

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

ANTHONY PHAN

Martingales d’Azéma asymétriques. Description élémentaire et unicité

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 35 (2001), p. 48-86

http://www.numdam.org/item?id=SPS_2001__35__48_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MARTINGALES D'AZÉMA ASYMÉTRIQUES. DESCRIPTION ÉLÉMENTAIRE ET UNICITÉ

par

Anthony PHAN

RÉSUMÉ. — Après de brefs rappels techniques, la notion d'équations de structure markoviennes est introduite et sont présentés quelques éléments utiles à leur étude et ainsi qu'à celle de leurs solutions. Ensuite, la majeure partie de cet article est consacrée à l'examen des martingales vérifiant $d[X, X]_t = dt + (\mathbb{1}_{\{X_{t-} \geq 0\}} \beta^+ + \mathbb{1}_{\{X_{t-} < 0\}} \beta^-) X_{t-} dX_t$. Quelques unes de leurs propriétés élémentaires sont décrites et leur unicité en loi est établie pour toutes les valeurs des paramètres $(\beta^+, \beta^-) \in \mathbb{R}^2$. Il en est déduit l'unicité en loi de solutions d'équations de structure plus générales.

ABSTRACT. — After some brief technical recallings, Markovian structure equations are introduced and some elements are given which are useful for their study and those of their solutions. Then, the major part of this article is devoted to the study of martingales satisfying $d[X, X]_t = dt + (\mathbb{1}_{\{X_{t-} \geq 0\}} \beta^+ + \mathbb{1}_{\{X_{t-} < 0\}} \beta^-) X_{t-} dX_t$. Some of their elementary properties are described and their uniqueness in law is established for all values of the parameters $(\beta^+, \beta^-) \in \mathbb{R}^2$. Uniqueness in law for some more general structure equations is deduced.

La question de l'unicité des martingales d'Azéma asymétriques est un problème déjà ancien. Elle fut posée une première fois par Michel Émery dans « On the Azéma martingales » [7], article fondateur de la théorie des équations de structure. Émery y remarquait, avec K. R. Parthasarathy, que si l'unicité à l'équation correspondante était acquise, ses solutions posséderaient alors la même propriété d'invariance d'échelle que le mouvement brownien. Ce fait remarquable justifiait à lui seul que l'on s'attachât à décider de cette question. Pourtant, alors qu'une réponse positive à celle-ci avait été obtenue dans le cas symétrique et que les martingales d'Azéma trouvaient une certaine popularité parmi les probabilistes quantiques (lorsque le paramètre se trouve dans le *bon intervalle*), il n'y eut jusqu'à présent que peu d'intérêt pour leur généralisation asymétrique sinon celui manifesté dans un travail de Catherine Rainer et Jacques Azéma (*voir* [1]) où ils établissaient l'unicité dans un cas assez particulier et ce, par des techniques issues de la théorie des excursions.

Ces notes suivent et tentent de développer les idées qu'Émery esquissait notamment dans l'addendum [8] à l'article fondateur. Dans un premier temps, nous rappellerons quelques résultats classiques tels que le théorème de renouvellement et certains autres qui le sont moins sur les solutions d'équations de structure markoviennes comme une propriété d'unicité de fin d'excursion ainsi qu'un critère d'unicité globale. Puis, nous mènerons l'étude des martingales d'Azéma asymétriques de manière probabiliste par l'étude qualitative de leurs fins d'excursions hors de l'origine. Ensuite, l'unicité globale sera montrée en prouvant que le critère correspondant est

satisfait. Celle-ci se généralisera notamment aux solutions de certaines équations de structure markoviennes dont la fonction-paramètre est continue et affine par morceaux au voisinage de ses points d'annulation. La validation du critère d'unicité se fera principalement par des techniques analytiques où le renouvellement joue un rôle fondamental. Hélas, ceci semble être particulier à la forme des équations de structure envisagées et plus particulièrement à la linéarité partielle des fonctions-paramètres. Pour finir, nous énoncerons, sans en donner de pleines justifications, quelques propriétés relatives à l'unicité et aux calculs qui auront été menés, certaines suggérant des questions pour l'instant sans réponse.

L'apparition fréquente du nom d'Émery dans le cours de ce texte témoigne de ce que nous devons aux articles cités. Mais la dette est bien plus grande envers leur auteur pour les conversations que nous avons échangées avec lui, ses remarques toujours indulgentes, et pour le soutien et la patience dont il a fait preuve pour que ce travail soit réalisé.

1. Généralités

1.1. RAPPELS ET CONVENTIONS

Les espaces filtrés $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$ que nous considérerons seront tels que les temps d'entrée de processus adaptés à trajectoires continues à droite et limitées à gauche (càdlàg) dans un fermé soient des temps d'arrêt. En présence d'une mesure de probabilité, nous n'aurons pas à supposer la complétude des tribus. En revanche, toute martingale locale sera à trajectoires càdlàg, et non nécessairement intégrables à l'instant initial, c'est-à-dire qu'en suivant [3] un processus X càdlàg est une martingale locale si c'est un processus adapté et s'il existe une suite croissante $(R_n)_{n \geq 1}$ de temps d'arrêt, tendant vers l'infini telle que pour tout n , $\mathbb{1}_{\{0 < R_n\}} X|^{R_n}$ est une martingale uniformément intégrable. Enfin, les intégrales stochastiques ainsi que les crochets droits et obliques seront supposés nuls à l'origine.

Martingales normales. — DÉFINITION. — On appelle *martingale normale* toute martingale locale X telle que $X - X_0$ est localement de carré intégrable et de crochet oblique vérifiant

$$\langle X, X \rangle_t = t.$$

Une définition équivalente et plus compacte est qu'une martingale locale X est une martingale normale si et seulement si $(X_t^2 - t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale. Celle-ci présente l'avantage de ne pas employer explicitement la notion de crochet oblique.

Le lemme suivant s'applique à certaines martingales normales. Son intérêt est de donner une condition suffisante — qui sera satisfaite dans la suite — pour que les trajectoires soient non bornées.

LEMME 1. — Soient X une martingale locale telle que $X - X_0$ est localement de carré intégrable et dont le crochet oblique croît presque sûrement vers l'infini, K un compact, et $S = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \notin K\}$ le premier instant où X quitte K . Si

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{0 < S < \infty\}} X_S^2] < \infty,$$

alors S est presque sûrement fini.

Démonstration. — Quitte à considérer $\mathbb{1}_{\{0 < S\}} X$ et à adjoindre le point $\{0\}$ à K , on peut supposer que S est strictement positif et que $X_0 \in K$ presque sûrement. Soit $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite fondamentale associée à X telle que, pour tout n , R_n soit borné et $\mathbb{1}_{\{0 < R_n\}} X|^{R_n}$ soit une martingale de carré intégrable. Alors l'est aussi $\mathbb{1}_{\{0 < R_n\}} X|^{R_n \wedge S}$ et on a

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{0 < R_n\}} X_{R_n \wedge S}^2 - \mathbb{1}_{\{0 < R_n\}} \langle X, X \rangle_{R_n \wedge S}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{0 < R_n\}} X_0^2].$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{0 < R_n\}} \langle X, X \rangle_{R_n \wedge S}] &\leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{0 < R_n\}} X_{R_n \wedge S}^2] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{0 < R_n < S\}} X_{R_n}^2] + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S \leq R_n\}} X_S^2] \\ &\leq \sup_{x \in K} x^2 \times \mathbb{P}\{0 < R_n < S\} + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S < \infty\}} X_S^2] \\ &\leq \sup_{x \in K} x^2 + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S < \infty\}} X_S^2]. \end{aligned}$$

Par convergence monotone lorsque n tend vers l'infini, on obtient que $\mathbb{E}[\langle X, X \rangle_S]$ est finie. Puisque nous avons supposé que le crochet oblique de X croissait vers l'infini, nous en déduisons que S est fini. \square

Renouvellement. — DÉFINITION. — Soient μ une mesure borélienne sur \mathbb{R} et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On appelle *équation de renouvellement* de mesure de renouvellement μ et de fonction de forçement f , l'équation

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-y) \mu(dy) + f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

C'est une équation de convolution que l'on peut encore noter $\varphi = \mu * \varphi + f$. L'ensemble de ses solutions est inclus, par hypothèse, dans l'ensemble des fonctions boréliennes bornées sur \mathbb{R} .

La référence principale d'un probabiliste concernant la théorie du renouvellement est certainement le second tome de *An introduction to probability theory* de William Feller. Cependant, les hypothèses de Riemann-intégrabilité de la fonction de forçement qui y sont faites ne sont pas adaptées à cette étude. Ces hypothèses sont modifiées dans une version de ces théorèmes due à Samuel Karlin (voir [12]) qui ne suppose que l'intégrabilité d'une telle fonction et impose qu'elle tende vers 0 aux infinis. On trouvera dans [16] la preuve et des compléments analytiques de ce résultat.

THÉORÈME DE RENOUVELLEMENT. — Soient μ une mesure de probabilité borélienne sur \mathbb{R} dont la partie absolument continue dans la décomposition de Lebesgue n'est pas nulle et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \mu(dx) < \infty, \quad m = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mu(dx) \neq 0,$$

et une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ telle que $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$. Si φ est une fonction borélienne bornée vérifiant l'équation de renouvellement $\varphi = \mu * \varphi + f$, alors φ admet des limites $\varphi(+\infty)$ et $\varphi(-\infty)$ en $+\infty$ et $-\infty$, et

$$\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Remarque. — Par la suite, cette dernière assertion ne sera guère prise en compte. Seules l'existence de limites et leur non nullité éventuelle seront utiles.

1.2. ÉQUATIONS DE STRUCTURE

L'ensemble de cette sous-section ne prétend pas remplacer la lecture des articles d'Émery — qui l'ont largement inspiré et auxquels nous renvoyons pour plus de précisions. Il indique cependant quelles sont les propriétés essentielles dont nous nous servirons par la suite et définit le vocabulaire employé.

DÉFINITION 1. — Soient Φ un processus prévisible à valeurs réelles sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. Un processus X réel est dit vérifier l'équation de structure associée à Φ , si X est une martingale locale et si l'identité

$$d[X, X]_t = dt + \Phi_t dX_t \quad (1)$$

est satisfaite.

La situation suivante — et qui nous intéressera en premier lieu — sera légèrement différente. Étant donnée une fonction ϕ borélienne, on cherche à décider de l'existence et de l'unicité en loi de martingales locales vérifiant une équation intégrale du type précédent pour $\Phi_t = \phi(X_{t-})$. Le processus prévisible, donné du problème précédent, est remplacé par une fonction de la solution elle-même.

DÉFINITION 2. — Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. On dit qu'un processus réel X vérifie l'équation de structure markovienne associée à la fonction ϕ , si X est une martingale locale et si l'identité

$$d[X, X]_t = dt + \phi(X_{t-}) dX_t \quad (2)$$

est vérifiée.

Les exemples fondamentaux sont obtenus en considérant une équation de structure associée une constante $c \in \mathbb{R}$:

$$d[X, X]_t = dt + c dX_t.$$

Lorsque $c = 0$, un théorème de Lévy montre que les martingales locales vérifiant celle-ci sont les mouvements browniens standard. Lorsque c est différent de 0, un théorème de Watanabe montre que toute solution s'écrit

$$X_t = X_0 + c \left(N_{t/c^2} - \frac{t}{c^2} \right)$$

où N est un processus de Poisson standard.

Ces exemples constituent en quelque sorte les briques élémentaires permettant d'étudier les solutions d'une équation de structure. C'est sous une forme locale que ces caractérisations nous seront le plus utile.

PROPOSITION (LÉVY-WATANABE). — Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, X un processus et S un temps d'arrêt tels que $X|_S$ soit une martingale locale vérifiant

$$d[X, X]_t = dt + c dX_t$$

sur $\llbracket 0, S \rrbracket$. Alors $X|_S$ coïncide avec la restriction à $\llbracket 0, S \rrbracket$ d'une solution de l'équation de structure ci-dessus. Notamment, si S est un temps d'arrêt de la filtration naturelle de X , alors, conditionnellement à X_0 , le processus $X|_S$ est indépendant de \mathcal{F}_0 .

Démonstration. — En premier lieu, remarquons que $(\Delta X)^2 = c \Delta X$ sur $\llbracket 0, S \rrbracket$, identité qui résulte de l'évaluation des discontinuités du crochet droit. Les sauts de X sur cet intervalle sont donc bornés. Quitte à conditionner pour restreindre le support de la loi initiale et remplacer S par un temps d'arrêt plus petit, nous pouvons supposer que $X|_S$ est une vraie martingale, qu'elle est uniformément bornée et que S est lui aussi borné.

Quitte à élargir l'espace probabilisé filtré, soit Y une solution de l'équation de structure issue de 0 indépendante de \mathcal{F}_S . C'est l'un des processus décrits auparavant, notamment c'est une vraie martingale. Posons

$$Z_t = X|_t^S + \mathbb{1}_{\{S \leq t\}} Y_{t-S} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t \wedge S} \vee \sigma\{\mathbb{1}_{\{S \leq s\}} Y_{s-S}, s \leq t\}.$$

Par construction, dans la filtration $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$, $(t + c(Z_t - Z_0))_{t \geq 0}$ est un processus croissant continu à droite adapté, Z est une martingale et $Z_t^2 - (t + c(Z_t - Z_0))$ définit une martingale locale. Ainsi Z vérifie l'équation de structure et répond au problème. L'affirmation d'indépendance résulte de l'unicité en loi du processus arrêté lorsque le temps d'arrêt S est adapté à ce dernier. \square

La proposition précédente repose sur la possibilité de recoller une solution locale avec une solution globale, celle-ci reposant à son tour sur l'homogénéité en temps et surtout en espace de l'équation envisagée. Notons aussi que sa conclusion se place dans un espace éventuellement élargi. Ceci n'a pas de conséquence si on ne s'intéresse qu'à $X|_S$ et plus particulièrement qu'à sa loi.

PROPOSITION (ÉMERY). — Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et Φ un processus prévisible à valeurs réelles. Si X vérifie l'équation de structure

$$d[X, X]_t = dt + \Phi_t dX_t,$$

alors les faits suivants sont vérifiés :

(i) X est une martingale normale, c'est une vraie martingale si X_0 est intégrable, et si de plus X_0 est de carré intégrable, X est de carré intégrable sur tout intervalle borné ;

(ii) les parties martingales continue et discontinue de X sont données par

$$dX_t^c = \mathbb{1}_{\{\Phi_t = 0\}} dX_t \quad \text{et} \quad dX_t^d = \mathbb{1}_{\{\Phi_t \neq 0\}} dX_t,$$

notamment, $d\langle X, X \rangle_t^c = \mathbb{1}_{\{\Phi_t = 0\}} dt$, et les sauts de X vérifient $(\Delta X_t)^2 = \Phi_t \Delta X_t$ et ont lieu à des instants totalement inaccessibles.

La première affirmation ne constitue pas un résultat immédiat. Pour le voir, on peut se référer à [9] et [7]. Dans le premier de ces articles, la compensation prévisible par rapport à la classe des intégrales stochastiques au sens des semi-martingales est décrite et l'unicité de tels compensateurs est établie. Dans le second, les propriétés d'intégrabilité d'une martingale locale solution sont démontrées à l'aide d'arguments relativement simples et l'unicité de la compensation implique que le terme dt de l'équation est l'accroissement infinitésimal du crochet oblique d'une telle solution.

Par la suite n'apparaîtront plus que des équations de structure markoviennes. Dans ce cadre, les questions d'existence et d'unicité de solutions se transportent sur

l'espace de Skorohod $D([0, \infty])$ des fonctions càdlàg sur $[0, \infty[$. Le processus X est alors celui des coordonnées. La filtration contiendra la filtration canonique continue à droite mais devra être considérée comme arbitrairement grande — la clarté que l'on gagne sur les variables aléatoires en passant à la réalisation canonique jettant de l'ombre sur l'information originelle. Une solution d'équation de structure markovienne sera alors une certaine probabilité sur cet espace filtré. Pour ces équations, on a dans la filtration canonique le résultat d'existence suivant (voir [15]) :

THÉORÈME (MEYER). — *Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour toute probabilité μ sur \mathbb{R} , il existe une loi de martingale locale \mathbb{P} sur l'espace de Skorohod telle que*

$$d[X, X]_t = dt + \phi(X_{t-}) dX_t,$$

est satisfaite et X_0 est de loi μ sous \mathbb{P} .

Ce théorème a été démontré pour une condition initiale déterministe. Sa démonstration se généralise sans peine à une loi initiale à support compact, et le résultat s'étend dès lors à toute loi initiale. Par ailleurs, Émery a donné un exemple où il n'existe pas de solutions pour une fonction ϕ présentant un point de discontinuité (voir [7]). Cependant, il est, par exemple, possible de construire explicitement des solutions pour une fonction borélienne, localement bornée, de signe constant et uniformément éloignée de 0 (voir [17]).

