(\theta_{n,n-1})) - \Gamma(\theta_{n,n-1}) + \gamma(\theta_{n,n}) + \gamma(\theta_{n,n-1})) \Big] \\ &\qquad\qquad + \mathrm{O}(1/n), \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

À nouveau, les contributions dans (5.27) des termes contenant

$$\cos (n(\Gamma(\theta_{n,n}) + \Gamma(\theta_{n,n-1})) - \Gamma(\theta_{n,n-1}) + \gamma(\theta_{n,n}) + \gamma(\theta_{n,n-1}))$$

tendent vers zéro lorsque $n \to \infty$, parce que $\Phi(\lambda, \mu)$ est continue. De plus, en posant $\lambda = 2\sqrt{2}w \cos \theta$, on obtient pour $n \to \infty$

$$\begin{aligned}n(\Gamma(\theta_{n,n}) - \Gamma(\theta_{n,n-1})) &= -\sin 2\theta/2 + \mathrm{o}(1), \\ \Gamma(\theta_{n,n-1}) &= \sin 2\theta/2 - \theta + \mathrm{o}(1), \\ \gamma(\theta_{n,n}) - \gamma(\theta_{n,n-1}) &= \mathrm{o}(1).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}&\cos (n(\Gamma(\theta_{n,n}) - \Gamma(\theta_{n,n-1})) + \Gamma(\theta_{n,n-1}) + \gamma(\theta_{n,n}) - \gamma(\theta_{n,n-1})) \\ &\qquad = \cos \theta + \mathrm{o}(1) = \lambda/2\sqrt{2}w + \mathrm{o}(1), \; n \to \infty.\end{aligned}$$

Donc on peut remplacer le terme $\psi_n^{(n)}(\lambda)\psi_{n-1}^{(n)}(\lambda)\psi_n^{(n)}(\mu)\psi_{n-1}^{(n)}(\mu)$ dans (5.27) par le terme $d(\lambda)d(\mu)\lambda\mu/8w^2$.

Pour obtenir (5.25) on utilise l'identité

$$\frac{1}{(\lambda-\mu)^2\sqrt{8w^2-\lambda^2}\sqrt{8w^2-\mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{8w^2-\lambda^2}}\frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\sqrt{8w^2-\mu^2}}{\lambda-\mu}.$$

Un cas plus général est traité dans [Jo].

Pour (iii), similairement, si $\lambda_0 \in (-2\sqrt{2}w, 2\sqrt{2}w)$ et ξ et η sont dans un compact de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n\rho_n(\lambda_0)}K_n\left(\lambda_0+\frac{\xi}{n\rho_n(\lambda_0)}, \lambda_0+\frac{\eta}{n\rho_n(\lambda_0)}\right) &= \mathrm{O}(\varepsilon)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\\ &+\frac{1}{2\sqrt{2}w\rho_n(\lambda_0)}\int_{\lambda^2/8w^2}^{1}\cos\left(\frac{\xi-\eta}{\rho_n(\lambda_0)\sqrt{2}w}\sqrt{t-\frac{\lambda^2}{8w^2}}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-\lambda^2/8w^2}}\\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sin(\pi(\xi-\eta))}{\pi(\xi-\eta)}\end{aligned}$$

uniformément en (ξ,η) sur tous les compacts de $\mathbb{R}^2$.

Or d'après le théorème 15(iii), $R_{n,\ell}(\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell) = \det\{K_n(\lambda_j,\lambda_m)\}_{j,m=1}^{l}$, d'où (iii).

Grâce au théorème 16,

$$E_n^{(2)}(\Delta) = 1+\sum_{\ell=1}^{n}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\int_{\Delta^\ell}R_{n,\ell}(\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell)\,\mathrm{d}\lambda_1\cdots\mathrm{d}\lambda_\ell.$$

Il suffit alors d'utiliser l'assertion (iii) pour démontrer (iv).

Pour montrer l'assertion (v), on utilise le théorème 15(ii) et la formule asymptotique (iii) de la proposition 21 (voir [Fo]). ∎

Théorème 24. *Soit $\mathcal{H}_n$ l'EGU, et $\lambda_{\max}^{(n)} = \|M_n\|$ la valeur propre de module maximal de M_n. Alors*

$$\lambda_{\max}^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 2\sqrt{2}w.$$

Démonstration. Comme $N_n(\Delta)$ converge presque sûrement vers

$$N(\Delta) = \frac{1}{4\pi w^2}\int_{\Delta\cap[-2\sqrt{2}w,2\sqrt{2}w]}\sqrt{8w^2-\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda,$$

qui est strictement positif sur tout intervalle Δ non vide contenu dans $(-2\sqrt{2}w, 2\sqrt{2w})$, $\liminf_{n\to\infty}\lambda_{\max}^{(n)} \geqslant 2\sqrt{2}w$.

