MARC MALRIC

Filtrations quotients de la filtration brownienne

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 35 (2001), p. 260-264
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_2001__35__260_0>

FILTRATIONS QUOTIENTS DE LA FILTRATION BROWNIENNE

M. Malric

Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires
Université Paris VI
4 place Jussieu
75252 PARIS Cedex 05

Introduction

A. Goswami et B.V. Rao ont introduit dans [6] la sous-filtration de la filtration brownienne obtenue en se restreignant aux événements pairs (c'est-à-dire invariants par multiplication du brownien par -1); il est montré dans [1] que cette filtration, la filtration de Goswami-Rao, est elle-même engendrée par un mouvement brownien. Notre propos est de généraliser cette définition et ce résultat au cas d'un mouvement brownien à d dimensions. Les événements pairs seront remplacés par les événements invariants sous l'action du groupe $\mathbb{SO}(d)$ ou $\mathbb{O}(d)$ sur la trajectoire brownienne; mais nous considérerons aussi les sous-groupes les plus généraux de $\mathbb{O}(d)$. Le résultat essentiel de l'article est que toutes les sous-filtrations ainsi obtenues (dites filtrations quotients) sont browniennes, et des mouvements browniens générateurs sont exhibés. Nous utiliserons pour cela la méthode de Goswami-Rao [6], qui, dans [5] s'est révélée particulièrement performante, ainsi que l'idée de placer le mouvement brownien en position canonique à la manière de [7].

Plus généralement, on trouvera dans les commentaires du chapitre V de [8] une discussion succincte mais assez complète des exemples et contre-exemples de filtrations browniennes, étudiées récemment par Tsirelson en particulier et d'autres auteurs.

Je remercie ici vivement la rédaction du Séminaire pour l'attention qui m'a été accordée et pour des remarques fructueuses.

Définition d'une filtration quotient

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace de Wiener d-dimensionnel, B le mouvement brownien des coordonnées, $\mathcal{F}_.$ sa filtration canonique.

Rappelons brièvement la définition des filtrations quotients (*cf.* par exemple [1]). Soient $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, et R une relation d'équivalence sur Ω telle que le saturé par R de tout événement de $\mathcal{B}$ appartienne à $\mathcal{B}$. On appelle tribu quotient $\mathcal{B}/R$ la tribu constituée des événements saturés de $\mathcal{B}$. On définit de même la filtration quotient $\mathcal{F}/R$ par

$$(\mathcal{F}/R)_t = \mathcal{F}_t/R \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0.$$

Nous n'envisageons dans la suite que des relations d'équivalence associées à des sous-groupes de $\mathbb{O}(d)$ (ces groupes de transformations de $\mathbb{R}^d$ laissent invariante la mesure de Wiener) : À un tel sous-groupe Γ est associée la relation d'équivalence

$$\omega_1 \, R \, \omega_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists h \in \Gamma \quad \omega_2 = h(\omega_1) \; ;$$

la filtration quotient $\mathcal{F}/R$ sera aussi notée $\mathcal{F}/\Gamma$. Une v.a. X sur l'espace de Wiener est $\mathcal{F}_t/\Gamma$-mesurable si et seulement si X est $\mathcal{F}_t$-mesurable et $X = X \circ h$ p.s. pour chaque $h \in \Gamma$.

1°) Quotient par $\mathbb{SO}(d)$

Le groupe $\mathbb{SO}(1)$ étant trivial, lorsque $d = 1$ la filtration quotient $\mathcal{F}/\mathbb{SO}(1)$ n'est autre que la filtration brownienne initiale $\mathcal{F}$. Pour l'étude de $\mathcal{F}/\mathbb{SO}(d)$, nous pouvons donc nous restreindre au cas $d \geqslant 2$.