PROPOSITION 1 (PRINCIPE DE TRANSLATION). — *Soient \mathbb{P} une solution de l'équation de structure markovienne associée à une fonction ϕ borélienne, et T un temps d'arrêt. Alors conditionnellement à $\{T < \infty\}$, le processus $X \circ \theta_T$ est une martingale locale solution de la même équation de structure dans la filtration translatée par T .*

Cette proposition découle des propriétés connues de la translation d'une martingale locale et est donc évidente. Nous aurons l'occasion par la suite d'effectuer des translations pour lesquelles $X \circ \theta_T$ sera au moins intégrable, de sorte que, conditionnellement à $\{T < \infty\}$, le processus translaté sera une vraie martingale.

PROPOSITION 2. — *Soient \mathbb{P} une solution de l'équation de structure markovienne associée à une fonction ϕ borélienne, et $Z(\phi)$ l'ensemble des zéros de cette fonction. Si $A \subset Z(\phi)$ est un ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue, alors le processus*

$$\int \mathbb{1}_A(X_s) ds$$

est indistinguable du processus nul.

Démonstration. — Nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{1}_A(X_s) ds &= \int_0^t \mathbb{1}_A(X_s) \mathbb{1}_{Z(\phi)}(X_s) ds \\ &= \int_0^t \mathbb{1}_A(X_s) \mathbb{1}_{\{X_{s-}=X_s\}} \mathbb{1}_{Z(\phi)}(X_s) ds + \int_0^t \mathbb{1}_A(X_s) \mathbb{1}_{\{X_{s-} \neq X_s\}} \mathbb{1}_{Z(\phi)}(X_s) ds, \end{aligned}$$

car, d'une part A est inclus dans $Z(\phi)$, et d'autre part nous avons scindé le domaine d'intégration selon que X_s et X_{s-} soient égaux ou non. L'intégrale portant sur les instants où X_s et X_{s-} sont distincts est à support dénombrable et donc nulle.

Quant à l'autre intégrale, remarquons que si X_{s-} appartient à $Z(\phi)$, puisque $\Delta X_s \in \{0, \phi(X_{s-})\}$ comme le rappelle la proposition d'Émery, alors $X_{s-} = X_s$. Ainsi

$$\mathbb{1}_{\{X_{s-}=X_s\}} \mathbb{1}_{Z(\phi)}(X_s) ds = \mathbb{1}_{Z(\phi)}(X_{s-}) ds = d\langle X, X \rangle_s^c = d[X, X]_s^c,$$

la seconde égalité ayant été prouvée dans [7] et a été rappelée précédemment. Nous avons donc

$$\int_0^t \mathbb{1}_A(X_s) ds = \int_0^t \mathbb{1}_A(X_s) d[X, X]_s^c.$$

Mais d'après la formule d'occupation (voir, par exemple, [5], chap. XXIII, 33, ou encore [2] p. 20), en notant L^x le temps local de X en x , cette intégrale est égale à

$$\int_{\mathbb{R}} L_t^x \mathbb{1}_A(x) dx$$

qui est égale à 0 par hypothèse. \square

DÉFINITION 3. — Une fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est *signe-continue inférieurement* si elle est borélienne localement bornée et s'il existe une fonction continue ϕ_m telle que

$$|\phi_m| \leq |\phi| \quad \text{et} \quad \text{sgn } \phi_m = \text{sgn } \phi,$$

où on aura convenu que $\text{sgn } 0 = 0$. Autrement dit, ϕ est signe-continue inférieurement si l'ensemble $Z(\phi)$ de ses zéros est fermé, et si, dans tout intervalle compact inclus dans son complémentaire, ϕ est de signe constant et de valeur absolue minorée par un réel strictement positif.

Ce qui motive l'introduction de telles fonctions est que certaines propriétés importantes que nous savons prouver dans le cas de fonctions continues s'y étendent facilement — ormis l'existence de solutions qui, d'après [7], peut être en défaut pour certains éléments de cette classe. Par exemple, il est possible de généraliser la proposition 2 à tout négligeable $A \subset \mathbb{R}$ lorsque ϕ est signe-continue inférieurement.

La proposition suivante traite une question d'unicité partielle, celle de l'unicité d'une fin d'excursion hors de la frontière de l'ensemble des zéros de la fonction-paramètre. Lorsque ϕ est signe-continue inférieurement, $Z(\phi)$ est fermé et contient sa frontière $\partial Z(\phi)$. Rappelons que par continuité à droite des trajectoires, à l'infimum des instants où le processus est dans un certain fermé, il est déjà dans ce fermé.

PROPOSITION 3. — Soient ϕ une fonction réelle signe-continue inférieurement et D le temps d'arrêt $\inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \partial Z(\phi)\}$.

(i) Soit \mathbb{P} une solution de l'équation de structure markovienne associée à ϕ de loi initiale μ . Alors, le processus arrêté $X|_D^D$ est indépendant de \mathcal{F}_0 conditionnellement à X_0 et de loi $\mathbb{P}^\mu|_D$ uniquement déterminée par ϕ et μ .

(ii) Pour tout A dans la tribu borélienne de l'espace de Skorohod, l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}^x|_D(A)$ est borélienne, et toute loi $\mathbb{P}^\mu|_D$ s'obtient par intégration contre μ des lois $\mathbb{P}^x|_D$.

Démonstration. — Posons $T = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in Z(\phi)\}$, c'est un temps d'arrêt vérifiant $T \leq D$. La démonstration d'unicité se décompose en deux parties : la première sur $\llbracket 0, T \rrbracket$, la seconde sur $\llbracket T, D \rrbracket$. Si l'événement $\{T = 0\}$ est de probabilité strictement positive, conditionnellement à celui-ci la loi du processus est décrite par

la seconde partie, et cela correspond à la fraction de condition initiale portée par les zéros de ϕ .

Soit ϕ_m une fonction continue reliée à ϕ selon les termes de la définition 3. Nous pouvons supposer que $\mathbb{P}\{|\phi_m(X_0)| > 0\} > 0$, c'est-à-dire que T n'est pas nul presque sûrement, et même, par conditionnement, que $\mathbb{P}\{|\phi_m(X_0)| \geq c\} = 1$, pour une certaine constante c strictement positive. Soient $0 < \varepsilon < c$ et

$$T^\varepsilon = \inf\{t \geq 0 \mid |\phi_m(X_t)| \leq \varepsilon\},$$

de sorte que $|\phi(X_t)| \geq |\phi_m(X_t)| > \varepsilon$ sur $\llbracket 0, T^\varepsilon \rrbracket$. Posons

$$Z_t^\varepsilon = \int_{]0, t \wedge T^\varepsilon]} \frac{dX_s}{\phi(X_{s-})} \quad \text{et} \quad A_t^\varepsilon = \int_{]0, t \wedge T^\varepsilon]} \frac{ds}{\phi(X_{s-})^2} + \max(0, t - T^\varepsilon).$$

Les processus Z^ε et A^ε ainsi définis le sont en tout temps — en particulier à l'instant T^ε lorsque celui-ci est fini —, et A^ε est continu, adapté et strictement croissant. L'inverse de A^ε sera noté a^ε et c'est un changement de temps continu (*voir* [13]).

Les temps d'arrêt $(T^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ croissent lorsque ε décroît vers 0, nous noterons temporairement T' leur limite, et $(\phi_m(X_{T^\varepsilon}))_{\varepsilon > 0}$ tend vers 0 sur $\{T' < \infty\}$. Nous allons montrer que $T' = T$. Sur $\{T' < \infty\}$, deux cas se présentent : ou bien $(T^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est stationnaire à partir d'un certain rang ε_0 , auquel cas pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$\phi_m(X_{T'}) = \phi_m(X_{T^\varepsilon}) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \phi_m(X_{T^\eta}) = 0 \quad \text{et alors} \quad \phi(X_{T'}) = 0;$$

ou bien $T^\varepsilon < T'$ pour tout ε , et nous en déduisons, par continuité de ϕ_m et du fait que X admet des limites à gauche, que

$$\phi_m(X_{T'-}) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \phi_m(X_{T^\eta}) = 0 \quad \text{et qu'ainsi} \quad \phi(X_{T'-}) = 0,$$

Comme $(\Delta X_{T'})^2 = \phi(X_{T'-}) \Delta X_{T'} = 0$, alors $X_{T'} = X_{T'-}$ et $\phi(X_{T'}) = \phi(X_{T'-}) = 0$. Dans les deux cas, T' est un instant d'annulation du processus $\phi(X)$, et puisque par construction il n'a pu y avoir d'annulation antérieure, on a bien $T' = T$ sur $\{T' < \infty\}$. Sur $\{T' = \infty\}$, on a évidemment $T = \infty$. Les deux temps d'arrêt sont donc identiques.

L'analyse qui suit permettra de déterminer X , ou sa loi, sur chaque $\llbracket 0, T^\varepsilon \rrbracket$, et ainsi sur $\llbracket 0, T \rrbracket$. Cette détermination se prolonge à l'instant T lorsque celui-ci est fini. En effet, par construction $\phi(X_T) = 0$ et supposons connaître X_{T-} . Si $\phi(X_{T-}) = 0$, alors $X_T = X_{T-}$, et si $\phi(X_{T-}) \neq 0$ alors un saut s'est nécessairement produit à l'instant T et $X_T = X_{T-} + \phi(X_{T-})$.

En suivant [7], effectuons le changement de temps. Le processus P^ε défini par

$$P_s^\varepsilon = Z_{a_s^\varepsilon}^\varepsilon$$

est une martingale locale dont on peut facilement calculer le crochet droit : si $t < T^\varepsilon$,

$$d[Z^\varepsilon, Z^\varepsilon]_t = \frac{d[X, X]_t}{\phi^2(X_{t-})} = \frac{dt + \phi(X_{t-}) dX_t}{\phi^2(X_{t-})} = dA_t^\varepsilon + dZ_t^\varepsilon,$$

et par changement de temps,

$$d[P^\varepsilon, P^\varepsilon]_s = ds + dP_s^\varepsilon, \quad \text{pour } s < A_{T^\varepsilon}^\varepsilon.$$

On en déduit que P^ε coïncide avec la restriction à $\llbracket 0, A_{T^\varepsilon}^\varepsilon \rrbracket$ d'un processus de Poisson compensé. D'autre part, sur $\llbracket 0, A_{T^\varepsilon}^\varepsilon \rrbracket$

$$dX_{a_s^\varepsilon} = \phi(X_{a_{s-}^\varepsilon}) dP_s^\varepsilon \quad \text{et} \quad da_s^\varepsilon = \phi(X_{a_{s-}^\varepsilon})^2 ds.$$

En posant $Y_s^\varepsilon = X_{a_s^\varepsilon}$, la première équation s'écrit

$$dY_s^\varepsilon = \phi(Y_{s-}^\varepsilon) dP_s^\varepsilon.$$

Mais une telle équation guidée par un processus de Poisson compensé et de condition initiale fixée admet une unique solution construite trajectoire par trajectoire jusqu'au premier instant d'atteinte de $Z(\phi)$: lorsque le processus directeur dérive elle suit l'équation intégrale $dy = -\phi(y)ds$ dont le flot est bien défini par hypothèse sur la nature de ϕ dans les intervalles complémentaires de $Z(\phi)$ (écrire $ds = -dy/\phi(y)$, intégrer les deux membres et inverser), et lors d'un saut la solution vérifie $\Delta Y_t = \phi(Y_{t-})$. Ainsi, $A_{T^\varepsilon}^\varepsilon$ est uniquement déterminé comme le premier instant où $|\phi_m(Y)|$ est inférieur à ε pour une telle solution Y . La seconde équation

$$da_s^\varepsilon = \phi(Y_{s-})^2 ds, \quad s \in \llbracket 0, A_{T^\varepsilon}^\varepsilon \rrbracket$$

détermine alors a^ε sur cet intervalle. En changeant à nouveau de temps et puisque $T^\varepsilon = a_{A_{T^\varepsilon}^\varepsilon}^\varepsilon$, A^ε est uniquement déterminé sur $\llbracket 0, T^\varepsilon \rrbracket$, ainsi que $X = Y_{A^\varepsilon}^\varepsilon$. Il ne reste plus qu'à laisser ε tendre vers 0 et oublier la constante c pour obtenir l'unicité en loi jusqu'au temps T — en se rappelant que si $T < \infty$, X_T est lui-même connu.

Finalement, entre T et D , et puisque D n'est fonction que des trajectoires du processus après T , nous savons que X est le recollement à $X|_T$ le long de X_T d'un mouvement brownien indépendant du passé conditionnellement à X_T .

Ceci montre que la loi de $X|_D$ est uniquement définie par celle de sa condition initiale et l'équation de structure. Là encore, cette unicité en loi implique que, conditionnellement à X_0 , $X|_D$ est indépendant de \mathcal{F}_0 .

Passons à la mesurabilité de la loi de $X|_D$ en fonction de sa condition initiale et à ses conséquences. Ceci se décompose comme précédemment en deux parties. Sur $\llbracket 0, T \rrbracket$, la loi de $X|_T$ est obtenue par une correspondance borélienne — la construction trajectoire par trajectoire d'une solution — entre celle d'un processus de Poisson et celle-ci. Le recollement à cette dernière de celle d'une loi brownienne arrêtée au temps d'atteinte de $\partial Z(\phi)$ dépend de manière borélienne de la loi de X_T . On en conclut la mesurabilité de la correspondance entre la loi initiale et celle de $X|_D$. La propriété de désintégration résulte alors immédiatement de la propriété d'unicité.

□

Remarques. — a) Il est important de remarquer que la démonstration de la proposition précédente peut être localisée spatialement : si S désigne le premier instant de sortie d'un certain ensemble ouvert fixé, la conclusion s'applique à $X|^{D \wedge S}$ et on constate que sa loi ne dépend que des restrictions à l'adhérence de cet ouvert de la fonction-paramètre ϕ et de la loi initiale.

b) En conservant les notations de la démonstration précédente, on constate qu'en posant sur $\{T > 0\}$

$$Z_t = \int_{]0,t]} \frac{dX_s}{\phi(X_{s-})} \quad \text{et} \quad A_t = \int_{]0,t]} \frac{ds}{\phi(X_{s-})^2},$$

on définit deux processus Z et A sur $\llbracket 0, T \rrbracket$ et qu'il existe — éventuellement sur un espace élargi — un processus de Poisson compensé P tel que $Z = P_A$. Nous nommerons *système poissonnien* le couple d'équations définissant Z et A , le processus A sera qualifié de *temps relatif* et sa limite en T de *durée relative* de l'excursion hors de $Z(\phi)$. La résolution partielle de ce système permettra d'effectuer des calculs explicites semblables à ceux de [7].

c) La fonction ϕ_m permet avant tout de localiser l'évolution d'une solution hors de $Z(\phi)$. De plus, elle garantit l'intégrabilité locale de $1/\phi$ et la monotonie de son intégrale dans les intervalles complémentaires des zéros. Certaines hypothèses sur ϕ auraient pu être affaiblies, notamment sa bornitude locale n'a pas servi. Cette dernière trouve son intérêt dans la proposition qui suit.

PROPOSITION 4. — *Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne localement bornée. Si \mathbb{P} est une solution de l'équation de structure markovienne associée à ϕ , alors les trajectoires de X sont \mathbb{P} -presque sûrement non bornées.*

Démonstration. — Il suffit de constater que pour tout compact K , le premier instant de sortie S de K est presque sûrement fini. Mais sur l'événement $\{0 < S < \infty\}$, nous avons

$$\inf_{x \in K} x \wedge \inf_{x \in K} (x + \phi(x)) \leq X_S \leq \sup_{x \in K} x \vee \sup_{x \in K} (x + \phi(x)).$$

Puisque, par hypothèse, ces bornes sont finies, le lemme 1 s'applique et permet de conclure. \square

L'énoncé de cette proposition se généralise de multiples façons, notamment à un cadre multidimensionnel : si une martingale normale n -dimensionnelle est telle que dans tout compact K la longueur de ses sauts est majorée par une constante C_K , alors toutes les projections orthogonales de celle-ci, qui sont encore des martingales normales, ont leurs trajectoires non bornées. Signalons cependant qu'il est possible de construire des martingales normales, unidimensionnelles, satisfaisant une équation de structure markovienne, qui sont convergentes, et donc à trajectoires bornées (*voir* une note à ce sujet dans ce volume).

