

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DAVID KURTZ

ANTHONY PHAN

Correction à un article d'Attal et Émery sur « les martingales d'Azéma bidimensionnelles »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 35 (2001), p. 120-122

http://www.numdam.org/item?id=SPS_2001__35__120_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CORRECTION À UN ARTICLE D'ATTAL ET ÉMERY SUR LES MARTINGALES D'AZÉMA BIDIMENSIONNELLES

par

David KURTZ et Anthony PHAN

Dans l'article [1] sur les martingales d'Azéma bidimensionnelles, il est dit page 17 qu'une martingale normale¹ est presque sûrement non convergente, donc presque sûrement non unilatéralement bornée. Ceci n'est pas exact. En temps discret, on construit sans peine une martingale X convergente, et même positive, dont la variation quadratique prévisible

$$\langle X, X \rangle_n = \sum_{m < n} \mathbb{E}[(X_{m+1} - X_m)^2 \mid \mathcal{F}_m]$$

est égale à n : prendre par exemple une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ de réels strictement positifs dont la somme est convergente, poser $X_0 = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n$, et choisir les accroissements $(X_{n+1} - X_n)_{n \geq 0}$ indépendants vérifiant

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} - X_n = -\varepsilon_n\} = 1 - \mathbb{P}\{X_{n+1} - X_n = 1/\varepsilon_n\} = \frac{1}{1 + \varepsilon_n^2}.$$

Dans la même veine, en temps continu, il est facile d'exhiber des martingales normales positives, et *a fortiori* convergentes. C'est par exemple le cas de la martingale vérifiant

$$d[X, X]_t = dt + (t+1)^2 dX_t, \quad X_0 = 1,$$

qui peut s'écrire explicitement en fonction de la suite $(J_n)_{n \geq 1}$ des instants de sauts d'un processus de Poisson standard (*voir* [2]) :

$$X_t = \frac{1}{t+1} + \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{1/(t+1)^3 \leq 1-3J_n\}} (1-3J_n)^{-2/3}.$$

Mais puisque les martingales auxquelles s'intéressent Attal et Émery dans leur article sont des solutions d'équations de structure markoviennes, nous allons établir le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi(x) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{\{x > 0\}}$. Pour tout $x_0 > 0$, l'équation de structure*

$$d[X, X]_t = dt + \phi(X_{t-}) dX_t, \quad X_0 = x_0$$

a une solution, unique en loi. Cette solution est une martingale positive, à variation finie, n'ayant presque sûrement qu'un nombre fini de sauts, tendant presque sûrement vers 0 à l'infini, et possédant les propriétés de représentation prévisible et chaotique.

Rappelons que les solutions d'une équation de structure dont la loi initiale est intégrable sont toujours des martingales (par convention et d'après [2]) normales (en raison de la forme de l'équation).

1. C'est-à-dire une martingale locale réelle X telle que $(X_t^2 - t)_{t \geq 0}$ soit aussi une martingale locale, ou encore telle que $\langle X, X \rangle_t = t$.

Démonstration. — L'existence d'une telle solution X est établie par une construction trajectoire par trajectoire à l'aide de la donnée d'une suite $(T_n)_{n \geq 1}$ de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. Nous expliciterons la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ des instants de sauts de X , instants au cours desquels $\Delta X_{S_n} = \phi(X_{S_n-})$ et entre lesquels X dérivera selon le flot de l'équation différentielle $dt + \phi(x) dx = 0$, flot qui est donné par $t \mapsto x(t) = x(0) \exp(-t)$ pour toute condition initiale $x(0) > 0$.

Le premier instant de saut est défini par

$$S_1 = \begin{cases} -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2T_1}{x_0^2} \right) & \text{sur l'événement } \{T_1 < x_0^2/2\}, \\ \infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On pose $X_t = x_0 \exp(-t)$ pour tout $t \in \llbracket 0, S_1 \llbracket$, et $X_{S_1} = X_{S_1-} + \phi(X_{S_1-}) = X_{S_1-} + 1/X_{S_1-}$ sur $\{S_1 < \infty\}$. La construction est à poursuivre lorsque $S_1 < \infty$:

$$S_2 = \begin{cases} S_1 - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2T_2}{X_{S_1}^2} \right) & \text{si } S_1 < \infty \text{ et } T_2 < X_{S_1}^2/2, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sur $\{S_1 < \infty\}$, on pose $X_t = X_{S_1} \exp(-t + S_1)$ pour tout $t \in \llbracket S_1, S_2 \llbracket$, et $X_{S_2} = X_{S_2-} + 1/X_{S_2-}$ sur $\{S_2 < \infty\}$. On continue ainsi de proche en proche pour obtenir la suite croissante $(S_n)_{n \geq 1}$ et le processus X défini sur $\llbracket 0, \sup_n S_n \llbracket$.

Les $(S_n)_{n \geq 1}$ sont des temps d'arrêt de la filtration engendrée par X — qui est d'ailleurs la plus petite filtration ayant cette propriété —, et il est élémentaire de vérifier que, pour chaque n , le processus arrêté $X|^{S_n}$ est une martingale positive (et même minorée par $t \mapsto x_0 \exp(-t)$), solution sur $\llbracket 0, S_n \llbracket$ de l'équation de structure proposée (pour plus de détails, voir [4], proposition 6.1.1).