Nous fixons dans toute la suite une subdivision $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire une suite strictement croissante de nombres réels telle que $t_n \underset{n\to-\infty}{\downarrow} 0$ et $t_n \underset{n\to+\infty}{\uparrow} \infty$. Soit $\Delta_n = \dfrac{t_n - t_{n-1}}{d-1}$. Le système $(B_{t_{n-1}+i\Delta_n} - B_{t_{n-1}})_{1\leqslant i\leqslant d-1}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ est p.s. de rang $d-1$. Il existe donc une unique rotation vectorielle (aléatoire) $R_n \in \mathbb{SO}(d)$ telle que :

- $R_n(B_{t_{n-1}+\Delta_n} - B_{t_{n-1}})$ est le point de l'axe Ox_1 de coordonnée $x_1 > 0$ et de même module que $B_{t_{n-1}+\Delta_n} - B_{t_{n-1}}$;
- $R_n(B_{t_{n-1}+2\Delta_n} - B_{t_{n-1}})$ est un point du plan (x_1Ox_2) de coordonnée $x_2 > 0$;
- plus généralement, pour tout $i \in \{1, ..., d-1\}$, $R_n(B_{t_{n-1}+i\Delta_n} - B_{t_{n-1}})$ est un point du sous-espace vectoriel engendré par $\{e_1, ..., e_i\}$, de coordonnée $x_i > 0$.

La rotation R_n est clairement $\mathcal{F}_{t_n}$-mesurable, aussi le processus $R_n(B)$ est-il un mouvement brownien lorsque t décrit $[t_n, +\infty[$. Nous dirons que $R_n(B)$ est la n-ième position canonique de B sous $\mathbb{SO}(d)$, et nous appellerons R_n la n-ième rotation canonique associée à B.

La description explicite de R_n fournie ci-dessus n'est pas essentielle; les deux seules propriétés de R_n que nous utiliserons sont la $\mathcal{F}_{t_n}$-mesurabilité déjà mentionnée, et le fait que si deux mouvements browniens B' et B'' vérifient

$$\exists R \in \mathbb{SO}(d) \quad \forall t \in [t_{n-1}, t_n] \qquad B'_t - B'_{t_{n-1}} = R(B''_t - B''_{t_{n-1}})$$

(où la rotation R peut être aléatoire), alors leurs n-ièmes positions canoniques coïncident sur l'intervalle $[t_{n-1}, t_n]$.

Considérons maintenant le processus

$$\widetilde{B} = \int_0^{\cdot} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{]t_n,t_{n+1}]}(s)\, d\big(R_n(B_s)\big) \; .$$

D'après la caractérisation de P. Lévy, $\widetilde{B}$ est un $\mathcal{F}$-mouvement brownien. Par construction, $\widetilde{B}$ est invariant sous l'action de $\mathbb{SO}(d)$: la n-ième position canonique $R_n(B)$ coïncide avec $R_n\big(h(B)\big)$ pour tout $h \in \mathbb{SO}(d)$; il en résulte que le mouvement brownien $\widetilde{B}$ est adapté à la filtration $\mathcal{F}/\mathbb{SO}(d)$. Réciproquement, nous allons montrer que la filtration $\widetilde{\mathcal{F}}$ engendrée par $\widetilde{B}$ contient la filtration quotient $\mathcal{F}/\mathbb{SO}(d)$; on aura donc $\mathcal{F}/\mathbb{SO}(d) = \widetilde{\mathcal{F}}$, établissant ainsi que $\widetilde{B}$ engendre la filtration $\mathcal{F}/\mathbb{SO}(d)$.

Pour $0 < a < b$, appelons B_a^b le processus $(B_t - B_a)_{t\in[a,b]}$, et soit de même $\widetilde{B}_a^b$ le processus $(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_a)_{t\in[a,b]}$. Par définition de $\widetilde{B}$, on a

(1) $$\widetilde{B}_{t_{n-1}}^{t_n} = R_{n-1}(B_{t_{n-1}}^{t_n})\ ;$$

ainsi les tronçons $B_{t_{n-1}}^{t_n}$ et $\widetilde{B}_{t_{n-1}}^{t_n}$ coïncident à une rotation près; les n-ièmes positions canoniques de $\widetilde{B}$ et B sont donc les mêmes, et en appelant ρ_n la n-ième rotation canonique associée à $\widetilde{B}$ on a :

$$\rho_n\big(\widetilde{B}_{t_{n-1}}^{t_n}\big) = R_n\big(B_{t_{n-1}}^{t_n}\big)\ .$$