1.3. UN CRITÈRE D'UNICITÉ

Nous nous limiterons à des équations de structure markoviennes de fonction-paramètre une fonction ϕ signe-continue inférieurement — ou même continue pour s'assurer de l'existence de solutions — telle que $\partial Z(\phi)$ est dénombrable. Cette hypothèse écarte les cas où $\partial Z(\phi)$ est non dénombrable et de mesure de Lebesgue nulle, ou, pire, de mesure de Lebesgue strictement positive. Dans ces deux derniers cas, on est confronté à des problèmes de désintégration, dans le dernier, en outre, à la possibilité *a priori* que le processus fréquente l'ensemble singulier pendant une durée strictement positive, durée durant laquelle nous ne savons presque rien de son comportement.

Soient \mathbb{P} une solution d'une équation de structure markovienne associée à une fonction ϕ signe-continue inférieurement, et ε un réel strictement positif. Définissons par récurrence les temps d'arrêt suivants, temps que nous qualifierons de temps de découpage,

$$S_0^\varepsilon = 0, \quad T_0^\varepsilon = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in \partial Z(\phi)\}$$

et pour tout entier $n \geq 1$

$$S_n^\varepsilon = \inf\{t \geq T_{n-1}^\varepsilon \mid |X_t - X_{T_{n-1}^\varepsilon}| \geq \varepsilon\}, \quad T_n^\varepsilon = \inf\{t \geq S_n^\varepsilon \mid X_t \in \partial Z(\phi)\},$$

où on convient que $\inf \emptyset = +\infty$.

PROPOSITION 5. — Pour tout entier n , les événements $\{T_n^\varepsilon < \infty\}$ et $\{S_{n+1}^\varepsilon < \infty\}$ sont égaux presque sûrement. Pour ε fixé,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^\varepsilon = \infty \quad \text{presque sûrement ;}$$

et pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (S_{n+1}^\varepsilon - T_n^\varepsilon) = 0 \quad \text{presque sûrement.}$$

Démonstration. — Supposons qu'il existe A inclus dans $\{T_n^\varepsilon < \infty\}$ de probabilité strictement positive tel que pour tout $\omega \in A$, $S_{n+1}^\varepsilon(\omega) = \infty$. Ceci signifie qu'après T_n^ε , les trajectoires de la martingale normale X demeurent dans l'intervalle de largeur 2ε centré en $X_{T_n^\varepsilon}$ et sont donc bornées : ceci contredit la proposition 4. Ainsi $\mathbb{P}(A) = 0$. D'autre part, $\{T_n^\varepsilon < \infty\}$ est évidemment contenu dans $\{S_{n+1}^\varepsilon < \infty\}$. Ce qui prouve la première affirmation.

Quant à la deuxième : remarquons que la suite des positions du processus prises aux instants de découpage ne peut, par construction et d'après ce qui précède, être convergente. En effet, si ces instants stationnent en l'infini la conclusion vient du fait que les trajectoires sont non bornées, sinon de T_n^ε à S_{n+1}^ε la position varie d'une amplitude au moins égale à ε ce qui conduit à la même conclusion. Notons T_∞^ε le supremum des instants de découpage. Par existence de limites à gauche, la suite précédente doit converger vers $X_{T_\infty^\varepsilon}$ sur $\{T_\infty^\varepsilon < \infty\}$, ce qui montre que la probabilité de cet événement est nulle.

Quant à la dernière affirmation : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Lorsque ε tend vers 0, T_n^ε et S_{n+1}^ε décroissent, elles admettent des limites que nous notons T_n^0 et S_{n+1}^0 . Remarquons que sur $\llbracket T_n^\varepsilon, S_{n+1}^\varepsilon \rrbracket$ le processus est à une distance au plus ε de $\partial Z(\phi)$, et qu'alors il évolue dans cet ensemble fermé sur $\llbracket T_n^0, S_{n+1}^0 \rrbracket$. Sur cet intervalle aléatoire, le processus coïncide avec un mouvement brownien et a donc ses trajectoires continues. Puisque $\partial Z(\phi)$ est totalement discontinu, le processus est alors constant sur cet intervalle, ce qui n'est possible que si cet intervalle est de longueur nulle. \square

Remarque. — La définition des temps de découpage et leurs propriétés valent pour toute fonction ϕ borélienne localement bornée et tout ensemble $Z \subset Z(\phi)$ fermé totalement discontinu.

PROPOSITION 6 (PRINCIPE D'ASSEMBLAGE). — Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction signe-continue inférieurement telle que $\partial Z(\phi)$ est dénombrable. L'unicité en loi des solutions de l'équation de structure associée à ϕ a lieu si et seulement si, pour tous $z \in \partial Z(\phi)$ et $\varepsilon > 0$, il existe une loi de probabilité Π_z^ε sur $\text{Bor}(\mathbb{R})$ ne dépendant que de ϕ , z et ε , telle que, si \mathbb{P} est une solution issue de z de l'équation de structure, on a

$$\mathbb{P}\{X_{S_1^\varepsilon} \in B \mid \mathcal{F}_0\} = \mathbb{P}\{X_{S_1^\varepsilon} \in B\} = \Pi_z^\varepsilon(B) \quad (3)$$

pour tout $B \in \text{Bor}(\mathbb{R})$.

La propriété caractéristique de la proposition précédente est équivalente à celle qui suit : si \mathbb{P} est une solution de l'équation de structure, et si $\mathbb{P}\{T_n^\varepsilon < \infty, X_{T_n^\varepsilon} = z\}$

est strictement positive, on a

$$\mathbb{P}\{X_{S_{n+1}^\varepsilon} \in B \mid \mathcal{F}_{T_n^\varepsilon}, X_{T_n^\varepsilon} = z\} = \mathbb{P}\{X_{S_{n+1}^\varepsilon} \in B \mid X_{T_n^\varepsilon} = z\} = \Pi_z^\varepsilon(B)$$

sur $\{T_n^\varepsilon < \infty\}$, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En effet, cette dernière propriété implique la première si on considère une solution issue de z et que l'on regarde le cas $n = 1$. Réciproquement, si les hypothèses de cette dernière propriété sont satisfaites, sa conclusion l'est aussi par translation par le temps T_n^ε et conditionnement.

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire. Nous allons voir que cette condition est aussi suffisante. Soit \mathbb{P} une solution de l'équation de structure associée à ϕ de loi initiale μ . D'après la proposition 3, la loi de X sur $\llbracket 0, T_0^\varepsilon \rrbracket$ est uniquement déterminée par ϕ et μ . Si $\{T_0^\varepsilon < \infty\}$ est de probabilité nulle, l'unicité est acquise, sinon, par translation, on se ramène à étudier une solution de loi initiale μ_0 , la loi de $X_{T_0^\varepsilon}$ conditionnellement à $\{T_0^\varepsilon < \infty\}$, qui est portée par l'ensemble dénombrable $\partial Z(\phi)$. En supposant la propriété (3) vérifiée, la loi de $(X|^{T_0^\varepsilon}, X_{S_1^\varepsilon})$ est alors uniquement déterminée, et c'est là que l'hypothèse de dénombrabilité intervient afin de pouvoir désintégrer et réintégrer les lois le long de $X_{T_0^\varepsilon}$. Par une nouvelle application de la proposition 3, on constate que la loi sous \mathbb{P} du couple des restrictions de X à $\llbracket 0, T_0^\varepsilon \rrbracket$ et à $\llbracket S_1^\varepsilon, T_1^\varepsilon \rrbracket$ est encore uniquement déterminée. L'identification se poursuit de manière inductive et il résulte que la loi conjointe des restrictions de X aux intervalles stochastiques $\llbracket S_n^\varepsilon, T_n^\varepsilon \rrbracket$, $n \in \mathbb{N}$, est uniquement déterminée.

Nous définissons un processus X^ε càdlàg en changeant X de temps à l'aide de l'inverse du processus croissant

$$t \longmapsto \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\llbracket S_n^\varepsilon, T_n^\varepsilon \rrbracket}(s) ds,$$

c'est-à-dire qu'il est obtenu par oubli, trajectoire par trajectoire, de ce qui se passe dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket T_n^\varepsilon, S_{n+1}^\varepsilon \rrbracket$. Quand ε tend vers 0, ce dernier ensemble décroît vers celui des temps de passage de X dans $\partial Z(\phi)$, qui, d'après la proposition 2, est de mesure de Lebesgue nulle. Ceci implique que $(X^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge dans la topologie de Skorohod vers X lorsque ε tend vers 0. Compte tenu de ce qui a été montré plus haut, la loi de chaque X^ε est uniquement déterminée par les paramètres et la condition initiale. Il en est alors de même pour X . \square

Nous discutons maintenant de l'utilisation pratique de la proposition précédente en vue d'en faire un critère local.

L'énoncé que nous avons donné est uniforme en $z \in \partial Z(\phi)$. Supposons que la propriété (3) ne soit établie que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon(z)$. Dans ce cas, il convient de modifier la définition des temps de découpage et poser plus particulièrement

$$S_n^\varepsilon = \inf\{t \geq T_{n-1}^\varepsilon \mid |X_t - X_{T_{n-1}^\varepsilon}| \geq \varepsilon \times \varepsilon(X_{T_{n-1}^\varepsilon})\}, \quad n \geq 1.$$

Alors, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, la propriété (3) sera satisfaite avec la probabilité $\Pi_z^{\varepsilon \times \varepsilon(z)}$, et on conclura de même par l'unicité.

Il reste la question de savoir si la propriété (3) est locale en espace, c'est-à-dire si elle ne dépend de ϕ que sur un voisinage de $z \in \partial Z(\phi)$. Ce problème est classique. On peut répondre par l'affirmative si on a la possibilité de prolonger une solution à partir du premier instant de sortie de ce voisinage en une solution d'une nouvelle équation de structure dont la fonction-paramètre ne coïnciderait *a priori* avec ϕ que

sur celui-ci. C'est ce que nous avons fait pour donner un énoncé local des théorèmes de Lévy et Watanabe.

Plus généralement, il conviendrait d'introduire la notion de solution locale d'une équation de structure markovienne comme tout processus qui stoppé au premier instant de sortie d'un ouvert fixé est une martingale locale satisfaisant jusqu'à cet instant à l'équation de structure donnée. Comme nous l'avons déjà remarqué, l'unicité en loi des fins d'excursions est locale en ce sens. Le principe d'assemblage peut lui aussi être localisé pour obtenir un critère d'unicité locale où on exigerait que les probabilités Π_z^ε ne dépendent que de la restriction de ϕ à l'adhérence de cet ouvert — ce qui constitue une condition plus forte.

Dans les cas qui nous intéresseront, nous contournerons cette difficulté en montrant la validité de (3) à partir des lois de fins d'excursions et de la propriété de martingale d'une solution stoppée au premier instant de sortie d'un ouvert borné. Plus ou moins implicitement, nous vérifierons ainsi l'unicité locale.

2. Martingales d'Azéma asymétriques, présentation

Dans cette section, nous commençons par donner la définition des martingales d'Azéma asymétriques comme solutions d'équations de structure et les énoncés d'unicité qui y sont relatifs. Ensuite, une classification sommaire est faite, elle correspond aux divisions principales de la preuve du théorème 1. Un début de description de ces processus est également mené. Il servira notamment à l'analyse de certaines probabilités introduites à la fin de cette section et qui interviendront dans la majeure partie des démonstrations à venir.

DÉFINITION 4. — Soit $(\beta^+, \beta^-) \in \mathbb{R}^2$. On appelle *martingale d'Azéma asymétrique* de paramètres (β^+, β^-) toute martingale locale solution de l'équation de structure

$$d[X, X]_t = dt + (\mathbb{1}_{\{X_{t-} \geq 0\}} \beta^+ + \mathbb{1}_{\{X_{t-} < 0\}} \beta^-) X_{t-} dX_t, \quad (4)$$

Lorsque les deux paramètres sont égaux, les solutions considérées sont celles que l'on nomme, à la suite d'Émery, *martingales d'Azéma*.

THÉORÈME 1. — Pour tout $(\beta^+, \beta^-) \in \mathbb{R}^2$ et toute loi de probabilité μ sur $\text{Bor}(\mathbb{R})$, l'équation de structure

$$d[X, X]_t = dt + (\mathbb{1}_{\{X_{t-} \geq 0\}} \beta^+ + \mathbb{1}_{\{X_{t-} < 0\}} \beta^-) X_{t-} dX_t, \quad X_0 \stackrel{(\text{loi})}{=} \mu$$

admet une solution unique en loi.

L'existence est connue puisque les fonctions-paramètres sont continues. Quant à l'unicité, sa démonstration reposera sur la vérification du principe d'assemblage avec ici $\partial Z(\phi) = \{0\}$. En corollaire, nous en déduisons :

THÉORÈME 2. — Soit ϕ une fonction signe-continue inférieurement, qui, au voisinage de ses point d'annulation, est continue et affine par morceaux. Alors pour toute loi de probabilité μ sur $\text{Bor}(\mathbb{R})$, l'équation de structure

$$d[X, X]_t = dt + \phi(X_{t-}) dX_t, \quad X_0 \stackrel{(\text{loi})}{=} \mu$$

admet en loi au plus une solution.

Pour une telle fonction ϕ , $\partial Z(\phi)$ est dénombrable, et pour tout z dans cet ensemble, il existe un voisinage de z sur lequel ϕ coïncide à translation près avec la fonction-paramètre d'une martingale d'Azéma asymétrique. La validité locale de la propriété (3) dans ce cas implique que le principe d'assemblage s'applique, ce qui permet de conclure à l'unicité.

CONVENTION. — *Par la suite, on ne rencontrera que des lois de martingales d'Azéma asymétriques, ou, plus généralement, des lois pour lesquelles l'équation de structure (4) est satisfaite sur un voisinage de l'origine. Aussi, nous ne préciserons pas toujours cette hypothèse. Les valeurs des paramètres seront implicites vis-à-vis des notations et un exposant surmontant les signes de probabilité et d'espérance pourra venir préciser le choix d'une condition initiale.*

2.1. CLASSIFICATION ÉLÉMENTAIRE

La classification que nous allons dégager repose essentiellement sur les changements de signe éventuels au cours d'une excursion — propriété qui est fonction des paramètres β^+ et β^- . C'est l'occasion d'une première familiarisation avec les martingales d'Azéma asymétriques.

Nous nous plaçons dans le cadre canonique et soit T le temps d'arrêt $\inf\{t \geq 0 \mid X_t = 0\}$. D'après la proposition 3, si \mathbb{P} est une solution de (4), le processus arrêté $X|_T$ a une loi uniquement déterminée par celle de X_0 , β^+ et β^- , et il est indépendant conditionnellement à X_0 de la tribu initiale \mathcal{F}_0 . D'autre part, compte tenu de la propriété de désintégration, nous pourrions nous limiter à une condition initiale déterministe.

Les cas où l'un des paramètres est nul est particulier : la fonction-paramètre est identiquement nulle sur le demi-axe correspondant, et une fois que le processus a atteint ce dernier, nous savons qu'il poursuit son évolution selon un mouvement brownien qui finira, alors, par atteindre $\{0\}$ en temps fini. Notre description reposant essentiellement sur les sauts et la dérive des solutions, nous supposons pour la suite que les paramètres sont, sauf précision du contraire, non nuls.

Le comportement hors des sauts est obtenu par résolution de l'équation différentielle ordinaire

$$dt = -\phi(x) dx = -\beta^\pm x dx,$$

qui s'intègre dans le demi-plan positif ou négatif sous la forme

$$x(t) = \pm \sqrt{-\frac{2}{\beta^\pm}(t - t_0) + x(t_0)^2}.$$

Le flot déterministe est autonome et ses courbes intégrales, singulières en $x = 0$, sont des demi-arcs de paraboles d'axe $t'Ot$ dont la direction est donnée par l'opposé du signe de β^+ ou de β^- selon le demi-plan considéré. Le signe des coefficients intervient ainsi dans la dynamique déterministe de telles martingales puisqu'en fonction de celui-ci, les courbes intégrales ont une monotonie différente.

Le comportement déterministe est vis-à-vis de $\{0\}$ inverse du comportement aléatoire. En effet, les sauts sont dirigés en sens inverse de la dérive compensatrice. Lorsqu'un saut survient en un temps t tel que, par exemple, $X_{t-} > 0$, on a

$$X_t = X_{t-} + \beta^+ X_{t-} = (1 + \beta^+) X_{t-}.$$

Ainsi, vis-à-vis du comportement saltatoire, trois situations se présentent :

- *mélange partiel*, $\beta^+ < -1$: le saut occasionne un changement de signe ;
- *découplage partiel*, $\beta^+ > -1$: il n'y a pas de changement de signe strict après le saut. Ceci a pour conséquence que la fin d'excursion associée garde un signe constant (ceci vaut également pour $\beta^+ = 0$) ;
- *situation partiellement singulière*, $\beta^+ = -1$: un tel saut provoque une annulation et achève ainsi l'excursion. Ce cas est du type précédent puisque l'excursion s'achève sans changement de signe.

