ABDELLATIF BENTALEB

Sur l'hypercontractivité des semi-groupes ultrasphériques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 33 (1999), p. 410-414
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1999__33__410_0>

SUR L'HYPERCONTRACTIVITE DES SEMI-GROUPES ULTRASPHERIQUES.

A. BENTALEB

En s'inspirant d'une démarche développée par M. LEDOUX dans le cadre gaussien [5], nous retrouvons le résultat d'hypercontractivité de D. BAKRY et M. EMERY pour les semi-groupes ultrasphériques [1].

Définitions et notations.

Pour $n > 0$, on considère, sur l'intervalle $[-1, +1]$, la famille des mesures ultrasphériques $\mu_n(dx) = K_n(1-x^2)^{\frac{n}{2}-1}dx$, où $K_n = \Gamma((n-1)/2)/\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ est la constante de normalisation qui fait de μ_n une mesure de probabilité. On associe à ces mesures la famille des opérateurs L_n définis par :

$$L_n f(x) = (1-x^2)f''(x) - nxf'(x).$$

Nous commençons par introduire des notations que nous utiliserons par la suite. L'intégrale d'une fonction par rapport à μ_n sera désignée par $< f >$, et, nous noterons $L^2(\mu_n)$ l'espace des fonctions f telles que $< |f|^2 > < \infty$. La norme dans cet espace sera notée $\|f\|_2$ et le produit scalaire de deux fonctions f et g sera noté $< f, g >$. Les notations $<>$ et $<,>$ seront remplacées par $<>_{(n)}$ et $<,>_{(n)}$ s'il y a des ambiguïtés sur la valeur de n.

Propriété de symétrie et de dissipativité.

Pour deux fonctions f et g de classe C^2 sur $[-1, +1]$, on vérifie sans peine, à l'aide d'une intégration par parties, les formules de symétrie et de dissipativité :

$$< L_n f, g > = < f, L_n g > = - < \Gamma(f,g) >,$$

où Γ est la forme bilinéaire symétrique positive qui vaut

$$\Gamma(f,g)(x) = \frac{1}{2}\left\{L_n(fg) - fL_ng - gL_nf\right\} = (1-x^2)f'(x)g'(x).$$

En appliquant la formule précédente avec $g = 1$, on obtient

$$< L_n f >= 0, \ \forall f \in C^2[-1,+1].$$

D'un autre côté, pour toute fonction $f \in C^2[-1,+1]$, cette identité implique

$$< L_n f, f > \leq 0.$$

Décomposition chaotique.

Sur la définition de l'opérateur L_n, nous voyons que, pour tout entier k, l'image par L_n d'un polynôme de degré k est à nouveau un polynôme de degré inférieur ou égal à k. L_n apparaît alors comme un opérateur symétrique sur l'espace vectoriel (de dimension finie) des polynômes de degré inférieur ou égal à k et donc il est diagonalisable dans une base orthonormée avec des valeurs propres réelles négatives. On obtient ainsi une suite $(G_k)_{k\geq 0}$ de polynômes de degré k orthogonaux dans $L^2(\mu_n)$ et par suite les polynômes $(G_k/||G_k||_2)_{k\geq 0}$ en forment une base orthonormale.

Appelons $-\lambda_k$ la $k^{ième}$ valeur propre de L_n asociée au $k^{ième}$ vecteur propre G_k : en écrivant

$$L_n G_k = -\lambda_k G_k$$

et en identifiant les coefficients des termes du plus haut degré, il vient

$$\lambda_k = k(k+n-1).$$

Remarquons que pour tout $n > 0$, le monôme x est le premier vecteur propre associé à la première valeur propre $-\lambda_1^{(n)}$, de L_n.

Si une fonction f de $L^2(\mu_n)$ se décompose sous la forme $f = \sum_{k\geq 0} a_k G_k$ avec $\sum_{k\geq 0} a_k^2 ||G_k||_2 < \infty$, alors :

$$L_n f = -\sum_{k\geq 0} \lambda_k^{(n)} a_k G_k.$$

Version intégrale du critère Γ_2.

Le procédé qui définit Γ à partir du produit permet de la même manière de définir la forme bilinéaire symétrique Γ_2 à partir de Γ :

$$\Gamma_2(f,g) = \frac{1}{2}\left\{L_n\Gamma(f,g) - \Gamma(f,Lg) - \Gamma(g,Lf)\right\}.$$

Cet opérateur a été introduit par D. BAKRY et M. EMERY dans leur étude de diffusions hypercontractives dans un cadre général, et nous renvoyons les lecteurs intéresssés au cours présenté par le premier auteur à l'École d'Été de Probabilité de Saint-Flour [2] pour mieux en comprendre l'intérêt. Il contient en outre une abondante bibliographie.

L'un des traits frappants des travaux de ces deux auteurs est une approche directe de la propriété d'hypercontractivité par l'introduction d'une hypothèse maniable (critère Γ_2). Ce point de vue a permis de retrouver dans le cas des semi-groupes ultrasphériques (de dimension n) la propriété d'hypercontractivité pour $n \geq 1/4$ (leur méthode bute sur le cas $n < 1/4$). Nous voudrions montrer ici que l'on peut obtenir un résultat analogue en utilisant seulement la version intégrale du critère Γ_2 (voir corollaire 1 de [1]) : il se présente sous la forme suivante

$$\forall f \in C^2[-1,1], \quad < e^f, \Gamma_2(f,f) > -\lambda_1^{(n)} < e^f, \Gamma(f,f) > \ \geq 0. \qquad (1)$$

Dans ces conditions, nous obtenons une inégalité de Sobolev logarithmique avec constante $2/\lambda_1^{(n)}$ ([2], p. 101), dont on sait par ailleurs qu'elle est optimale.