Compte tenu de (1), ceci se réécrit :

$$\rho_n\big(R_{n-1}(B_{t_{n-1}}^{t_n})\big) = R_n(B_{t_{n-1}}^{t_n})$$

et entraîne l'égalité presque sûre :

$$\rho_n R_{n-1} = R_n\ .$$

Par itération, on en déduit pour tout $m < n$:

$$\rho_n\rho_{n-1}...\rho_{m+1}R_m = R_n$$

et donc, en utilisant à nouveau (1) :

$$\rho_n...\rho_{m+1}(\widetilde{B}_{t_m}^{t_{m+1}}) = \rho_n...\rho_{m+1}\big(R_m(B_{t_m}^{t_{m+1}})\big) = R_n(B_{t_m}^{t_{m+1}})\ .$$

Puisque ρ_n est $\widetilde{\mathcal{F}}_{t_n}$-mesurable, $\rho_{n-1}, ..., \rho_{m+1}$ le sont à plus forte raison, et l'égalité ci-dessus montre que $R_n(B_{t_m}^{t_{m+1}})$ est $\widetilde{\mathcal{F}}_{t_n}$-mesurable pour tout $m < n$. En mettant bout-à-bout ces tronçons de trajectoire, on voit que $R_n(B_{t_m}^{t_n})$ est $\widetilde{\mathcal{F}}_{t_n}$-mesurable, et, en faisant tendre m vers $-\infty$, que $R_n(B_0^{t_n})$ l'est aussi. Enfin, pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$, comme $R_n(B_{t_n}^t) = \widetilde{B}_{t_n}^t$ est $\widetilde{\mathcal{F}}_t$-mesurable, $R_n(B_0^t)$ est $\widetilde{\mathcal{F}}_t$-mesurable; ceci montre que $\mathcal{F}_t/\mathbb{SO}(d)$ est incluse dans $\widetilde{\mathcal{F}}_t$. D'où la :

PROPOSITION 1. — *La filtration $\mathcal{F}/\mathbb{SO}(d)$ est une sous-filtration brownienne de dimension d. Plus précisément, elle est engendrée par le $\mathcal{F}$-mouvement brownien $\widetilde{B}$.*

Suivant [2], nous dirons qu'une sous-filtration $\mathcal{G}$ d'une filtration $\mathcal{H}$ est *immergée* dans $\mathcal{H}$ si toute $\mathcal{G}$-martingale est aussi une $\mathcal{H}$-martingale. D'après la Proposition 1 et la propriété de représentation prévisible par rapport à $\widetilde{B}$, la filtration $\mathcal{F}/\mathbb{SO}(d)$ est immergée dans $\mathcal{F}$.

2°) <u>Quotient par</u> $\mathbb{O}(d)$

Le seul point à modifier par rapport au paragraphe précédent est la notion de position canonique, qui doit maintenant être relative à $\mathbb{O}(d)$.

On introduit $\delta_n = \dfrac{t_n - t_{n-1}}{d}$. Le système $(B_{t_{n-1}+i\delta_n} - B_{t_{n-1}})_{1\leqslant i\leqslant d}$ constitue p.s. une base de $\mathbb{R}^d$. Soit S_n l'unique isométrie vectorielle telle que, pour tout $i \in \{1, ..., d\}$, $S_n(B_{t_{n-1}+i\delta_n} - B_{t_{n-1}})$ soit un point du sous-espace vectoriel engendré par $\{e_1, ..., e_i\}$, de coordonnée $x_i > 0$. En remplaçant la rotation canonique R_n par l'isométrie canonique S_n, une démonstration par ailleurs identique à celle de la Proposition 1 permet d'obtenir la :

PROPOSITION 2. — *La filtration $\mathcal{F}/\mathbb{O}(d)$ est une sous-filtration brownienne de $\mathcal{F}$ de dimension d, immergée dans $\mathcal{F}$.*

Remarquons que pour $d = 1$ la filtration $\mathcal{F}/\mathbb{O}(1)$ n'est autre que celle de Goswami-Rao; la Proposition 2 est donc une généralisation de la Proposition 2 de [1].