Pour montrer que $\limsup_{n\to\infty}\lambda_{\max}^{(n)} \leqslant 2\sqrt{2}w$, il suffit d'établir que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}[\,\lambda_{\max}^{(n)} \geqslant 2\sqrt{2}w+\sqrt{2}w\varepsilon\,] < \infty, \tag{5.29}$$

et puis d'appliquer le lemme de Borel-Cantelli.

En utilisant l'inégalité de Tchebychev on obtient que

$$\mathbb{P}\left[\lambda_{\max}^{(n)} \geqslant 2\sqrt{2}w + \sqrt{2}w\varepsilon\right] = \mathbb{P}\left[nN_n\left((2\sqrt{2}w + \sqrt{2}w\varepsilon, \infty)\right) \geqslant 1\right]$$
$$\leqslant \mathbb{E}\left[nN_n\left((2\sqrt{2}w + \sqrt{2}w\varepsilon, \infty)\right)\right]. \tag{5.30}$$

D'après (5.9) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathbf{E}\left[nN_n\left((2\sqrt{2}w + \sqrt{2}w\varepsilon, \infty)\right)\right]$$
$$\leqslant 2r_{n-1}^{(n)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\psi_{n-1}^{(n)}(\lambda)\right)^2 \mathrm{d}\lambda\right)^{1/2}\left(\int_{2\sqrt{2}w+\sqrt{2}w\varepsilon}^{\infty}\left(\psi_n^{(n)}(\lambda)\right)^2 \mathrm{d}\lambda\right)^{1/2}. \tag{5.31}$$

On remplace $\psi_l^{(n)}(\lambda)$ pour $l = n-1, n$ par $\psi_\ell(x)$, $l = n-1, n$ en utilisant la proposition 18. Comme $-\psi_\ell''(x) + x^2\psi_\ell(x) = (2\ell+1)\psi_\ell(x)$ (voir [Sz]), on trouve en faisant une intégration par partie que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{\mathrm{d}\lambda}\psi_{n-1}^{(n)}(\lambda)\right)^2 \mathrm{d}\lambda = \frac{n}{4w^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_{n-1}(x)\right)^2 \mathrm{d}x$$
$$\leqslant \frac{n}{4w^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_{n-1}(x) + x^2\psi_{n-1}(x)\right)\psi_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(2n-1)n}{4w^2} \tag{5.32}$$

De plus, la proposition 21(ii) implique que pour $n \to \infty$

$$\int_{2\sqrt{2}w+\sqrt{2}w\varepsilon}^{\infty}\left(\psi_n^{(n)}(\lambda)\right)^2 \mathrm{d}\lambda = \int_{\sqrt{2n}+\sqrt{n/2}\varepsilon}^{\infty}\psi_n^2(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.33}$$
$$= \mathrm{O}\left(n^{-1/4}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sinh\theta}\exp\left\{-(2n-1)\int_0^\theta \sinh^2 t\,\mathrm{d}t\right\}\right)$$
$$= \mathrm{O}\left(n^{-1/4}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta}\exp\left\{-(2n-1)\theta^3/3\right\}\right)$$
$$= \mathrm{O}\left(n^{7/4}\varepsilon^{-1/2}\exp\left\{-\frac{2n}{3}\varepsilon^{3/2}\right\}\right).$$

D'après la proposition 18 $r_{n-1}^{(n)} = \sqrt{2}w$ et on obtient de (5.30) - (5.33) que

$$\mathbf{P}\left[\lambda_{\max}^{(n)} \geqslant 2\sqrt{2}w + \sqrt{2}w\varepsilon\right] = \mathrm{O}\left(n^{7/4}\varepsilon^{-1/2}\exp\left\{-\frac{2n}{3}\varepsilon^{3/2}\right\}\right),\ n \to \infty, \tag{5.34}$$

d'où (5.29). Ainsi, la plus grande des valeurs propres converge bien vers $2\sqrt{2}w$. ∎

Remarque 25. On peut aussi montrer (5.29) en utilisant l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\ell^2(t)e^{tx}\,\mathrm{d}t = e^{x^2/2}\sum_{j=1}^{\ell}\frac{\ell(\ell-1)\cdots(\ell-j+1)}{(j!)^2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^j$$

(voir [AS], formule (22.13.20)) qui implique l'estimation

$$\mathbf{P}\left[\lambda_{\max}^{(n)} \geqslant 2\sqrt{2}w + \sqrt{2}w\varepsilon\right] = \mathrm{O}\left(\exp\left\{-n\varepsilon^{1/2}\right\}\right).$$

Cette estimation est moins précise que (5.34), qui donne l'ordre de magnitude $\varepsilon \lesssim n^{-2/3}$, coïncidant pratiquement avec celui du théorème 22(iv).