Lorsque les deux paramètres sont distincts de -1 , $x = 0$ est toujours un point de continuité des trajectoires. En effet, si $X_t = 0$, alors

$$(X_{t-})^2 = (\Delta X)_t^2 = \beta^\pm X_{t-} \Delta X_t = -\beta^\pm (X_{t-})^2, \quad \text{d'où} \quad X_{t-} = 0.$$

Si l'un des paramètres est égal à -1 , les annulations correspondantes ont lieu en des temps de sauts qui sont totalement inaccessibles.

Nous nommerons *comportements mélangeants* les cas où les deux paramètres sont strictement inférieurs à -1 , *comportements découplables* les cas où ils sont supérieurs ou égaux à -1 et *comportements semi-découplables* ceux où l'un d'entre eux est strictement inférieur à -1 tandis que l'autre y est supérieur.

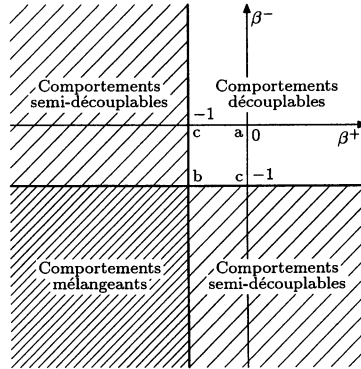


FIG. 1. — *Comportements en fonction des paramètres.*

Aux points de la première bissectrice correspondent les martingales d'Azéma symétriques dont l'unicité est connue. Certaines d'entre elles sont fameuses : le mouvement brownien (a), la première martingale d'Azéma (b), la martingale parabolique ($\beta^+ = \beta^- = -2$). Le cas (c) a été étudié dans [1] où il est montré que l'unicité a aussi lieu.

2.2. MARCHES ALÉATOIRES SOUS-JACENTES

Mis à part les cas où l'un des paramètres est nul et qu'alors les fins d'excursions de signe correspondant sont browniennes, le comportement des martingales d'Azéma asymétriques est partiellement décrit par la suite des limites à droite aux points de discontinuité le long d'une fin d'excursion puisqu'entre deux tels points leurs trajectoires sont des arcs paraboliques déterminés. En effet, la connaissance de ces valeurs en un temps Ainsi, la connaissance d'une telle suite renseigne sur la bornitude et l'annulation de la fin d'excursion.

Nous limiterons cete étude à deux situations. La première est la situation partiellement découplable non singulière pour laquelle toute excursion, initialement de signe correspondant au paramètre plus grand que -1 , conserve un signe constant. La seconde est la situation mélangeante où la martingale change de signe à chaque saut. Les autres cas se décrivent ou bien immédiatement (cas partiellement singuliers), ou bien en adaptant ce qui suit.

Marche simple. — Nous étudions le comportement de la suite des points de discontinuité le long d'une fin d'excursion issue de $x > 0$, lorsque $\beta^+ \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$. La résolution du système poissonnien est aisée et s'exprime dans le temps relatif sous la forme

$$X_{a_t} = x(1 + \beta^+)^{N_t} e^{-\beta^+ t},$$

où N est un processus de Poisson standard indépendant de la tribu initiale. Après tout nombre fini de sauts cette expression demeure strictement positive. Ainsi cette fin d'excursion épuise les instants de sauts du processus de Poisson. En prenant le logarithme de cette expression, on obtient

$$\ln X_{a_t} = \ln x + \ln(1 + \beta^+) N_t - \beta^+ t.$$

Soient $(\xi_n)_{n \geq 1}$ les valeurs de $\ln X_a$ aux instants successifs de saut et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des durées entre deux sauts du processus de Poisson. Le processus à temps discret $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une marche aléatoire non dégénérée, c'est-à-dire que ses accroissements sont mutuellement indépendants, identiquement distribués et non triviaux. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\xi_n - \xi_{n-1} = \ln(1 + \beta^+) - \beta^+ T_n,$$

dont l'espérance est

$$\mathbb{E}[\xi_n - \xi_{n-1}] = \ln(1 + \beta^+) - \beta^+.$$

Cette quantité est strictement négative puisque $\beta^+ \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$. L'application de la loi forte des grands nombres indique que

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty \quad \text{presque sûrement.}$$

On en déduit que la suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est presque sûrement bornée supérieurement et, par passage à l'exponentielle, que la fin d'excursion l'est aussi, ce qui implique que sa durée est presque sûrement finie. De plus, on peut remarquer que l'atteinte de $\{0\}$ s'effectue toujours avec une accumulation de sauts.

Marche double. — Supposons que $(\beta^+, \beta^-) \in]-\infty, -1]^2$ et que l'excursion débute en $x > 0$. La résolution du système poissonnien conduit à une expression plus complexe que précédemment

$$X_{a_t} = x(1 + \beta^+)^{[(N_t+1)/2]}(1 + \beta^-)^{[N_t/2]} \exp\left(-\beta^{(-1)^{N_t}} t + (\beta^+ - \beta^-) \sum_{i=1}^{N_t} (-1)^i T_i\right),$$

où $[.]$ désigne la partie entière et $\beta^{(-1)^{N_t}}$ vaut β^+ ou β^- selon que N_t est pair ou non.

Comme précédemment, les instants de sauts du processus de Poisson sont épuisés. Aussi pouvons nous considérer les deux suites $(\xi_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\xi_n^-)_{n \in \mathbb{N}^*}$ formées

des logarithmes des limites à droite successives aux points de discontinuité de signe positif et négatif respectivement. Plus précisément :

$$\xi_0^+ = \ln x, \quad \xi_0^- = \ln x + \ln(1 + \beta^+) - \beta^+ T_1,$$

et pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \xi_n^+ - \xi_{n-1}^+ &= \ln((1 + \beta^+)(1 + \beta^-)) - \beta^+ T_{2n-1} - \beta^- T_{2n}, \\ \xi_n^- - \xi_{n-1}^- &= \ln((1 + \beta^+)(1 + \beta^-)) - \beta^- T_{2n} - \beta^+ T_{2n+1}. \end{aligned}$$

Ce sont deux marches aléatoires de comportement asymptotique identique. Leurs accroissements ont pour espérance

$$\gamma(\beta^+, \beta^-) = \ln((1 + \beta^+)(1 + \beta^-)) - \beta^+ - \beta^-. \quad (5)$$

Nous noterons simplement γ pour $\gamma(\beta^+, \beta^-)$ par la suite.

Lorsque $\gamma < 0$, l'application de la loi forte des grands nombres conduit comme précédemment à affirmer que la fin d'excursion a une durée presque sûrement finie et que l'annulation finale se fait avec une accumulation de sauts de part et d'autre de $\{0\}$.

Lorsque $\gamma > 0$, on déduit de cette loi que la fin d'excursion est presque sûrement non bornée inférieurement et supérieurement. Ceci implique que sa durée est infinie et que les trajectoires de la martingale X ne s'annulent jamais.

Si $\gamma = 0$, ces suites sont presque sûrement non bornées inférieurement et supérieurement. Le premier fait a pour conséquence que presque sûrement 0 est valeur d'adhérence à droite et à gauche des trajectoires. Le second implique comme précédemment que la durée d'une fin d'excursion est presque sûrement infinie.

Durée d'excursion. — Par excursion, nous entendons ici excursion hors de $\{0\}$ enjambant un temps d'arrêt fini, c'est-à-dire la portion de trajectoire comprise entre le dernier instant d'annulation avant ce temps d'arrêt et le suivant. La durée d'une excursion est la différence de ces deux instants. Pour en démontrer la finitude, il suffit alors de s'intéresser à celle de la fin d'excursion, ce qui revient par translation à se poser cette question depuis l'instant $t = 0$, avec, par désintégration, une condition initiale déterministe différente de $x = 0$. Les résultats précédents permettent d'établir la proposition suivante :

PROPOSITION 7. — *Si $\beta^+ < -1$, $\beta^- < -1$ et $\gamma(\beta^+, \beta^-) \geq 0$, une martingale d'Azéma asymétrique de paramètres (β^+, β^-) ne comporte qu'une unique excursion hors de $\{0\}$. Pour les autres valeurs des paramètres, les excursions sont toutes de durée finie.*

Démonstration. — Nous supposons le processus issu de $x > 0$, le cas d'une condition initiale négative s'obtenant par échange des deux paramètres. Si $\beta^+ \geq -1$, alors la durée de fin d'excursion est finie : la majeure partie des cas a été vue précédemment, si $\beta^+ = 0$ la fin d'excursion est brownienne et atteint alors $\{0\}$ en temps fini, si $\beta^+ = -1$ elle s'achève au premier instant de saut qui est fini. Si $\beta^+ < -1$, deux cas se présentent : ou bien $\beta^- < -1$ auquel cas la proposition vaut par application des résultats sur la marche double, ou bien $\beta^- \geq -1$ et après le premier instant de saut l'excursion est négative et guidée par ce second paramètre, elle s'achève alors en temps fini. \square

L'étude du signe de γ en fonction des paramètres est relativement aisée et fait apparaître la courbe (C), sorte de ligne de flottaison, d'équation $\gamma = 0$.

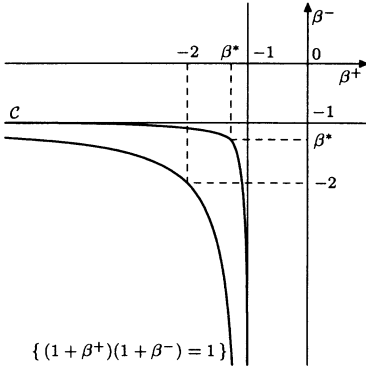


FIG. 2. — Courbes particulières.

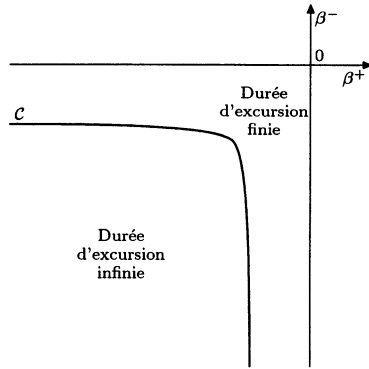


FIG. 3. — Durée d'excursion.

L'intersection entre celle-ci et la première bissectrice est réduite au point (β^*, β^*) , où β^* est l'unique racine réelle de l'équation $1 + \beta + e^\beta = 0$: c'est précisément le paramètre critique mis en évidence dans [7]

$$\beta^* = -1,278\,464\,543\dots$$

Lorsque le comportement est mélangeant et $(1 + \beta^+)(1 + \beta^-) \geq 1$, les suites précédemment étudiées sont croissantes comme le montre l'expression de leurs accroissements. Alors, les traces des trajectoires sur chaque demi-axe sont monotones, ce qui entraîne que la durée d'excursion est infinie, et notamment que γ est positif. Ce fait se constate analytiquement : si $\gamma \leq 0$, puisque $-\beta^+ - \beta^- > 0$, on a nécessairement $\ln((1 + \beta^+)(1 + \beta^-)) < 0$, c'est-à-dire $(1 + \beta^+)(1 + \beta^-) < 1$.

Des méthodes diverses permettent de conclure quant aux propriétés de finitude de ces temps. L'une d'entre elles consiste à appliquer un des avatars du lemme de Gronwall au temps relatif et montrer qu'il explose ou n'explose pas en temps fini. Nous y avons préféré une approche probabiliste qui a l'avantage d'être plus descriptive.

Remarque. — Une étude relativement simple des comportements trajectoires montre qu'une martingale d'Azéma asymétrique de condition initiale bornée est localement en temps uniformément bornée si et seulement si $\beta^+ < 0$, $\beta^- < 0$ et $(1 + \beta^+)(1 + \beta^-) \leq 1$. Dans le cas symétrique cette condition se réduit à $\beta \in [-2, 0[$. Nous ne nous servirons pas de ces propriétés par la suite.

2.3. DÉPASSEMENT

Pour $B \in \text{Bor}(\mathbb{R})$, un borélien de \mathbb{R} , soit Ψ_B la fonction définie sur \mathbb{R}^* dont la valeur en x est la probabilité qu'une martingale d'Azéma asymétrique issue de x dépasse 1 en valeur absolue avant de s'annuler et se trouve alors dans le borélien B — la dépendance en les paramètres (β^+, β^-) étant implicite. En posant

$$S = \inf\{t \geq 0 \mid |X_t| \geq 1\} \quad \text{et} \quad T = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = 0\},$$

on a

$$\Psi_B(x) = \mathbb{P}^x\{X_S \in B, S \leq T\};$$

et il est à noter que si $|x| \geq 1$, $\Psi_B(x) = 1_B(x)$.

D'après la proposition 3, cette probabilité ne dépend que de $x \neq 0$, de B et des paramètres de l'équation de structure. De plus, lorsque $|x| \leq 1$, elle ne dépend que de l'intersection de B avec l'ensemble des valeurs possibles de X_S qui est la réunion de deux intervalles compacts dépendant des valeurs des paramètres. Ceci permettra dans certains cas de supposer B borné.

Le lemme suivant justifie que nous nous limitons à l'étude du dépassement du seuil 1 dans le cas des martingales d'Azéma asymétriques.

LEMME 2. — Soient $B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, $S^\varepsilon = \inf\{t \geq 0 \mid |X_t| \geq \varepsilon\}$, $x \in \mathbb{R}^*$ et \mathbb{P}^x une loi de martingale d'Azéma asymétrique issue de x . Alors

$$\mathbb{P}^x\{X_{S^\varepsilon} \in B, S^\varepsilon < T\} = \Psi_{B/\varepsilon}(x/\varepsilon).$$

Démonstration. — En divisant l'équation (4) par ε^2

$$d[X/\varepsilon, X/\varepsilon]_t = dt/\varepsilon^2 + (\mathbb{1}_{\{(X/\varepsilon)_{t-} \geq 0\}} \beta^+ + \mathbb{1}_{\{(X/\varepsilon)_{t-} < 0\}} \beta^-)(X/\varepsilon)_{t-} d(X/\varepsilon)_t$$

et en changeant de temps

$$d[X/\varepsilon, X/\varepsilon]_{\varepsilon^2 t} = dt + (\mathbb{1}_{\{(X/\varepsilon)_{\varepsilon^2 t-} \geq 0\}} \beta^+ + \mathbb{1}_{\{(X/\varepsilon)_{\varepsilon^2 t-} < 0\}} \beta^-)(X/\varepsilon)_{\varepsilon^2 t-} d(X/\varepsilon)_{\varepsilon^2 t},$$

on obtient une martingale $(X_{\varepsilon^2 t}/\varepsilon)_{t \geq 0}$ vérifiant (4) et ayant pour valeur initiale x/ε . La propriété d'unicité en loi des fins d'excursions implique immédiatement l'identité annoncée. \square

Cette propriété ne peut être qualifiée pour l'instant d'invariance par changement d'échelle. Avec l'unicité globale, nous verrons que celle-ci a lieu.

AFFIRMATION. — Si la durée d'excursion est infinie, $\Psi_{\mathbb{R}}$ est identiquement égal à 1. Sinon, $\Psi_{\mathbb{R}}$ tend vers 0 en 0.

Démonstration. — D'après ce qui précède, pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé et $\varepsilon > 0$, la probabilité de dépasser le seuil ε au cours de la fin d'excursion issue de x vérifie $\mathbb{P}^x\{S^\varepsilon < T\} = \Psi_{\mathbb{R}}(x/\varepsilon)$. Lorsque ε croît, cette probabilité décroît. Lorsque la durée d'excursion est finie, les fins d'excursions sont bornées, et ces probabilités tendent vers 0 quand ε tend vers l'infini. Lorsque la durée d'excursion est infinie, les fins d'excursions sont les trajectoires du processus et elles sont non bornées. Ces probabilités sont alors égales à 1. \square

La détermination du comportement au voisinage de 0 des mesures $\Psi(x)$ sera d'une importance cruciale dans les démonstrations d'unicité. Le fait suivant est une conséquence simple du théorème de Vitali-Hahn-Saks.

LEMME 3. — Soit $(\beta^+, \beta^-) \in \mathbb{R}^2$. S'il existe $m : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout borélien B , les limites suivantes existent et sont finies

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Psi_B(x)}{m(x)} = L^+(B), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\Psi_B(x)}{m(x)} = L^-(B);$$

alors les fonctions d'ensembles boréliens L^+ et L^- que ces limites définissent sont des mesures boréliennes positives.

Sous ces hypothèses, il suffit de montrer cette affirmation pour une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels, positifs par exemple, tendant vers 0. La construction d'une mesure positive finie par rapport à laquelle toutes les mesures $\Psi(x_n)/m(x_n)$ sont absolument continues est classique, et la conclusion suit par application du théorème cité.