3°) Quotient par un sous-groupe fermé de $\mathbb{O}(d)$

Soit Γ un sous-groupe fermé de $\mathbb{O}(d)$.

Le problème consiste ici encore à définir des positions canoniques relatives à Γ; il s'agit d'associer à tout tronçon B_a^b de trajectoire brownienne un autre tronçon, qui soit $\mathcal{F}_b$-mesurable, qui soit de la forme $h(B_a^b)$ pour un $h \in \Gamma$, et qui ne change pas quand on remplace B_a^b par son image par un élément quelconque de Γ. En utilisant, comme dans le paragraphe précédent, la base $(B_{t_{n-1}+i\delta_n} - B_{t_{n-1}})_{1 \leqslant i \leqslant d}$ de $\mathbb{R}^d$, et en identifiant l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^d$ au groupe $\mathbb{GL}(d)$ des matrices inversibles, les éléments h de Γ opèrent sur $\mathbb{GL}(d)$ par multiplication matricielle à gauche, et le problème se ramène à exhiber une application mesurable c de $\mathbb{GL}(d)$ dans lui-même (l'application « position canonique »), qui soit constante sur chaque orbite de l'action de Γ, et telle que, pour tout $b \in \mathbb{GL}(d)$, b et $c(b)$ soient dans la même orbite.

Mais Γ, sous-groupe fermé de $\mathbb{O}(d)$, est aussi un sous-groupe fermé de $\mathbb{GL}(d)$, donc, par le théorème de Cartan ([4] page 170), un sous-groupe de Lie de $\mathbb{GL}(d)$; $\mathbb{GL}(d)$ s'identifie à un fibré C^∞ sur l'espace homogène à gauche $\Gamma \backslash \mathbb{GL}(d)$, et le problème est ainsi ramené à la construction d'une section mesurable de ce fibré. L'existence de sections mesurables (globales) résulte immédiatement de l'existence de sections locales C^∞ ([3] page 87).

Une telle section étant fixée, la méthode du paragraphe 1°) s'applique encore, et nous obtenons la :

PROPOSITION 3. — *Si Γ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{O}(d)$, la filtration quotient $\mathcal{F}/\Gamma$ est une sous-filtration brownienne d-dimensionnelle de $\mathcal{F}$, immergée dans $\mathcal{F}$.*

4°) Quotient par un sous-groupe quelconque de $\mathbb{O}(d)$

PROPOSITION 4. — *Si Γ est un sous-groupe de $\mathbb{O}(d)$ et $\overline{\Gamma}$ son adhérence dans $\mathbb{O}(d)$, on a : $\mathcal{F}/\Gamma = \mathcal{F}/\overline{\Gamma}$.*

PREUVE. — L'inclusion $\mathcal{F}/\overline{\Gamma} \subset \mathcal{F}/\Gamma$ résulte de ce que $\overline{\Gamma}$ contient Γ; il reste à montrer la réciproque, c'est-à-dire que toute v.a. X mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t/\Gamma$ l'est aussi par rapport à $\mathcal{F}_t/\overline{\Gamma}$. Nous savons que X est $\mathcal{F}_t$-mesurable, et que, pour tout $h \in \Gamma$, $X \circ h = X$ p.s.; il s'agit d'établir $X \circ k = X$ p.s. pour tout $k \in \overline{\Gamma}$. Nous pouvons supposer X bornée. Par définition de $\overline{\Gamma}$, il existe dans Γ une suite (h_n) de limite k. Par ailleurs, sur l'espace de Wiener $\Omega = \mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, les fonctions continues et bornées sont denses dans L^1; aussi existe-t-il pour tout $\varepsilon > 0$ une v.a. continue Y telle que $\mathbb{E}\big[|Y - X|\big] < \varepsilon$. L'invariance par rotations de la mesure de Wiener donne $\mathbb{E}\big[|Y \circ h_n - X \circ h_n|\big] < \varepsilon$, d'où $\mathbb{E}\big[|Y \circ h_n - Y|\big] < 2\varepsilon$ en utilisant l'hypothèse sur X. La continuité de Y permet de faire tendre n vers l'infini pour obtenir $\mathbb{E}\big[|Y \circ k - Y|\big] \leqslant 2\varepsilon$, d'où l'on déduit $\mathbb{E}\big[|X \circ k - X|\big] < 4\varepsilon$, puis, ε étant arbitraire, $X \circ k = X$ p.s. ∎