Nous allons montrer que $S_\infty = \sup_n S_n$ est presque sûrement infini. Soit $t > 0$. Chaque martingale $X|^{S_n}$ étant normale sur $\llbracket 0, S_n \llbracket$, on a

$$\mathbb{E}[X_{S_n \wedge t}^2] = x_0^2 + \mathbb{E}[S_n \wedge t] \leq x_0^2 + t,$$

ce qui montre que la martingale à temps discret $(X_{S_n \wedge t})_{n \geq 1}$ converge (presque sûrement et dans L^2) vers une limite. Ainsi, sur $\{S_\infty < t\}$, la limite X_{S_∞} existe presque sûrement, donc les sauts $\Delta X_{S_n} = \phi(X_{S_n-})$ tendent vers zéro. Mais ceci ne peut avoir lieu puisque ϕ est minorée sur tout intervalle borné $]0, A[$ de $]0, +\infty[$, et que, sur $\{S_\infty < t\}$, la suite $(X_{S_n-})_{n \geq 1}$ est majorée et qu'alors la suite $(\phi(X_{S_n-}))_{n \geq 1}$ est minorée par une variable aléatoire strictement positive. Ainsi pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}\{S_\infty < t\} = 0$. En conséquence, X est défini sur $\llbracket 0, \infty \llbracket$, et c'est une martingale normale, solution de l'équation de structure.

Par construction, le processus X est à variation finie et reste strictement positif; le théorème de convergence des martingales positives entraîne l'existence d'une limite presque sûre X_∞ , finie presque sûrement. Sur $\{S_n < \infty, \text{ pour tout } n\}$ on a donc $\Delta X_{S_n} \rightarrow 0$, ce qui comme précédemment est impossible puisque pour chaque trajectoire les $(X_{S_n-})_{n \geq 1}$ demeurent dans un intervalle borné de $]0, +\infty[$. Ainsi S_n est infini pour n assez grand, et si S_N est le dernier instant de saut de X , on a $X_t = X_{S_N} \exp(-t + S_N)$ pour tout $t \geq S_N$, d'où $X_\infty = 0$.

Pour l'unicité, on remarque que toute solution X issue de $x_0 > 0$ est une martingale strictement positive (X demeure au dessus de $t \mapsto x_0 \exp(-t)$) et ainsi converge presque sûrement. Les propriétés élémentaires des solutions d'équations d'équation de structure assurent l'unicité en loi jusqu'au premier instant où la valeur absolue du

paramètre — qui est ici le processus $(\phi(X_{t-}))_{t \geq 0}$ — devient inférieure à un $\varepsilon > 0$. En laissant tendre ce ε vers 0, on en déduit qu'il n'y a pas d'autre solution que celle proposée ci-dessus.

Enfin, la propriété de représentation prévisible se déduit de l'unicité par la proposition 3 de [2], et la représentation chaotique de la représentation prévisible par le théorème 5 de [3]. \square

Remarque. — Au prix de quelques complications mineures dans la démonstration, la proposition reste vraie pour toute fonction borélienne $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) $\phi(x) > 0$ pour tout $x > 0$;
- (ii) ϕ est localement bornée dans l'ouvert $]0, +\infty[$ et minorée sur tout intervalle borné $]0, A[$ par une constante strictement positive ;
- (iii) $\int_{0+} \phi(u) du = +\infty$.

L'hypothèse (ii) pourrait être affaiblie en ne supposant la minoration que sur les compacts de $]0, +\infty[$, mais ceci ferait perdre une partie de la conclusion : si ϕ pouvait prendre des valeurs arbitrairement petites au voisinage de 0^+ , une martingale solution pourrait comporter une infinité de petits sauts à l'infini, sa limite presque sûre restant cependant nulle.

Revenons maintenant à l'article [1]. L'assertion fautive y était utilisée pour prouver le résultat suivant : si $Z = (X, Y)$ est une martingale normale à valeurs dans une conique propre ou dégénérée du plan \mathbb{R}^2 , alors cette conique est nécessairement une hyperbole (éventuellement dégénérée en deux droites concourantes). Ce résultat subsiste, avec presque la même démonstration ; le seul point à compléter est la preuve que la conique ne peut pas être une parabole. Supposons donc Z à valeurs dans une parabole ; par un déplacement euclidien (ce qui respecte la normalité), on pourrait en mettre l'équation sous la forme $y = ax^2$, avec $a \neq 0$. On aurait donc $Y_t = aX_t^2$; en passant aux espérances, on obtiendrait l'identité $\mathbb{E}[Y_0] = a(\mathbb{E}[X_0^2] + t)$, dont il serait absurde qu'elle soit satisfaite pour tout t .

RÉFÉRENCES

- [1] ATTAL (S.) et ÉMERY (M.), « Martingales d'Azéma bidimensionnelles », *Hommage à P.-A. Meyer et J. Neveu. Astérisque*, Astérisque 236, Société Mathématique de France (1996), p. 9–21.
- [2] ÉMERY (M.), « On the Azéma martingales », *Séminaire de probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer (1989), p. 66–87.
- [3] ÉMERY (M.), « Quelques cas de représentation chaotique », *Séminaire de probabilités XXV*, Lecture Notes in Mathematics 1485, Springer (1991), p. 10–23.
- [4] TAVIOT (G.), *Martingales et Équations de Structure : Étude Géométrique*, thèse de doctorat, Université Louis Pasteur (1999).

I.R.M.A.
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg cedex
kurtz@math.u-strasbg.fr
phan@math.u-strasbg.fr