En fait, il est même possible de montrer que chaque mesure $\Psi(x)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, sauf en -1 et 1 où peuvent se trouver des atomes liés à la possibilité d'un franchissement continu des seuils.

3. Comportements simples

3.1. DÉPASSEMENTS CONTINUS

Nous montrons ici que le principe d'assemblage est satisfait pour tous $(\beta^+, \beta^-) \in [-2, 0]^2$ — et donc que l'unicité (théorème 1) a lieu pour ces valeurs des paramètres. Ceci résulte de la proposition suivante :

PROPOSITION 8. — *Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne s'annulant en $z \in \mathbb{R}$ telle que sur un voisinage de z l'application $x \mapsto x + \phi(x)$ est une contraction en z . Si \mathbb{P} est une solution de l'équation de structure associée à ϕ issue de z , alors pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit*

$$\mathbb{P}\{X_{S^\varepsilon} = z + \varepsilon \mid \mathcal{F}_0\} = \mathbb{P}\{X_{S^\varepsilon} = z - \varepsilon \mid \mathcal{F}_0\} = \frac{1}{2},$$

où $S^\varepsilon = \inf\{t \geq 0 \mid |X_t - z| \geq \varepsilon\}$.

Démonstration. — Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a pour tout $x \in [z - \varepsilon, z + \varepsilon]$

$$x + \phi(x) \in [z - |x - z|, z + |x - z|] \subset [z - \varepsilon, z + \varepsilon].$$

Remarquons tout d'abord que ϕ étant bornée sur $[z - \varepsilon, z + \varepsilon]$, le temps d'arrêt S^ε est fini puisqu'il précède le premier instant de sortie de cet intervalle compact qui est lui-même fini. Comme $X_{S^\varepsilon-} - z \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ et $|X_{S^\varepsilon} - z| \geq \varepsilon$, il y a deux possibilités : ou bien $X_{S^\varepsilon-} = X_{S^\varepsilon}$, auquel cas $X_{S^\varepsilon} \in \{z - \varepsilon, z + \varepsilon\}$, ou bien $X_{S^\varepsilon-} \neq X_{S^\varepsilon}$, et alors $X_{S^\varepsilon} = X_{S^\varepsilon-} + \phi(X_{S^\varepsilon-})$ qui est encore, d'après ce qui précède, dans l'intervalle $[z - \varepsilon, z + \varepsilon]$. Ainsi, on a dans les deux cas $X_{S^\varepsilon} \in \{z - \varepsilon, z + \varepsilon\}$. Puisque sur l'intervalle $[0, S^\varepsilon]$ le processus X est uniformément borné, par application de la propriété de martingale

$$\mathbb{E}[X_{S^\varepsilon} \mid \mathcal{F}_0] = (z + \varepsilon) \mathbb{P}\{X_{S^\varepsilon} = z + \varepsilon \mid \mathcal{F}_0\} + (z - \varepsilon) \mathbb{P}\{X_{S^\varepsilon} = z - \varepsilon \mid \mathcal{F}_0\} = z$$

et naturellement

$$\mathbb{P}\{X_{S^\varepsilon} = z + \varepsilon \mid \mathcal{F}_0\} + \mathbb{P}\{X_{S^\varepsilon} = z - \varepsilon \mid \mathcal{F}_0\} = 1,$$

d'où résulte l'identification de la loi de X_{S^ε} conditionnellement à \mathcal{F}_0 . \square

Remarques. — a) Le résultat précédent est local. D'une part, il ne repose que sur la nature de ϕ au voisinage de z . D'autre part, il garantit la possibilité d'un recollement à l'instant S^ε de processus convenablement choisis.

b) Avec des hypothèses convenables sur ϕ (voir le principe d'assemblage) cette proposition donne quelques types de singularités pour lesquelles on saura dire que l'unicité a lieu. Nous ne les avons pas inclus dans l'énoncé du théorème 2 par souci d'homogénéité.

c) Le titre de cette sous-section est pleinement justifié par le fait suivant : la famille de temps d'arrêt $(S^\eta)_{0 < \eta < \varepsilon}$ est strictement croissante avec η et tend vers S^ε quand η tend vers ε . Le temps S^ε est prévisible et, dès lors, ne coïncide avec aucun instant de saut. Le seuil est dépassé continûment.

Dans la suite \mathbb{P} désignera une loi de martingale d'Azéma asymétrique issue de l'origine, S sera le premier instant où X dépasse 1 en valeur absolue, la tribu \mathcal{F}_0 sera quelconque, et les instants de découpage seront définis par

$$S_0^\varepsilon = 0, \quad T_0^\varepsilon = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = 0\}$$

et pour tout entier $n \geq 1$

$$S_n^\varepsilon = \inf\{t \geq T_{n-1}^\varepsilon \mid |X_t| \geq \varepsilon\}, \quad T_n^\varepsilon = \inf\{t \geq S_n^\varepsilon \mid X_t = 0\},$$

où ε est un réel strictement positif.

3.2. COMPORTEMENTS DÉCOUPLABLES

Soient $(\beta^+, \beta^-) \in [-1, +\infty]^2$. Le caractère particulier associé à ces valeurs des paramètres est que les excursions se font à signe constant. Si B est un borélien de la droite réelle, nous noterons $B_+ = B \cap \mathbb{R}_+$ et $B_- = B \cap \mathbb{R}_-^*$.

LEMME 4. — Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. D'une part, pour tout x non nul,

$$\Psi_B(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \Psi_{B_+}(x) + \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x) \Psi_{B_-}(x);$$

d'autre part, le borélien B étant fixé,

- (i) si $\beta^+ \in [-1, 0]$ et $0 < x \leq 1$, alors $\Psi_B(x) = |x| \mathbb{1}_B(1)$;
- (ii) si $\beta^+ \in]0, +\infty[$, alors $\Psi_B(x) = |x| (L^+(B) + o(1))$ au voisinage de 0^+ .

La quantité $L^+(B)$ définit une mesure borélienne, positive, finie, non nulle, portée par $[1, 1 + \beta^+]$ et uniquement déterminée par $0 < \beta^+ < +\infty$. Pour $-1 \leq x < 0$, les points précédents sont satisfaits après des changements convenables de signes et d'exposants.

Démonstration. — On a évidemment $\Psi_B = \Psi_{B_+} + \Psi_{B_-}$. Puisque toute excursion issue d'un $x > 0$ (resp. $x < 0$) demeure positive (resp. négative), on a $\Psi_{B_-}(x) = 0$ (resp. $\Psi_{B_+}(x) = 0$). La décomposition de Ψ en résulte.

Soit $x \in]0, 1]$. Si $\beta^+ \in [-1, 0]$, il est aisé de voir que $X_{S \wedge T}$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$. L'application du théorème de Doob montre que cette variable est d'espérance x , la conclusion suit aisément.

Pour le point (ii), nous renvoyons à la démonstration de [8]. Elle utilise la théorie du renouvellement que nous aurons, par la suite, suffisamment l'occasion d'employer. Enfin, le lemme 3 assure que L^+ et L^- sont des mesures boréliennes. \square

Soient $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $0 < \varepsilon < 1$ et $(S_n^\varepsilon, T_n^\varepsilon)_{n \in \mathbb{N}}$ les temps de découpage associés. Il existe un unique n aléatoire tel que $S_n^\varepsilon \leq S \leq T_n^\varepsilon$, de sorte que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_S \in B \mid \mathcal{F}_0\} &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\{S_n^\varepsilon \leq S \leq T_n^\varepsilon, X_S \in B \mid \mathcal{F}_0\} \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[\mathbb{P}\{S_n^\varepsilon \leq S \leq T_n^\varepsilon, X_S \in B \mid \mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}\} \mid \mathcal{F}_0]. \end{aligned}$$

Puisque les temps aléatoires rencontrés sont des temps d'arrêt, alors $\{S_n^\varepsilon \leq S\} \in \mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}$, et on a

$$\mathbb{P}\{X_S \in B \mid \mathcal{F}_0\} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S\}} \mathbb{P}\{S_n^\varepsilon \leq S \leq T_n^\varepsilon, X_S \in B \mid \mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}\} \mid \mathcal{F}_0]$$

Lorsque $S_n^\varepsilon \leq S$, $\mathbb{P}\{S_n^\varepsilon \leq S \leq T_n^\varepsilon, X_S \in B \mid \mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}\}$ est la probabilité qu'une solution issue de $X_{S_n^\varepsilon} \neq 0$ dépasse 1 lors de sa première excursion et soit dans B au premier instant où cela advient, elle vaut donc $\Psi_B(X_{S_n^\varepsilon})$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_S \in B \mid \mathcal{F}_0\} &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S\}} \Psi_B(X_{S_n^\varepsilon}) \mid \mathcal{F}_0] \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S\}} (\mathbb{1}_{\{X_{S_n^\varepsilon} > 0\}} \Psi_{B_+}(X_{S_n^\varepsilon}) + \mathbb{1}_{\{X_{S_n^\varepsilon} < 0\}} \Psi_{B_-}(X_{S_n^\varepsilon})) \mid \mathcal{F}_0] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} > 0\}} \Psi_{B_+}(X_{S_n^\varepsilon}) \mid \mathcal{F}_0\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} < 0\}} \Psi_{B_-}(X_{S_n^\varepsilon}) \mid \mathcal{F}_0\right]. \end{aligned}$$

L'étude du comportement d'une seule de ces deux dernières espérances conditionnelles suffira, par exemple celle de la première. L'application de l'inégalité conditionnelle du nombre de montées (*voir* [3], chap. V, § 26) à la martingale X^S , bornée par $c = 1 \vee (1 + \beta^+) \vee (1 + \beta^-)$, indique que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} > 0\}} \mid \mathcal{F}_0\right] \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|X_t^S| \mid \mathcal{F}_0] \leq \frac{c}{\varepsilon}.$$

Si $X_{S_n^\varepsilon} > 0$, alors $X_{S_n^\varepsilon}$ est dans l'intervalle $[\varepsilon, (1 \vee (1 + \beta^+))\varepsilon]$. Posons

$$s^+(\varepsilon) = \sup_{x \in [\varepsilon, (1 \vee (1 + \beta^+))\varepsilon]} \left| L^+(B_+) - \frac{\Psi_{B_+}(x)}{|x|} \right|.$$

Puisque $\Psi_{B_+}(x) = x(L^+(B_+) + o(1))$, $s^+(\varepsilon)$ tend vers 0 avec ε . Comme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} > 0\}} |X_{S_n^\varepsilon}| \times \left| L^+(B_+) - \frac{\Psi_{B_+}(X_{S_n^\varepsilon})}{|X_{S_n^\varepsilon}|} \right| \mid \mathcal{F}_0\right] \\ \leq \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} > 0\}} |X_{S_n^\varepsilon}| \times s^+(\varepsilon) \mid \mathcal{F}_0\right] \\ \leq \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} > 0\}} c\varepsilon \times s^+(\varepsilon) \mid \mathcal{F}_0\right] \leq c^2 s^+(\varepsilon), \end{aligned}$$

on a alors

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} > 0\}} |X_{S_n^\varepsilon}| \mid \mathcal{F}_0\right] L^+(B_+) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}\{X_S \in B_+ \mid \mathcal{F}_0\}.$$

Notamment, si $L^+(B_+) = 0$, la probabilité conditionnelle précédente est nulle. Il existe ainsi des boréliens pour lesquels $L^+(B_+)$ est strictement positif. Pour B de cette sorte, on a

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} > 0\}} |X_{S_n^\varepsilon}| \mid \mathcal{F}_0\right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}\{X_S \in B_+ \mid \mathcal{F}_0\}}{L^+(B_+)}.$$

Notons ℓ^+ cette limite. C'est une variable aléatoire \mathcal{F}_0 -mesurable ne dépendant pas de B et on a

$$\mathbb{P}\{X_S \in B_+ \mid \mathcal{F}_0\} = L^+(B_+) \ell^+ \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}).$$

Ce qui précède s'applique à B_- , et plus généralement

$$\mathbb{P}\{X_S \in B \mid \mathcal{F}_0\} = L^+(B_+) \ell^+ + L^-(B_-) \ell^- \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}).$$

Soient M^+ et M^- les espérances respectives des mesures L^+ et L^- . Des identités

$$L^+(\mathbb{R}) \ell^+ + L^-(\mathbb{R}) \ell^- = 1 \quad \text{et} \quad M^+ \ell^+ + M^- \ell^- = 0,$$

on déduit que

$$\ell^+ = \frac{-M^-}{M^+ L^-(\mathbb{R}) - M^- L^+(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \ell^- = \frac{M^+}{M^+ L^-(\mathbb{R}) - M^- L^+(\mathbb{R})}.$$

Ce sont des constantes qui, ainsi que les mesures L^+ et L^- , ne dépendent que des paramètres de l'équation. Le principe d'assemblage est alors vérifié : il y a unicité lorsque $(\beta^+, \beta^-) \in [-1, +\infty]^2$.

3.3. COMPORTEMENTS SEMI-DÉCOUPLABLES

Nous traitons maintenant les cas semi-découplables, c'est-à-dire ceux pour lesquels un des paramètres est supérieur à -1 tandis que l'autre est strictement inférieur à -1 . Plus précisément nous supposons $\beta^+ \in [-1, +\infty[$ et $\beta^- \in]-\infty, -1[$ — les cas complémentaires s'obtenant par un simple échange des paramètres. La méthode utilisée ici pour établir l'unicité est proche de celle qui précède.

Soient $0 < \varepsilon < 1$ et $(S_n^\varepsilon, T_n^\varepsilon)_{n \in \mathbb{N}}$ les temps de découpage associés. Soit n aléatoire tel que $S_n^\varepsilon \leq S \leq T_n^\varepsilon$. Trois possibilités se présentent :

- (i) $X_{S_n^\varepsilon} > 0$, auquel cas la suite de l'excursion est positive.
- (ii) $X_{S_n^\varepsilon} < 0$ et le premier saut suivant est postérieur à l'atteinte de -1 .
- (iii) $X_{S_n^\varepsilon} < 0$ et un saut survient avant d'avoir atteint -1 . Alors l'excursion est positive après ce saut et $X_S > 0$.

Soit $B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$. De la même manière que dans la section précédente et en tenant compte des remarques plus haut, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_S \in B \mid \mathcal{F}_0\} &= \mathbb{E} \left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} > 0\}} \mathbb{P}\{S_n^\varepsilon \leq S \leq T_n^\varepsilon, X_S \in B_+ \mid \mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}\} \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} < 0\}} \mathbb{P}\{S_n^\varepsilon \leq S \leq T_n^\varepsilon, X_S \in B_- \mid \mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}\} \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} < 0\}} \mathbb{P}\{S_n^\varepsilon \leq S \leq T_n^\varepsilon, X_S \in B_+ \mid \mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}\} \mid \mathcal{F}_0 \right]. \end{aligned}$$

Le premier terme. — Par translation par le temps S_n^ε et conditionnement par l'événement $\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} > 0\}$,

$$\mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} > 0\}} \mathbb{P}\{S_n^\varepsilon \leq S \leq T_n^\varepsilon, X_S \in B_+ \mid \mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}\} = \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} > 0\}} \Psi_{B_+}(X_{S_n^\varepsilon}).$$

Le premier terme est identique à ceux rencontrés précédemment.

Le deuxième terme. — Remarquons que si $X_{S_n^\varepsilon} < 0$, alors $X_{S_n^\varepsilon} = -\varepsilon$. Ce terme traduit la possibilité que $X_{S_n^\varepsilon} < 0$ et X atteigne -1 avant de sauter.

Nous raisonnerons conditionnellement à $\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} = -\varepsilon\}$. Soit U_n^ε le premier instant de saut après S_n^ε . La résolution du système poissonnien indique que l'on a

$$X_{U_n^\varepsilon-} = -\varepsilon e^{-\beta^- J}, \quad X_{U_n^\varepsilon} = -\varepsilon(1 + \beta^-) e^{-\beta^- J}$$

où J est une variable exponentielle de paramètre 1 indépendante de $\mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}$. Ainsi, pour que $S_n^\varepsilon \leq S \leq T_n^\varepsilon$ et $X_S \in B_-$, il est nécessaire que $-1 \in B_-$ et $-\varepsilon e^{-\beta^- J} < -1$; d'où

$$\mathbb{P}\{S_n^\varepsilon \leq S \leq T_n^\varepsilon, X_S \in B_- \mid \mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}\} = \mathbb{1}_{B_-}(-1) \int_{\ln \varepsilon / \beta^-}^{+\infty} e^{-t} dt = \mathbb{1}_{B_-}(-1) \varepsilon^{-1/\beta^-}.$$

Et le deuxième terme est identifié.