Quelques remarques. (I) On peut montrer que la probabilité conditionnelle $\pi_n^{(2)}(b-a|a)\,\mathrm{d}b$ d'avoir une valeur propre dans un voisinage $(b, b+\mathrm{d}b)$ de $b \in \mathbb{R}$ sachant qu'il existe une valeur propre en $a < b$ et que l'intervalle (a, b) ne contienne pas de valeur propre est

$$\pi_n^{(2)}(b-a|a)\,\mathrm{d}b = -\frac{\partial^2 E_n^{(2)}((a,b))}{\partial a \partial b}\,\mathrm{d}b.$$

Une dérivation heuristique est donnée dans [Me], et [KS, DK+] contient une dérivation rigoureuse. On appelle $\pi_n^{(2)}(t|a)$ la *densité de la loi des écarts entre des valeurs propres successives.*

En posant $a = \lambda_0$ et $b = \lambda_0 + s/n\rho_n(\lambda_0)$ on peut déduire du théorème 22(iii) que

$$\pi^{(2)}(s) = \lim_{n\to\infty} \pi_n^{(2)}\left(\frac{s}{n\rho(\lambda_0)}\middle|\,\lambda_0\right) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}E^{(2)}(s),$$

où $E^{(2)}(s)$ est le déterminant de Fredholm de l'opérateur intégral $Q_s^{(2)}$ défini au théorème 22(iv). En particulier, en utilisant la série (5.15) pour $Q = Q_s^{(2)}$, on peut montrer que

$$\pi^{(2)}(s) = C_2 s^2 + \mathrm{O}(s^3), \quad s \to 0. \tag{5.35}$$

En particulier, on voit que

$$\pi^{(2)}(0) = 0.$$

Cette propriété est appelée *propriété de répulsion des valeurs propres* (voir [Me]).

(II) Le théorème 24 implique que

$$\mathbf{P}\left[\lambda_{\max}^{(n)} \leqslant \lambda\right] = E_n\left[(\lambda, +\infty)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda \leqslant 2\sqrt{2}w; \\ 1, & \text{si } \lambda > 2\sqrt{2}w. \end{cases} \tag{5.36}$$

C'est un résultat du régime global. Le point suivant donne le résultat correspondant pour le régime local.

(III) Soient $\Lambda_{\max}^{(n)}$ défini par $\lambda_{\max}^{(n)} = 2\sqrt{2}w + \sqrt{2}wn^{-2/3}\Lambda_{\max}^{(n)}$ et $\lambda = 2\sqrt{2}w + \sqrt{2}wn^{-2/3}s$, alors

$$\mathbf{P}\left[\lambda_{\max}^{(n)} \leqslant \lambda\right] = \mathbf{P}\left[\Lambda_{\max}^{(n)} < s\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \det(1 - Q_{\mathrm{Ai}}^{(2)}) \stackrel{\text{déf}}{=} F_2(s),$$

où $Q_{\mathrm{Ai}}^{(2)}$ est un opérateur intégral sur $[0, +\infty[$ défini par le noyau

$$Q_{\mathrm{Ai}}^{(2)}(\zeta, \eta) = \frac{\mathrm{Ai}\,(\xi)\mathrm{Ai}\,'(\eta) - \mathrm{Ai}\,(\eta)\mathrm{Ai}\,'(\xi)}{\xi - \eta}.$$

De plus, on a dans ce cas,

$$F_2(s) = \exp\left(-\int_s^\infty (s-x)q^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

où $q''(x) = xq(x) + q^3(x)$ et $q(x) = \mathrm{Ai}\,(x)(1 + \mathrm{o}(1))$ quand $x \to +\infty$. La fonction q est solution de l'*équation de Painlevé II* (voir [TW]).

(IV) Tous les résultats ci-dessus concernent les ensembles unitairement invariants, en particulier l'EGU. Les ensembles orthogonalement invariants sont plus difficiles à analyser. Voici un résultats pour l'EGO (voir [Me]).