En corollaire des Propositions 3 et 4, nous pouvons énoncer le :

THÉORÈME. — *Si Γ est un sous-groupe de $\mathbb{O}(d)$, la filtration quotient $\mathcal{F}/\Gamma$ est une sous-filtration brownienne de $\mathcal{F}$ de dimension d, immergée dans $\mathcal{F}$.*

Nous terminerons par deux questions. En suivant [1], appelons *transformation brownienne* toute application mesurable $T : \Omega \to \Omega$ qui préserve la mesure de Wiener $\mathbb{P}$. Fixons un sous-groupe fermé Γ de $\mathbb{O}(d)$. Nous allons considérer la transformation brownienne $T : \Omega \to \Omega$ telle que $B \circ T = \widetilde{B}$, où $\widetilde{B}$ est le mouvement brownien engendrant $\mathcal{F}/\Gamma$ qui est fourni par la démonstration de la Proposition 3. Comme dans [1], nous noterons $\mathcal{F}^{T^n}$ la filtration naturelle du mouvement brownien d-dimensionnel $B \circ \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{n \text{ fois}}$, et nous poserons $\mathcal{F}^{T^\infty} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}^{T^n}$.

QUESTIONS. — *En appelant R la relation d'équivalence définie par :*

$$\omega_1 \, R \, \omega_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \exists h \in \Gamma \quad \omega_1 = h \circ \omega_2 \ \textit{sur} \ [t_{n-1}, t_n] \ ,$$

la filtration $\mathcal{F}^{T^\infty}$ est-elle égale à la filtration quotient $\mathcal{F}/R$?

La filtration $\mathcal{F}^{T^\infty}$ est-elle engendrée par un $\mathcal{F}$-mouvement brownien d-dimensionnel ?

Ces questions sont suggérées par la Proposition 3 de [1], qui donne des réponses positives lorsque $d = 1$.

Alors que T et $\widetilde{B} = B \circ T$ dépendent du choix d'une position canonique associée au sous-groupe Γ, une réponse positive à la première question impliquerait que la filtration asymptotique $\mathcal{F}^{T^\infty}$ n'en dépend pas. (Mais elle dépend, bien sûr, de Γ, ainsi que de la subdivision $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.)

Références

[1] S. Attal, K. Burdzy, M. Émery, Y. Hu : Sur quelques filtrations et transformations browniennes. *Sém. Proba. XXIX. Lect. Notes in Math. 1613, p. 56–69. Springer (1995).*

[2] S. Begdadi-Sakrani, M. Émery : On certain probabilities equivalent to coin-tossing, d'après Schachermayer. *Sém. Proba. XXXIII. Lect. Notes in Math. 1709, p. 241–257. Springer (1999).*

[3] J. Dieudonné : Éléments d'analyse. Tome 3. *Gauthier-Villars (1970).*

[4] J. Dieudonné : Éléments d'analyse. Tome 4. *Gauthier-Villars (1971).*

[5] M. Émery, W. Schachermayer : A remark on Tsirelson's stochastic differential equation. *Sém. Proba. XXXIII. Lect. Notes in Math. 1709, p. 292–304. Springer (1999).*

[6] A. Goswami, B.V. Rao : Conditional expectation of odd chaos given even. *Stochastics and Stochastic Reports 35, p. 213–214 (1991).*

[7] M. Malric : Filtrations browniennes et balayage. *Ann. I.H.P. 26, p. 507–540 (1990).*

[8] D. Revuz, M. Yor : Continuous Martingales and Brownian Motion. 3rd edition. *Springer (1999).*