Le troisième terme. — Ici, le premier saut est effectué avant que -1 soit atteint.

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} < 0\}} \mathbb{P}\{S_n^\varepsilon \leq S \leq T_n^\varepsilon, X_S \in B_+ \mid \mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}\} \\ &= \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} < 0\}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_{U_n^\varepsilon-} > -1\}} \mathbb{P}\{U_n^\varepsilon \leq S \leq T_n^\varepsilon, X_S \in B_+ \mid \mathcal{F}_{U_n^\varepsilon}\} \mid \mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}\right] \\ &= \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} < 0\}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_{U_n^\varepsilon-} > -1\}} \Psi_{B_+}(X_{U_n^\varepsilon-}) \mid \mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}\right] \\ &= \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} < 0\}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{-\varepsilon e^{-\beta^- J} > -1\}} \Psi_{B_+}(-\varepsilon(1 + \beta^-) e^{-\beta^- J}) \mid \mathcal{F}_{S_n^\varepsilon}\right] \\ &= \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} < 0\}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{-\varepsilon e^{-\beta^- J} > -1\}} \Psi_{B_+}(-\varepsilon(1 + \beta^-) e^{-\beta^- J})\right] \\ &= \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} < 0\}} \int_0^{\ln \varepsilon / \beta^-} \Psi_{B_+}(-\varepsilon(1 + \beta^-) e^{-\beta^- j}) e^{-j} dj. \\ &= \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} < 0\}} (\varepsilon(-1 - \beta^-))^{-1/\beta^-} \int_{\varepsilon(-1 - \beta^-)}^{-1 - \beta^-} \Psi_{B_+}(u) u^{1/\beta^- - 1} du. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est convergente en 0 : si $L^+(B_+) > 0$, alors $\Psi_{B_+}(u) u^{1/\beta^- - 1}$ est équivalent à $L^+(B_+) u^{1/\beta^-}$ en 0, ce qui assure l'intégrabilité; si $L^+(B_+) = 0$, le critère d'équivalence est remplacé par un critère de domination qui conduit à la même conclusion. Notons

$$C_{B_+}(\varepsilon) = (-1 - \beta^-)^{-1/\beta^-} \int_{\varepsilon(-1 - \beta^-)}^{-1 - \beta^-} \Psi_{B_+}(u) u^{1/\beta^- - 1} du,$$

fonction que nous prolongeons en 0 par sa limite.

Regroupement des trois termes. — D'après ce qui précède

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_S \in B \mid \mathcal{F}_0\} &= \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} > 0\}} \Psi_{B_+}(X_{S_n^\varepsilon}) \mid \mathcal{F}_0\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} < 0\}} \varepsilon^{-1/\beta^-} \mid \mathcal{F}_0\right] (\mathbb{1}_{B_-}(-1) + C_{B_+}(\varepsilon)). \end{aligned}$$

En remplaçant B par \mathbb{R}_- dans l'égalité ci-dessus, on constate que le premier facteur du second terme ne dépend pas de ε . C'est une variable aléatoire \mathcal{F}_0 -mesurable que

nous notons ℓ^- :

$$\ell^- = \mathbb{P}\{X_S < 0 \mid \mathcal{F}_0\} = \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} < 0\}} \varepsilon^{-1/\beta^-} \mid \mathcal{F}_0\right].$$

À l'aide des mêmes arguments qu'à la sous-section précédente, on montre que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} > 0\}} \left| \Psi_{B_+}(X_{S_n^\varepsilon}) - |X_{S_n^\varepsilon}| \times L^+(B_+) \right| \mid \mathcal{F}_0\right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Si $L^+(B_+) > 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S, X_{S_n^\varepsilon} > 0\}} |X_{S_n^\varepsilon}| \mid \mathcal{F}_0\right] \\ & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}\{X_S \in B \mid \mathcal{F}_0\} - (C_{B_+}(0) + \mathbb{1}_{B_-}(-1)) \ell^-}{L^+(B_+)}. \end{aligned}$$

Cette limite ne dépend pas de B , nous la notons ℓ^+ . On a finalement

$$\mathbb{P}\{X_S \in B \mid \mathcal{F}_0\} = L^+(B_+) \ell^+ + (C_{B_+}(0) + \mathbb{1}_{B_-}(-1)) \ell^-$$

Enfin, de $\mathbb{P}\{X_S \in \mathbb{R} \mid \mathcal{F}_0\} = 1$ et $\mathbb{E}[X_S \mid \mathcal{F}_0] = 0$, on montre aisément que ℓ^+ et ℓ^- sont des constantes déterminées, tout comme les autres quantités, par les seuls paramètres de l'équation. Le principe d'assemblage est vérifié et l'unicité acquise pour les cas semi-découplables.

4. Comportements mélangés

Dans cette section, les paramètres β^+ et β^- seront supposés strictement inférieurs à -1 : ce sont les seules valeurs pour lesquelles l'unicité reste à établir. La particularité de ce cas est que les martingales associées changent strictement de signe à chaque saut, c'est pourquoi cette situation a été qualifiée de mélangeante.

Rappelons que S est le premier instant où X dépasse 1 en valeur absolue, U est l'infimum des instants de saut qui est le premier instant de saut lorsque la condition initiale est différente de l'origine, et T est le premier instant d'annulation. Comme précédemment, B désigne un borélien de \mathbb{R} qui, par commodité, sera supposé borné. Les deux premières sous-sections traitent du comportement au voisinage de 0 des fonctions Ψ_B , et la dernière vérifie l'application du principe d'assemblage et donc l'unicité pour ces cas.

4.1. ÉQUATIONS DE RENOUVELLEMENT (PREMIÈRE FORME)

Considérons une solution issue de $0 < x \leq 1$. Deux éventualités se présentent : ou bien X saute avant d'avoir dépassé 1, ce qui équivaut à $0 < X_{U^-} \leq 1$; ou bien le saut survient après avoir dépassé 1, c'est-à-dire $X_{U^-} > 1$, auquel cas $X_S = 1$. Cette alternative se traduit comme suit

$$\begin{aligned} \Psi_B(x) &= \mathbb{P}^x\{X_S \in B, S \leq T\} \\ &= \mathbb{P}^x\{X_S \in B, U < S \leq T\} + \mathbb{P}^x\{X_S \in B, S \leq U \leq T\} \\ &= \mathbb{E}^x[\mathbb{P}^x\{X_S \in B, U < S \leq T \mid \mathcal{F}_U\}] + \mathbb{1}_B(1) \mathbb{P}^x\{X_{U^-} > 1\} \\ &= \mathbb{E}^x[\mathbb{1}_{\{U < S\}} \mathbb{P}^x\{X_S \in B, S \leq T \mid \mathcal{F}_U\}] + \mathbb{1}_B(1) \mathbb{P}^x\{x e^{-\beta^+ J} > 1\}, \end{aligned}$$

où J est la variable aléatoire telle que

$$X_{U-} = x e^{-\beta^+ J} \quad \text{et} \quad X_U = x(1 + \beta^+) e^{-\beta^+ J},$$

qui, sous \mathbb{P}^x , est de loi exponentielle de paramètre 1. Si $U < S$, alors $\mathbb{P}^x\{X_S \in B, S \leq T \mid \mathcal{F}_U\}$ est la probabilité qu'une solution issue de X_U dépasse 1 en valeur absolue avant son premier instant d'annulation et qu'elle soit alors dans B . Cette probabilité est donc égale à $\Psi_B(X_U)$.

$$\begin{aligned} \Psi_B(x) &= \mathbb{E}^x[\mathbb{1}_{\{x e^{-\beta^+ J} \leq 1\}} \Psi_B(x(1 + \beta^+) e^{-\beta^+ J})] + \mathbb{1}_B(1) \int_{\ln x/\beta^+, +\infty[} e^{-t} dt \\ &= \int_{[0, \ln x/\beta^+]} \Psi_B(x(1 + \beta^+) e^{-\beta^+ t}) e^{-t} dt + \mathbb{1}_B(1) x^{-1/\beta^+}. \end{aligned}$$

La mesure étant diffuse, on ne se préoccupera pas de l'ouverture ou de la fermeture des bornes d'intégration. Posons

$$\psi_B^\pm(\xi) = \Psi_B(\pm e^{-\xi}), \quad v^\pm = \ln(-1 - \beta^\pm), \quad n^\pm(u) = \mathbb{1}_{[v^\pm, +\infty[}(u) \frac{e^{(u-v^\pm)/\beta^\pm}}{-\beta^\pm}.$$

Les fonctions n^+ et n^- sont des densités de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue. Une règle de signe est à noter pour ce qui suivra : lorsqu'un des paramètres est inférieur à -2 (respectivement supérieur à -2), le réel v^\pm correspondant est de signe positif (respectivement négatif). Il semble assez important de garder ceci en mémoire pour la suite, en particulier pour juger du support des mesures rencontrées. Si $\xi \geq 0$, l'équation précédente s'écrit

$$\begin{aligned} \psi_B^+(\xi) &= \int_0^{-\xi/\beta^+} \psi_B^-(\xi + \beta^+ t - v^+) e^{-t} dt + \mathbb{1}_B(1) e^{\xi/\beta^+} \\ &= \int_{v^+}^{\xi+v^+} \psi_B^-(\xi - u) e^{(u-v^+)/\beta^+} \frac{du}{-\beta^+} + \mathbb{1}_B(1) e^{\xi/\beta^+} \\ &= \int_{-\infty}^{\xi+v^+} \psi_B^-(\xi - u) n^+(u) du + \mathbb{1}_B(1) e^{\xi/\beta^+}. \end{aligned} \quad (6)$$

Pour obtenir une équation de convolution, nous sommes amené à définir

$$f^+(\xi) = - \int_{\xi+v^+}^{+\infty} \psi_B^-(\xi - u) n^+(u) du + \mathbb{1}_B(1) e^{\xi/\beta^+}, \quad \xi \geq 0,$$

de sorte que

$$\psi_B^+(\xi) = \psi_B^- * n^+(\xi) + f^+(\xi), \quad \xi \geq 0.$$

Il ne reste plus qu'à prolonger cette identité sur \mathbb{R} : si $\xi \leq 0$, on a $\psi_B^+(\xi) = \mathbb{1}_B(\exp(-\xi))$ et il convient de poser

$$f^+(\xi) = \mathbb{1}_B(e^{-\xi}) - \psi_B^- * n^+(\xi), \quad \xi \leq 0.$$

Ainsi, l'équation de convolution plus haut est vérifiée pour tout ξ réel.

La fonction f^+ est clairement borélienne. En considérant chacune de ses expressions, on constate que ses valeurs sont comprises entre -1 et 1 : cette fonction est bornée. Que B soit borné implique que ψ_B^+ et ψ_B^- sont à support borné inférieurement. Puisque le noyau de convolution l'est aussi, il en est de même pour f^+ . Enfin, pour $\xi \geq 0$, on a $|f^+(\xi)| \leq 2 \exp(\xi/\beta^+)$. Notamment, cette fonction est intégrable.

La fonction ψ_B^- vérifie une équation similaire, ce qui permet de former le système suivant

$$\begin{aligned}\psi_B^+(\xi) &= \psi_B^- * n^+(\xi) + f^+(\xi) \\ \psi_B^-(\xi) &= \psi_B^+ * n^-(\xi) + f^-(\xi).\end{aligned}\tag{7}$$

Le découplage de telles équations se fait en les itérant, et, compte tenu de l'associativité et la commutativité de la convolution, on obtient deux équations de renouvellement d'inconnues respectives ψ_B^+ et ψ_B^- :

$$\begin{aligned}\psi_B^+(\xi) &= \psi_B^+ * N(\xi) + n^+ * f^-(\xi) + f^+(\xi) \\ \psi_B^-(\xi) &= \psi_B^- * N(\xi) + n^- * f^+(\xi) + f^-(\xi),\end{aligned}\tag{8}$$

de mesure de renouvellement $N = n^+ * n^-$ qui est une densité de probabilité dont l'espérance γ est donnée par la formule (5), et qui a pour expression lorsque β^+ et β^- sont distincts

$$N(u) du = \mathbb{1}_{[v^+ + v^-, +\infty[}(u) \frac{e^{(u-v^+-v^-)/\beta^+} - e^{(u-v^+-v^-)/\beta^-}}{\beta^- - \beta^+} du,$$

le calcul lorsque les paramètres sont égaux étant laissé au lecteur. Par convolution, les fonctions de forçement $n^+ * f^- + f^+$ et $n^- * f^+ + f^-$ des équations (8) sont intégrables, nulles sur un voisinage de $-\infty$ et des majorations élémentaires montrent qu'elles décroissent rapidement en $+\infty$. Ainsi, ces équations vérifient les hypothèses du théorème de renouvellement.

AFFIRMATION. — Si γ est différent de 0, alors Ψ_B admet des limites à droite et à gauche en 0 qui sont, de plus, égales.

Démonstration. — L'application du théorème de renouvellement montre que ψ_B^+ et ψ_B^- admettent des limites en $+\infty$ que nous notons $\Lambda^+(B)$ et $\Lambda^-(B)$. Par construction, ce sont aussi limites à droite et à gauche en 0 de Ψ_B , et les fonctions d'ensembles qu'elles définissent sont des sous-probabilités boréliennes.

Supposons une de ces limites différente de 0, par exemple $\Lambda^-(B) > 0$. En revenant à l'équation

$$\begin{aligned}\psi_B^+(\xi) &= \int_{v^+}^{\xi+v^+} \psi_B^-(\xi-u) n^+(u) du + \mathbb{1}_B(1) e^{\xi/\beta^+} \\ &= \left(\int_{-v^+}^{\xi-v^+} \psi_B^-(u) e^{-(u+v^+)/\beta^+} \frac{du}{-\beta^+} + \mathbb{1}_B(1) \right) e^{\xi/\beta^+},\end{aligned}$$

on met en évidence une intégrale divergente en $+\infty$. Par critère de comparaison au voisinage de $+\infty$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-v^+}^{\xi-v^+} \psi_B^-(u) e^{-(u+v^+)/\beta^+} \frac{du}{-\beta^+} &\sim \int_{-v^+}^{\xi-v^+} \Lambda^-(B) e^{-(u+v^+)/\beta^+} \frac{du}{-\beta^+} \\ &\sim \Lambda^-(B) (e^{-\xi/\beta^+} - 1) \sim \Lambda^-(B) e^{-\xi/\beta^+},\end{aligned}$$

et ainsi

$$\psi_B^+(\xi) \sim (\Lambda^-(B) e^{-\xi/\beta^+} + \mathbb{1}_B(1)) e^{\xi/\beta^+} \sim \Lambda^-(B) \quad \text{quand } \xi \rightarrow +\infty,$$

et l'affirmation est démontrée. \square

Remarques. — a) Pour définir les fonctions de forçement, nous avons fait intervenir les valeurs des fonctions « inconnues » ψ_B^+ et ψ_B^- des équations de renouvellement. Ceci ne doit pas troubler l'esprit puisque nous n'avons cherché ni à les résoudre ni à exprimer les limites de leurs solutions.

b) Le noyau de convolution N n'est rien d'autre que la densité de la loi d'une somme de deux variables exponentielles indépendantes. L'itération des équations correspond aux conditionnements successifs par le deuxième et le premier temps de saut.

c) Si $\gamma = 0$, l'existence de telles limites n'est pas encore établie, mais pour B assez grand, les fonctions ψ_B^+ et ψ_B^- sont identiquement égales à 1 sur \mathbb{R}_+ — cette dernière propriété valant aussi dans le cas où $\gamma > 0$.

d) Il a été vu précédemment que si $\gamma \leq 0$, alors $(1 + \beta^+)(1 + \beta^-) < 1$ (voir Fig. 2). Notamment, un des paramètres est strictement plus grand que -2 : ceci justifie le choix du champ d'investigation de ce qui suit.

4.2. ÉQUATIONS DE RENOUVELLEMENT (SECONDE FORME)

Nous supposons, quitte à nous restreindre encore par la suite, que $(\beta^+, \beta^-) \in]-2, -1] \times]-\infty, -1[$. Dans un premier temps, nous établissons une nouvelle équation qui tient compte d'une défection éventuelle — c'est-à-dire de la possibilité qu'une excursion s'achève avant d'avoir dépassé un seuil prescrit. De ce fait, la mesure de renouvellement obtenue pourra n'être qu'une sous-probabilité. Par un changement convenable de fonction, nous obtiendrons une véritable équation de renouvellement à laquelle, lorsque $\beta^- \in]-\infty, -2]$, l'application du théorème correspondant indiquera le comportement asymptotique de ces fonctions, et, par suite, de celles dont l'étude a été commencée à la sous-section précédente. Finalement, nous indiquerons comment, dans l'esprit de cette section, le cas où les deux paramètres sont dans $]-2, -1[$ peut être traité.