Pour le régime local, la probabilité de trou

$$E_n^{(1)}\left[\left(\lambda_0, \lambda_0 + \frac{s}{n\rho_n(\lambda_0)}\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \det(1+Q_s^{(1)}) = E^{(1)}(s),$$

où $Q_s^{(1)}$ est l'opérateur intégral défini sur $[0, s]$ par

$$(Q_s^{(1)})f(\xi) = \int_0^s \left(\frac{\sin(\pi(\xi-\eta))}{\pi(\xi-\eta)} + \frac{\sin(\pi(\xi+\eta))}{\pi(\xi+\eta)}\right) f(\eta)\,\mathrm{d}\eta.$$

(*cf* le théorème 22 (iii)). Dans ce cas, la densité de la loi des écarts vérifie

$$\pi^{(1)}(s) = \frac{\mathrm{d}^2E^{(1)}(s)}{\mathrm{d}s^2} = C_1 s + \mathrm{O}(s^2), \quad s \to 0,$$

alors que dans le cas de l'EGU, elle était $C_2 s^2 + \mathrm{O}(s^3)$ quand $s \to 0$ (*cf* (5.35)). On conclut que la propriété de répulsion des valeurs propres est plus faible pour l'EGO que pour l'EGU.

(v) Une idée des plus importantes de la théorie est celle d'*universalité*. L'idée — en fait une conjecture — est que les propriétés statistiques des valeurs propres des matrices aléatoires dans un voisinage de l'ordre de $1/n\rho_n(\lambda_0)$ pour un λ_0 tel que $\rho(\lambda_0) \neq 0$ ne dépendent pas de l'ensemble. En particulier, toutes les fonctions de corrélation $R_{n,\ell}$ d'un ensemble (voir leurs définitions dans le théorème 15(iii)) doivent vérifier la relation asymptotique du théorème 22 (iii). La démonstration de ces faits est déjà compliquée dans le cas le plus simple des ensembles unitairement invariants (voir [PS, DK$^+$]) où le problème est réduit à l'étude de polynômes orthogonaux (voir théorèmes 15 et 16). Il s'agit de la relation asymptotique

$$\frac{1}{n\rho_n(\lambda_0)} K_n\left(\lambda_0 + \frac{\xi_1}{n\rho_n(\lambda_0)}, \lambda_0 + \frac{\xi_2}{n\rho_n(\lambda_0)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sin\pi(\xi_1-\xi_2)}{\pi(\xi_1-\xi_2)} \tag{5.37}$$

du noyau reproduisant du système des polynômes orthogonaux correspondants $\{P_\ell^{(n)}\}_{\ell\geq 0}$. En voici une illustration. Considérons, dans le cas où $\beta = 2$, les polynômes les plus simples, ceux de Tchebychev $\{T_\ell\}_{\ell=1}^\infty$. Ils sont définis sur $[-1, 1]$, sont orthogonaux pour le produit scalaire $\int_{-1}^1 f(x)g(x)(\sqrt{1-x^2})^{-1}\,\mathrm{d}x$, et $T_\ell(\lambda) = \sqrt{2/\pi}\cos(\ell\theta)$ pour $\lambda = \cos(\theta)$. On peut considérer formellement ces polynômes comme ceux correspondant à l'ensemble unitairement invariant défini par la fonction

$$V(\lambda) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } |\lambda| \geqslant 1; \\ -n^{-1}\log(\sqrt{1-x^2}), & \text{si } |\lambda| < 1. \end{cases}$$

Alors, d'après le théorème 15(ii) on a pour tout λ, $|\lambda| < 1$

$$\rho_n(\lambda) = \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{2}{\pi}\sum_{\ell=0}^{n-1}\cos^2(\theta\ell) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-\lambda^2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\cos(2\theta\ell)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\pi\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

On voit que la densité d'état de cet ensemble est différente de celle de l'EGU, *i.e.*, de la loi du demi-cercle. On n'a donc pas d'universalité de ρ. D'autre part, on a pour tout λ_0 tel que $|\lambda_0| < 1$, et pour $n \to \infty$

$$\frac{1}{n\rho_n(\lambda_0)} K_n \left(\lambda_0 + \frac{\xi_1}{n\rho_n(\lambda_0)}, \lambda_0 + \frac{\xi_2}{n\rho_n(\lambda_0)} \right) = (2n\rho_n(\lambda))^{-1}(1-\lambda_1)^{-1/4}(1-\lambda_2)^{-1/4} \sum_{\ell=0}^{n-1} \cos \ell(\theta_1 - \theta_2) + o(1),$$

où $\lambda_{1,2} = \lambda_0 + \xi_{1,2}/n\rho_n(\lambda_0)$ et $\cos\theta_{0,1,2} = \lambda_{0,1,2}$. Comme

$$\theta_1 - \theta_2 = -\frac{\xi_1 - \xi_2}{n\rho_n(\lambda_0)\sin\theta_0}(1 + o(1)), \quad n \to \infty$$

et

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \cos \ell(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\cos \frac{n-1}{2}(\theta_1 - \theta_2) \cdot \sin \frac{n}{2}(\theta_1 - \theta_2)}{\sin \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)},$$

on obtient la relation (5.37) uniformément en ξ_1 et ξ_2 sur tous les compacts de $\mathbb{R}^2$. On voit que pour « l'ensemble de Tchebychev », cette limite coïncide avec celle de l'EGU.