Pour établir ce critère intégral, nous suivons la même démarche que celle de M. LEDOUX [5] pour le semigroupe d'Hermite, en écrivant explicitement une relation de commutation du générateur L_n avec la dérivation. En effet, il est aisé de voir que, pour tout réel positif n,

$$\frac{d}{dx}L_n = [L_{n+2} - \lambda_1^{(n)} I]\frac{d}{dx}.$$

Cette formule de commutation est l'ingrédient crucial qui, jointe aux propriétés de symétrie et de dissipativité, va nous permettre d'obtenir ce critère intégral lorsque $n \geq 1/4$.

<u>Preuve.</u>

En utilisant la définition de Γ_2, le membre de gauche de (1) peut se réécrire,

$$\frac{1}{2} < e^f, L_n\Gamma(f,f) > - < e^f, \Gamma(f, L_n f) > .$$

À nouveau, par la formule de dissipativité, le premier terme de cette différence est

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} < (1-x^2)f'e^f, (\Gamma(f,f))' > \\
= \; & < (1-x^2)xe^f, f'^3 > - < (1-x^2)^2 f'^2 e^f f'' > \\
= \; & \frac{K_n}{K_{n+2}} \frac{1}{\lambda_1^{(n+2)}} < -L_{n+2}(x), e^f f'^3 >_{(n+2)} - < (1-x^2)^2 f'^2 e^f f'' > \\
= \; & \frac{1}{\lambda_1^{(n+2)}} < (1-x^2)^2 e^f [3 f'^2 f'' + f'^4] > - < (1-x^2)^2 e^f f'^2 f'' >,
\end{aligned}
$$

la dernière égalité provenant cette fois-ci de la symétrie de l'opérateur L_{n+2}. Le deuxième terme s'écrit quant à lui

$$
\begin{aligned}
& < e^f, (1-x^2) f'(L_n f)' > = \frac{K_n}{K_{n+2}} < e^f f', L_{n+2}(f') - \lambda_1^{(n)} f' >_{(n+2)} \\
= \; & \frac{K_n}{K_{n+2}} < L_{n+2}(f'), f'e^f >_{(n+2)} - \lambda_1^{(n)} < e^f, \Gamma(f,f) > \\
= \; & - < (1-x^2)^2 e^f (f'^2 f'' + f''^2) > - \lambda_1^{(n)} < e^f, \Gamma(f,f) >,
\end{aligned}
$$

où nous avons fait usage à la fois de la propriété de dissipativité et de la formule de commutation.

En définitive, il nous reste, après avoir arrangé les termes,

$$
\begin{aligned}
& < e^f, \Gamma_2(f,f) - \lambda_1^{(n)} \Gamma(f,f) > \\
= \; & < (1-x^2)^2 e^f [f''^2 + \frac{1}{\lambda_1^{(n+2)}} (3 f'^2 f'' + f'^4)] > \\
= \; & \frac{1}{n+2} < (1-x^2)^2 e^f [(\sqrt{n+2} f'' + \frac{3}{\sqrt{n+2}} f'^2)^2 + \frac{n-1/4}{n+2} f'^4] >
\end{aligned}
$$

qui est positive lorsque $n \geq 1/4$. La condition $n \geq 1/4$ n'est pas nécessaire pour obtenir une inégalité de Sobolev Logarithmique qui, rappelons-le, est équivalente à la propriété d'hypercontractivité (voir [7] et [3]). Mais, par cette méthode, nous n'avons pas su la montrer pour $0 < n < 1/4$, et on retrouve ainsi l'obstruction rencontrée dans [1] dans leur approche directe à l'aide du semigroupe associé à L_n. Peut-être un lecteur sera-t-il plus habile que nous ?

L'auteur tient à remercier les Professeurs D. BAKRY et M. LEDOUX pour leur accueil au sein du laboratoire de Statistique et Probabilités de l'Université Paul Sabatier de Toulouse durant le mois de mars 1998.

Références bibliographiques

[1] D. BAKRY et M. EMERY, Diffusions hypercontractives, Lecture Notes in Maths 1123 (1985), 177-206, Springer-Verlag.

[2] D. BAKRY, L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour 1992, Lecture Notes in Maths 1581 (1994), 1-114, Springer-Verlag.

[3] A. BENTALEB, Inégalités de Sobolev pour l'opérateur ultrasphérique, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, t.317 (1993), 187-190.

[4] A. BENTALEB, Développement de la moyenne d'une fonction pour la mesure ultrasphérique, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, t.317 (1993), 781-784.

[5] M. LEDOUX, On an Integral Criterion for Hypercontractivity of Diffusion Semi-groups and Extremal Functions, J. Func. Anal. 105 (1992), 444-465.

[6] M. LEDOUX, L'algèbre de Lie des gradients itérés d'un générateur markovien. Développements de moyennes et entropies, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 28 (1995), 435-460.

[7] C. MUELLER et F. WEISSLER, Hypercontractivity for the Heat Semi-group for Ultraspherical Polynomials and on the n-sphere, J. Funct. Anal. 48 (1982), 252-283.