Soient \mathbb{P}^1 une solution de (4) issue de 1 et V le temps d'arrêt fini

$$V = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \geq (-1 - \beta^+)^{-1}\} \wedge \inf\{t \geq U \mid |X_t| \geq 1\} \wedge T.$$

Regardons comment il est atteint :

(i) $V = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \geq (-1 - \beta^+)^{-1}\}$: X atteint en croissant le seuil $(-1 - \beta^+)^{-1}$;

(ii) $V = \inf\{t \geq U \mid |X_t| \geq 1\}$: au moins un saut a eu lieu. Sous cette hypothèse, à l'instant de saut U , X entre dans l'intervalle $[-1, 1 + \beta^+[$ et l'excursion qui suit parvient à dépasser 1 en valeur absolue ;

(iii) $V = T$: l'excursion se comporte, à son début, comme dans le cas précédent

ce qui précède puisque, ou bien $\gamma \geq 0$, alors $\nu^+\{0\} = 0$; ou bien $\gamma < 0$ et Ψ_B tend vers 0 en 0. Ainsi, on a pour tout $0 < x \leq -1 - \beta^+$

$$\begin{aligned} \Psi_B(x) = \nu^+\{-1\} \Psi_B(-x) + \int_1^{1 \vee (-1 - \beta^-)} \Psi_B(xy) \nu^+(dy) \\ + \nu^+\{(-1 - \beta^+)^{-1}\} \Psi_B(x(-1 - \beta^+)^{-1}). \end{aligned}$$

Puis en changeant de fonction (on note à cette occasion que le réel $-v^+$ est positif puisque $\beta^+ \in [-2, -1[)$, on a pour tout $\xi \geq -v^+$

$$\begin{aligned} \psi_B^+(\xi) = \nu^+\{-1\} \psi_B^-(\xi) + \int_0^{0 \vee v^-} \psi_B^+(\xi - u) \ln_* \nu^+(du) \\ + \nu^+\{(-1 - \beta^+)^{-1}\} \psi_B^+(\xi + v^+), \end{aligned}$$

où $\ln_* \nu^+$ désigne l'image par le logarithme de la restriction de la mesure ν^+ à l'intervalle $[1, 1 \vee (-1 - \beta^-)]$. Avec l'équation de convolution du paragraphe précédent, on obtient

$$\begin{aligned} \psi_B^+(\xi) = \nu^+\{-1\} (\psi_B^+ * n^-(\xi) + f^-(\xi)) \\ + \int_0^{0 \vee v^-} \psi_B^+(\xi - u) \ln_* \nu^+(du) + \nu^+\{(-1 - \beta^+)^{-1}\} \psi_B^+(\xi + v^+). \end{aligned}$$

$$\psi_B^+(\xi) = \mu^+ * \psi_B^+(\xi) + \nu^+\{-1\} f^-(\xi), \quad \xi \geq -v^+,$$

où μ^+ est la sous-probabilité

$$\mu^+(du) = \nu^+\{-1\} n^-(u) du + \mathbb{1}_{[0, 0 \vee v^-]}(u) \ln_* \nu^+(du) + \nu^+\{(-1 - \beta^+)^{-1}\} \delta_{-v^+}(du)$$

qui est de masse totale $1 - \nu^+\{0\}$.

AFFIRMATION. — μ^+ est une probabilité si et seulement si γ est positif ou nul.

Démonstration. — Si $\gamma \geq 0$, les excursions ont une durée infinie. Dans ce cas $\nu^+\{0\} = 0$, et μ^+ est une probabilité.

Supposons $(1 + \beta^+)(1 + \beta^-) < 1$ et $\nu^+\{0\} = 0$. Lorsque le premier instant de saut a lieu avant l'atteinte de $(-1 - \beta^+)^{-1}$, X est à cet instant dans l'intervalle $[-1, 1 + \beta^+]$ avec une répartition absolument continue et non dégénérée. L'hypothèse $\nu^+\{0\} = 0$ implique que $\{0\}$ n'est pas atteint avant le dépassement du seuil 1. Ainsi la monotonie partielle de $\Psi_{\mathbb{R}}$ jointe à cette hypothèse implique que $\Psi_{\mathbb{R}}(x) = 1$ sur cet intervalle. En considérant la position atteignable à l'instant de saut suivant, on constate que cette égalité vaut aussi sur $[(1 + \beta^+)(1 + \beta^-), -1 - \beta^-]$, et, toujours par monotonie de $\Psi_{\mathbb{R}}$ sur les demi-axes, qu'elle a lieu sur $[(1 + \beta^+)(1 + \beta^-), 1]$. Posons $x_0 = (-1 - \beta^+) \vee (1 + \beta^+)(1 + \beta^-)$. Si $|x| \in [x_0^2, x_0]$, la probabilité qu'une solution issue de x dépasse x_0 en valeur absolue avant la fin d'excursion est égale à $\Psi_{\mathbb{R}}(x/x_0) = 1$. Mais une fois x_0 dépassé, 1 est dépassé, par hypothèse, presque sûrement. En itérant ce raisonnement, on obtient que $\Psi_{\mathbb{R}}(x) = 1$ pour tout $x \neq 0$, ce qui montre que la durée d'excursion est infinie, c'est-à-dire $\gamma \geq 0$. \square

Le support de μ^+ est borné inférieurement et sa partie absolument continue n'est pas nulle. Comme au paragraphe précédent, nous étendons l'équation de convolution

à toute valeur de la variable ξ , ce qui consiste à définir une fonction de forçement en posant :

$$g^+(\xi) = \begin{cases} \nu^+\{-1\}f^-(\xi) & \text{si } \xi \geq -v^+, \\ \psi_B^+(\xi) - \mu^+ * \psi_B^+(\xi) & \text{si } \xi < -v^+. \end{cases}$$

La fonction g^+ est borélienne, bornée et identiquement nulle sur un voisinage de $-\infty$ et, comme f^- , elle est dominée en $+\infty$ par $\exp(\xi/\beta^-)$. C'est, notamment, une fonction intégrable.

L'équation obtenue n'est pas nécessairement une « bonne » équation de renouvellement car, comme nous l'avons signalé plus haut, la mesure par rapport à laquelle la convolution se fait n'est qu'une sous-probabilité au sens large. L'idée est de « gonfler » cette équation par un facteur exponentiel. On prendra garde à ce que la restriction annoncée au début sur les paramètres va être faite dans les deux lemmes qui suivent.

AFFIRMATION. — Soit $(\beta^+, \beta^-) \in]-2, -1[\times]-\infty, -2]$. Il existe un unique réel α tel que $\exp(\alpha u) \mu^+(du)$ définisse une mesure de probabilité. De plus, $\alpha \in [0, -1/\beta^-[$ et α est nul si et seulement si γ est positif.

Démonstration. — L'hypothèse $\beta^- \leq -2$ implique que v^- est positif. Comme, de plus, le réel $\nu^+\{-1\}$ est strictement positif, il est facile de voir que l'expression suivante définit une fonction continue strictement croissante sur $]-\infty, -1/\beta^-[$

$$\begin{aligned} k(\alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha u} \mu^+(du) \\ &= \nu^+\{-1\} \int_{v^-}^{+\infty} e^{\alpha u} n^-(u) du + \int_0^{v^-} e^{\alpha u} \nu^+(du) + \nu^+\{(-1 - \beta^+)^{-1}\} e^{-\alpha v^+}. \end{aligned}$$

Puisque $k(0) = 1 - \nu^+\{0\}$ et k tend vers l'infini en $-1/\beta^-$, il existe un unique $\alpha \in [0, -1/\beta^-[$ tel que $k(\alpha) = 1$. L'équivalence annoncée est évidente d'après l'affirmation précédente. \square

LEMME 5. — Soit $(\beta^+, \beta^-) \in]-2, -1[\times]-\infty, -2]$. Il existe une mesure borélienne L^+ positive, non nulle, une constante C strictement positive et un réel $\alpha \in [0, -1/\beta^-[$ tels que pour tout borélien B on ait, au voisinage de $+\infty$:

- (i) si $L^+(B) > 0$, alors ψ_B^+ est équivalent à $e^{-\alpha\xi} L^+(B)$, et ψ_B^- à $e^{-\alpha\xi} C L^+(B)$;
- (ii) si $L^+(B) = 0$, alors ψ_B^+ et ψ_B^- sont négligeables devant $e^{-\alpha\xi}$.

Démonstration. — Soit $\alpha \in [0, -1/\beta^-[$ défini par l'affirmation précédente. Puisque $\beta^- \leq -2$, la probabilité $\exp(\alpha u) \mu^+(du)$ est à support dans \mathbb{R}_+ . Son espérance, qui clairement existe, est strictement positive.

De l'équation

$$\psi_B^+(\xi) = \mu^+ * \psi_B^+(\xi) + g^+(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

on obtient par multiplication par $\exp(\alpha\xi)$

$$e^{\alpha\xi} \psi_B^+(\xi) = (e^{\alpha \text{Id}} \mu^+) * (e^{\alpha \text{Id}} \psi_B^+)(\xi) + e^{\alpha\xi} g^+(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

C'est une équation de renouvellement par rapport à une probabilité non purement atomique dont la fonction de forçement est intégrable et nulle aux infinis. Le théorème de renouvellement s'applique et nous notons $L^+(B)$ la limite correspondante

qui est, bien entendu, positive. Ceci prouve les relations asymptotiques indiquées pour ψ^+ .

Quant à ψ^- : de l'équation (6)

$$\psi_B^-(\xi) = \int_{v^-}^{\xi+v^-} \psi_B^+(\xi-u) e^{(u-v^-)/\beta^-} \frac{du}{-\beta^-} + \mathbb{1}_B(-1) e^{\xi/\beta^-}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

on obtient

$$e^{\alpha\xi} \psi_B^-(\xi) = \left(\int_{-v^-}^{\xi-v^-} e^{\alpha u} \psi_B^+(u) e^{-(\alpha+1/\beta^-)u} e^{-v^-/\beta^-} \frac{du}{-\beta^-} + \mathbb{1}_B(-1) \right) e^{(\alpha+1/\beta^-)\xi},$$

où on observe que $\alpha + 1/\beta^- < 0$. Lorsque $e^{\alpha\xi} \psi_B^+(\xi)$ admet une limite non nulle en l'infini, la mise en évidence d'une intégrale divergente permet de montrer que

$$e^{\alpha\xi} \psi_B^-(\xi) \sim \frac{L^+(B) e^{\alpha v^-}}{1 + \alpha\beta^-} \quad \text{quand } \xi \rightarrow +\infty,$$

ce qui prouve la relation d'équivalence avec pour constante $C = \exp(\alpha v^-)(1 + \alpha\beta^-)^{-1}$. Lorsque $L^+(B) = 0$, les critères de comparaison intégraux conduisent facilement à la relation de domination annoncée.

Lorsque $\gamma \geq 0$, notamment $\gamma = 0$, α est égal à 0 et ψ_B^+ et ψ_B^- admettent des limites en $+\infty$. Elles sont non nulles pour B est assez grand. Quand $\gamma < 0$, ces fonctions tendent vers 0 pour tout B . Il faut prouver que ce n'est pas le cas de leur produit par $\exp(\alpha \text{Id})$, ce qui revient à montrer que pour un B bien choisi, l'intégrale de la fonction de forçement associée est strictement positive.

Si $-1 \in B$ et puisque ψ_B^+ est inférieure à 1 et tend vers 0 en l'infini, alors pour $\xi \geq -v^+$,

$$f^-(\xi) = e^{\xi/\beta^-} - \int_{\xi+v^-}^{+\infty} \psi_B^+(\xi-u) n^-(u) du > e^{\xi/\beta^-} - \int_{\xi+v^-}^{+\infty} n^-(u) du = 0.$$

Donc, si $-1 \in B$, la définition de g^+ et l'inégalité précédente conduisent à

$$\int_{-v^+}^{+\infty} e^{\alpha\xi} g^+(\xi) d\xi > 0.$$

D'autre part, en notant que le support de $\mu^+ * \psi_B^+$ est minoré par $-\ln(\sup B)$, la borne inférieure du support de ψ_B^+ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-v^+} e^{\alpha\xi} g^+(\xi) d\xi &= \int_{-\ln(\sup B)}^{-v^+} e^{\alpha\xi} (\psi_B^+(\xi) - \mu^+ * \psi_B^+(\xi)) d\xi \\ &\geq \int_{-\ln(\sup B)}^{-v^+} e^{\alpha\xi} (\psi_B^+(\xi) - \mu^+(\mathbb{R})) d\xi. \end{aligned}$$

Puisque $\gamma < 0$, $\mu^+(\mathbb{R}) < 1$ et il n'est pas difficile de choisir un intervalle B borné tel que cette dernière intégrale soit (strictement) positive.

La condition suffisante est donc satisfaite pour un intervalle B bien choisi, ce qui achève la preuve du lemme. \square

Résolution quand $(\beta^+, \beta^-) \in [-2, -1]^2$. — Cette situation a déjà été traitée au 3.1, mais il nous a semblé utile de la préciser : la discussion menée jusqu'ici ne s'applique plus car elle utilisait le fait que $v^- = \ln(-1 - \beta^-)$ était positif, ce qui n'est plus le cas. Pour ces valeurs des paramètres, les équations (6) se résolvent laborieusement mais sans réelle difficulté et on peut montrer que lorsque les paramètres sont distincts, on a

$$\psi_{\mathbb{R}}^{\pm}(\xi) = r_1^{\pm} e^{-\xi} + r_2^{\pm} e^{e\xi},$$

où r_2^{\pm} est non nul et ϱ est, ou bien égal à 0 lorsque γ est positif, ou bien égal à un certain réel strictement compris entre $1/\beta^+ \vee 1/\beta^-$ et 0, racine de l'équation transcendante

$$(1 - \beta^+ \varrho)(1 - \beta^- \varrho)(-1 - \beta^+)^e(-1 - \beta^-)^e = 1$$

dont -1 et 0 sont déjà solutions. Lorsque les paramètres sont égaux, on obtient

$$\psi_{\mathbb{R}}^{\pm}(\xi) = e^{e\xi},$$

où ϱ est une racine négative d'une équation transcendante plus simple

$$(1 - \beta \varrho)(-1 - \beta)^e = 1.$$

Si $\gamma \geq 0$ ($\beta^{\pm} \leq \beta^*$), ϱ ne peut être que nul, et si $\gamma < 0$ ($\beta^* < \beta^{\pm}$), ϱ est strictement compris entre $1/\beta^+ = 1/\beta^-$ et 0.

Ceci montre que l'énoncé du lemme 5 s'applique encore dans ce cas avec $\alpha = -\varrho$. Chercher à préciser le comportement des fonctions associées au dépassement quand les deux paramètres sont dans $[-2, -1[$ n'aurait pas été utile pour l'obtention de l'unicité; ça l'est cependant pour juger de l'existence ou non d'un temps local.

4.3. VÉRIFICATION DU PRINCIPE D'ASSEMBLAGE

Soient $(\beta^+, \beta^-) \in]-\infty, -1]^2$ — que le lecteur pourra supposer hors de $[-2, -1]^2$ s'il ne désire pas tenir compte des affirmations faites plus haut —, \mathbb{P} une solution issue de 0 associée à ces paramètres et S le premier instant où X dépasse 1 en valeur absolue. Soient, de plus, $B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$, $0 < \varepsilon < 1$ et $(S_n^\varepsilon, T_n^\varepsilon)_{n \in \mathbb{N}}$ les temps de découpage. Rappelons que la loi de X_S conditionnellement à \mathcal{F}_0 s'exprime selon

$$\mathbb{P}\{X_S \in B \mid \mathcal{F}_0\} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S\}} \Psi_B(X_{S_n^\varepsilon}) \mid \mathcal{F}_0],$$

et que les résultats des paragraphes précédents peuvent s'écrire pour ε tendant vers 0 sous la forme

$$\Psi_B(X_{S_n^\varepsilon}) - (C^+ \mathbb{1}_{\{X_{S_n^\varepsilon} > 0\}} + C^- \mathbb{1}_{\{X_{S_n^\varepsilon} < 0\}}) |X_{S_n^\varepsilon}|^\alpha L(B) = o(|X_{S_n^\varepsilon}|^\alpha), \quad (9)$$

où L est une mesure positive finie non nulle, C^+ et C^- des constantes strictement positives, et $\alpha \in [0, 1[$; de plus, ces quantités ne dépendent que des paramètres. Plus brièvement, nous noterons $C(x) = C^+ \mathbb{1}_{\{x > 0\}} + C^- \mathbb{1}_{\{x < 0\}}$.