Références

[AG] N. I. AKHIEZER et I. M. GLAZMAN. *Theory of Linear Operators in Hilbrt Space*, vol. 1. Dover, 1993.

[AS] M. ABRAMOWITZ et I. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables.* National Bureau of Standards, 1964.

[CH] R. COURANT et D. HILBERT. *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1. Interscience, 1953.

[DK+] P. DEIFT, T. KRIECHERBAUER, K. T.-R. MCLAUGHLIN, S. VENAKIDES et X. ZHOU. Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 52, pp. 1335–1425, 1999.

[Fo] P. J. FORRESTER. The spectrum edges of random matrices. *Nuclear Phys.*, vol. B402, pp. 709–723, 1993.

[Gi] V. GIRKO. *Random Determinants.* Kluwer, 1991.

[GMW] T. GUHR, A. MÜLLER-GROELING et H. A. WEIDENMÜLLER. Random matrix theories in quantum physics: common concepts. *Physics Report*, vol. 299, pp. 189–425, 1998.

[He] P. HENRICI. *Applied and Computational Complex Analysis*, vol. 2. Wiley, 1977.

[Jo] K. JOHANSSON. On fluctuations of eigenvalues of random Hermitian matrices. *Duke Math. J.*, vol. 91, pp. 151–204, 1998.

[KS] N. KATZ et P. SARNAK. *Random Matrices, Frobenius Eigenvalues, and Monodromy.* AMS, 1999 ; Zeros of zeta fonctions and symmetry. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 36, pp. 1–26, 1999.

[KKP] A. KHORUNZHY, B. KHORUZHENKO et L. PASTUR. Random matrices with independant entries: asymptotic property of the Green function. *J. Stat. Phys.*, vol. 37, pp. 5033–5066, 1996.

[MP] V. A. MARCHENKO et L. A. PASTUR. The eigenvalue distribution in some ensembles of random matrices. *Math. USSR Sbornik,*, vol. 1, pp. 457–483, 1996.

[Me] M.L. MEHTA. *Random Matrices.* Academic Press, 1991.

[Mi] N. MINAMI. Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional Anderson tight binding model. *Comm. Math. Phys.*, vol. 177, pp. 709–725, 1996.

[Mu] R. MUIRHEAD. *Aspects of Multivariate Analysis.* Wiley, 1982.

[P1] L.A. PASTUR. On the spectrum of random matrices. *Teor. Math. Phys.*, vol. 10, pp. 67–74, 1972.

[P2] L. PASTUR. Spectral and probabilistic aspects of matrix models. Dans *Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics*, pp. 207–242. Kluwer, 1996.

[P3] L. PASTUR. On a simple approach to global regime of random matrix theory. Dans *Mathematical Results in Statistical Mechanics*, pp. 429–454. World Scientific, Singapore, 1999.

[P4] L. PASTUR. Random matrices as paradigm. Dans *Mathematical Physics 2000*, pp. 216–265. Imperial College Press, Londres, 2000.

[PS] L. PASTUR et M. SHCHERBINA. Universality of the local eigenvalue statistics for a class of unitary, invariant ensembles. *J. Stat. Phys.*, vol. 86, pp. 109–125, 1997.

[PV] L. PASTUR et V. VASIL'CHUK. On the law of addition of random matrices. *Comm. Math. Phys.*, vol. 214, pp. 249–286, 2000.

[Sp] R. SPEICHER. Free convolution and the random sum of matrices. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, vol. 5, pp. 731–744, 1993.

[Sz] G. SZEGŐ. *Orthogonal Polynomials*, volume XXIII de *Colloquium Publications.* American Mathematical Society, 1975.

[TW] C.A. TRACY et H. WIDOM. Introduction to Random Matrices. Dans *Geometric and Quantum Aspects of Integrable Systems (Scheveningen, 1992)*, pp. 103–130. Springer, 1993.

[VDN] D.-V. VOICULESCU, K. J. DYKEMA et A. NICA. *Free Random Variables.* American Mathematical Society, 1992.

[Vo] D.-V. VOICULESCU (editor). *Free Probability Theory.* American Mathematical Society, 1997.