Ainsi qu'au 3.2, soit s une fonction positive tendant vers 0 en 0, telle que pour tout $0 < \varepsilon < 1$, le terme de gauche de (9) soit majoré en valeur absolue par $|X_{S_n^\varepsilon}|^\alpha s(\varepsilon)$. Si l'expression suivante ne tendait pas vers 0 avec ε

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S\}} (\Psi_B(X_{S_n^\varepsilon}) - C(X_{S_n^\varepsilon}) |X_{S_n^\varepsilon}|^\alpha L(B)) \mid \mathcal{F}_0],$$

a fortiori, il en serait de même pour

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S\}} |X_{S_n^\varepsilon}|^\alpha \mid \mathcal{F}_0] s(\varepsilon).$$

Or

$$\mathbb{P}\{X_S \in B \mid \mathcal{F}_0\} \geq \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S\}} |X_{S_n^\varepsilon}|^\alpha (C(X_{S_n^\varepsilon})L(B) - s(\varepsilon)) \mid \mathcal{F}_0],$$

et si $L(B) > 0$, le terme de droite ne serait pas borné supérieurement, ce qui est absurde. Ainsi, sous cette condition,

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S\}} |X_{S_n^\varepsilon}|^\alpha C(X_{S_n^\varepsilon}) \mid \mathcal{F}_0] L(B) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}\{X_S \in B \mid \mathcal{F}_0\}$$

Nous en déduisons de plus que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq S\}} |X_{S_n^\varepsilon}|^\alpha C(X_{S_n^\varepsilon}) \mid \mathcal{F}_0]$$

est convergente dès que $L(B) > 0$, donc, puisqu'elle ne dépend pas de B , convergente dans tous les cas. Soit ℓ sa limite qui est une variable \mathcal{F}_0 -mesurable. Il est immédiat d'en déduire que pour tout B , on a

$$\mathbb{P}\{X_S \in B \mid \mathcal{F}_0\} = L(B) \ell(\omega)$$

et qu'alors ℓ est nécessairement une constante. Le principe d'assemblage est donc vérifié.

Remarque. — Il y a une petite différence entre cette démonstration et celles de la section 3. Dans ces dernières, nous utilisons l'inégalité des montées pour prouver que la différence entre le terme vrai et le terme approché tendait vers 0. Ici, le fait que $L(B)$ n'est pas nul pour un B bien choisi implique que cette différence tend vers 0. Un raisonnement de ce type s'appliquait aussi précédemment mais l'usage ou non de l'inégalité citée met l'accent sur le lien entre le dépassement et les montées et descentes. On note que cette inégalité ne s'applique plus ici à cause de la valeur de l'exposant $\alpha \in [0, 1[$.

5. Propriétés et problèmes

5.1. INVARIANCE D'ÉCHELLE

L'argument esquissé au 2.3 et la propriété d'unicité montrent que la famille des martingales d'Azéma asymétriques associée à un couple de paramètres (β^+, β^-) est invariante par changement d'échelle au sens suivant :

AFFIRMATION. — *Si X est une martingale d'Azéma asymétrique de loi initiale μ , pour tout $\lambda > 0$, $(\lambda X_{t/\lambda^2})_{t \geq 0}$ est une martingale d'Azéma asymétrique de mêmes paramètres et de loi initiale $(\lambda \text{Id})_*(\mu)$.*

Notamment, si μ est la mesure de Dirac en 0, il y a identité en loi entre X et $(\lambda X_{t/\lambda^2})_{t \geq 0}$ pour tout $\lambda > 0$, ce qui est la propriété usuelle de changement d'échelle.

On note en passant que l'opposée d'une martingale d'Azéma asymétrique est une martingale du même type avec permutation des paramètres. Il est à remarquer

que la forme du changement de temps intervenant dans l'expression de l'invariance d'échelle est une conséquence de la normalité des martingales.

Il est assez facile de montrer que si Z est une martingale issue de 0 vérifiant une équation de structure markovienne associée à une fonction ϕ continue, et de loi invariante par changement d'échelle, alors ϕ est de la forme

$$\phi(x) = (\mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \beta^+ + \mathbb{1}_{\{x < 0\}} \beta^-) x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, Z est une martingale d'Azéma asymétrique. De plus, si la propriété d'invariance est satisfaite pour tout λ différent de 0, Z est alors une martingale d'Azéma symétrique.

Outre la question de l'affaiblissement des hypothèses de continuité et d'invariance par tout facteur positif dans cette dernière affirmation, il est assez naturel de se demander quelles sont les martingales ayant cette propriété. Afin d'en rappeler l'étendue, nous en donnons deux exemples.

a) Si on se donne X une martingale invariante par changement d'échelle et Z une fonctionnelle adaptée de ce processus vérifiant une identité d'invariance (telle que celles du signe, du supremum jusqu'au temps t , du dernier instant d'annulation, d'un vecteur dont les coordonnées sont de telles fonctionnelles...) de filtration naturelle $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ alors, la projection M de X sur cette dernière filtration

$$M_t = \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{G}_t]$$

est une martingale invariante par changement d'échelle. Cependant, il semble difficile de savoir si de bonnes propriétés, telles que la markovienité ou la vérification d'une équation de structure, peuvent être conservées après projection.

b) Il est possible d'écrire un grand nombre d'équations de structure non markoviennes invariantes sur l'espace de Skorohod : si $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = 1$, $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq 1$, $(\beta_i^+, \beta_i^-) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq i \leq n$, posons

$$\Phi_t = \prod_{i=1}^n (\beta_i^+ (X_{\alpha_i t-}^+)^{\gamma_i} - \beta_i^- (X_{\alpha_i t-}^-)^{\gamma_i});$$

alors l'équation de structure associée au processus prévisible Φ est invariante. Le processus prévisible Φ correspondant satisfait aux hypothèses de continuité du théorème d'existence de Taviot (voir [17]) lorsque les γ_i sont positifs. L'ensemble des solutions issues de 0 est invariant, et l'invariance d'échelle proprement dite a lieu si l'unicité est vérifiée. Bien entendu, on peut encore prendre pour processus prévisible des combinaisons linéaires de processus du type précédent.

Remarque. — Le premier exemple est évidemment inspiré de la construction de la première martingale d'Azéma à l'aide du mouvement brownien. Pour celle-ci, il y a conservation des deux propriétés en question (voir [2, 7]).

5.2. CARACTÈRE MARKOVIENT

Lorsqu'il y a existence et unicité des solutions d'une équation de structure, la correspondance entre les lois initiales et les lois de martingales locales solutions est bijective. Si l'équation est markovienne, l'ensemble de ces solutions est invariant par translation temporelle, ce qui suggère de dire que l'ensemble de ces lois est fortement markovien. Dire qu'il forme un processus de Markov fort requiert la validation

d'hypothèses de mesurabilité sur cette correspondance. Il est commode pour cela de se référer à des résultats des théories de problèmes de martingales.

Soit ϕ une fonction borélienne. Si f est une fonction suffisamment régulière, posons

$$\begin{aligned} A^\phi f(x) &= \int_0^1 f''(x + u\phi(x))(1-u) du \\ &= \begin{cases} \frac{f(x + \phi(x)) - f(x) - \phi(x)f'(x)}{\phi(x)^2} & \text{si } \phi(x) \neq 0, \\ \frac{1}{2}f''(x) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Une loi de probabilité \mathbb{P} sur l'espace de Skorohod est solution du problème de martingales associé à A^ϕ (ou à ϕ) si

$$M^f = f(X) - f(X_0) - \int A^\phi f(X_{s-}) ds$$

est une \mathbb{P} -martingale locale pour f décrivant, par exemple, l'ensemble $C_c^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, ou encore $C_0^2(\mathbb{R})$ celui des fonctions deux fois continûment dérivables tendant vers 0 ainsi que leurs dérivées aux infinis.

La formule du changement de variables pour les solutions d'équations de structure (voir [7, 17]) montre que celles-ci satisfont au problème de martingales correspondant. Il est possible d'en démontrer la réciproque lorsque ϕ est localement bornée. Ceci consiste à identifier les caractéristiques locales d'une solution du problème de martingales et à montrer qu'elles impliquent l'équation de structure.

En suivant [10], p. 184–188, si ϕ est borélienne, A^ϕ applique continûment l'espace séparable $C_0^2(\mathbb{R})$ dans celui des fonctions boréliennes bornées $b\mathcal{Bor}(\mathbb{R})$. Alors, s'il y a unicité au problème de martingales — ou à l'équation de structure si ϕ est localement bornée —, les lois solutions dépendent de manière borélienne de la condition initiale (si A est un ensemble borélien de l'espace de Skorohod, $x \mapsto \mathbb{P}^x(A)$ est une fonction borélienne) et forme ainsi un processus de Markov fort de semi-groupe borélien.

Une question naturelle est de savoir quand on obtient un processus de Feller. Le problème essentiel est de déterminer si le semi-groupe préserve la continuité des fonctions de $C_0(\mathbb{R})$ — les autres propriétés étant vérifiées du fait de la normalité des processus et de l'usage de l'inégalité de Tchébychev. Si ϕ est signe-continue inférieurement, ce problème ne se pose qu'aux points de $\partial Z(\phi)$. Une méthode consiste à déterminer les voisinages fins de ces points et à voir s'ils coïncident avec les voisinages ordinaires. Nous pouvons répondre par l'affirmative dans les cas présentés ici, c'est-à-dire lorsque ϕ est affine par morceaux et continue en un tel point, ou si son taux de variation y est compris entre -2 et 0 .

S'il y a unicité et si l'ensemble des solutions est fellérien, la détermination du générateur sur $C_0(\mathbb{R})$, ou de sa restriction à un espace de fonctions régulières, n'a rien d'immédiat si ϕ n'est supposée que borélienne. Lorsque l'on suppose la continuité, on constate facilement que ce dernier coïncide avec A^ϕ sur $C_0^2(\mathbb{R})$, entre autres. La question de savoir si une telle restriction engendre un unique semi-groupe fellérien est rendue triviale et sa réponse est alors positive grâce à la formulation en terme de problèmes de martingales. En revanche, la manipulation du semi-groupe et du véritable générateur en vue de calculs explicites, et c'est un des grands intérêts des

processus de Feller, est délicate puisque le domaine — et l'expression — de ce dernier n'est généralement pas explicitement déterminable.

Comme on le sait, l'étude des solutions d'équations de structure est principalement motivée par celle de la propriété de représentation chaotique (PRC) (*voir* [5], chap. XXI). Lorsqu'il y a unicité, les solutions possèdent dans leur filtration naturelle la propriété de représentation prévisible (PRP) (*voir* [7]). La question est de trouver une classe de fonctionnelles suffisamment riche pour laquelle on saura montrer que la PRC a lieu par itération de la PRP. Cette recherche peut être aidée par la connaissance de « bonnes fonctions » vis-à-vis du semi-groupe dans un cadre markovien.

Si le cas des martingales d'Azéma n'est pas complètement connu, le cas purement asymétrique présente une difficulté supplémentaire qui n'est pas de moindre importance : les espaces de fonctions C^∞ ne sont pas stables par les générateurs correspondants. Notamment des calculs tels que celui des moments ne seraient guère aussi simples que dans les cas symétriques et il semble que l'on doive séparer dans ce type de calculs les parties positives et négatives des martingales. Ce faisant, c'est naturellement que, *via* la formule de Tanaka, leur temps local apparaît.

5.3. TEMPS LOCAL

Nous nous limitons à affirmer l'existence ou non d'un temps local (au sens des semi-martingales), une description plus précise ne semblant pas pouvoir se déduire de notre étude.

AFFIRMATION. — *Une martingale d'Azéma asymétrique de paramètres différents de 0 n'admet de temps local qu'en l'origine. Ce dernier est identiquement nul si et seulement si les paramètres sont strictement inférieurs à -1 .*

La première partie de cette affirmation est presque immédiate et c'est un fait de caractère général pour les solutions d'une équation de structure markovienne associée à une fonction ϕ par exemple signe-continue inférieurement : tout point extérieur à $Z(\phi)$ ne peut-être fréquenté qu'à un ensemble au plus dénombrable d'instant. Il suffit pour le voir de s'intéresser à de tels instants qui soient aussi des instants de continuité des trajectoires et de constater qu'ils sont isolés.

Un autre fait général pour de telles martingales X réside dans l'identité suivante

$$L^z(X) = L^z(-X) = \frac{1}{2}L^z(|X|)$$

en tout point z d'annulation de la fonction-paramètre ; elle est une conséquence de l'impossibilité de quitter la singularité en un seul saut (*voir* [5], chap. XXIII, § 29).

La seconde partie est moins évidente et sa justification repose sur le théorème d'approximation du temps local des semi-martingales discontinues de El Karoui [6], et du comportement en l'origine de la fonction $\Psi_{\mathbb{R}}$. En comparant la moyenne de la formule d'approximation avec les expression découpées des lois conditionnelles des variables X_S , et après quelques cheminements élémentaires, on aboutit à la conclusion cherchée.

Si un des paramètres est égal à 0, les excursions correspondantes sont browniennes. Ainsi les temps locaux aux points de signe convenable ne sont pas nuls. *A priori*, ils ne coïncident que localement avec les temps locaux d'un mouvement

brownien puisque ceux-ci dépendent de la distribution des excursions qui n'a pas été déterminée.

Remarque. — Dans ce volume, un article de Chao et Chou aborde de manière précise l'étude des temps locaux des martingales d'Azéma symétriques, notamment l'éventuelle non nullité de certains d'entre eux, par des raisonnements certainement plus généraux que ceux que nous avons pu mener.

RÉFÉRENCES

- [1] AZÉMA (J.) et RAINER (C.), « Sur l'équation de structure : $d[X, X]_t = dt - X_{t-}^+ dX_t$ », *Séminaire de probabilités XXVIII*, Lecture Notes in Mathematics 1583, Springer (1994), p. 236–255.
- [2] AZÉMA (J.) et YOR (M.), « Étude d'une martingale remarquable », *Séminaire de probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer (1989), p. 88–130.
- [3] DELLACHERIE (C.) et MEYER (P.-A.), *Probabilités et potentiel*, Chapitres V à VIII, Hermann (1980).
- [4] DELLACHERIE (C.) et MEYER (P.-A.), *Probabilités et potentiel*, Chapitres XII à XVI, Hermann (1987).
- [5] DELLACHERIE (C.), MAISONNEUVE (B.) et MEYER (P.-A.), *Probabilités et potentiel*, Chapitres XVII à XXIV, Hermann (1992).
- [6] EL KAROUI (N.), « Sur les montées des semi-martingales, le cas discontinu », *Temps locaux*, Astérisque 52–53, Société Mathématique de France (1978), p. 73–87.
- [7] ÉMERY (M.), « On the Azéma martingales », *Séminaire de probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer (1989), p. 66–87.
- [8] ÉMERY (M.), « Sur les martingales d'Azéma (suite) », *Séminaire de probabilités XXIV*, Lecture Notes in Mathematics 1426, Springer (1990), p. 442–447.
- [9] ÉMERY (M.), « Compensation de processus V. F. non localement intégrables », *Séminaire de probabilités XIV*, Lecture Notes in Mathematics 784, Springer (1980), p. 152–160.
- [10] ETHIER (S. N.) et KURTZ (T. G.), *Markov Processes, Characterization and Convergence*, Wiley series in probability and mathematical statistics, Wiley (1986).
- [11] FELLER (W.), *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. II, second edition, Wiley series in probability and mathematical statistics, Wiley (1971).
- [12] KARLIN (S.), « On the renewal equation », *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 5 (1955), p. 229–257.
- [13] KAZAMAKI (N.), « Changes of Time, Stochastic Integrals, and Weak Martingales », *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, Vol. 22 (1972), p. 25–32.
- [14] MEYER (P.-A.), « Un cours sur les intégrales stochastiques », *Séminaire de probabilités X*, Lecture Notes in Mathematics 551, Springer (1976), p. 245–400.
- [15] MEYER (P.-A.), « Construction de solutions d'«équations de structure» », *Séminaire de probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer (1989), p. 142–145.
- [16] RUDIN (W.), *Functional Analysis*, second edition, McGraw-Hill (1991).

- [17] TAVIOT (G.), *Martingales et Équations de Structure : Étude Géométrique*, thèse de doctorat, Université Louis Pasteur (1999).
- [18] YOR (M.), « Rappels et préliminaires généraux », *Temps locaux*, Astérisque 52–53, Société Mathématique de France (1978), p. 17–22.
- [19] YOR (M.), *Some Aspects of Brownian Motion. Part II: Some Recent Martingale Problems*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser (1997).

Anthony PHAN
I.R.M.A.
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg cedex
phan@math.u-strasbg.fr