SANDRINE LAGAIZE

Sur les temps de coupure des marches aléatoires réfléchies

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 32 (1998), p. 426-429

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1998__32__426_0>

Sur les temps de coupure des marches aléatoires réfléchies

Sandrine Lagaize
UMR 6628-MAPMO
Université d'Orléans et CNRS
B.P. 6759
45067 Orléans Cedex 2
FRANCE

Abstract : The paths of bilateral reflected simple random walks in dimension $d \geq 5$ have a.s. infinitely many cut times.

L'étude des points et temps de coupure du mouvement brownien en diverses dimensions est ancienne ([2]) et de récents travaux de Burdzy ([1]) et Lawler ([4]) ont provoqué un regain d'intérêt pour ces questions. Dans son livre ([3]), Lawler s'intéresse aux marches aléatoires simples. S'il apparaît que la récurrence empêche l'existence de temps de coupure en dimension un et deux, la situation est moins claire en dimension trois et quatre ([5]), et il est plus simple de considérer des marches bilatères, c'est-à-dire indexées par l'ensemble des entiers relatifs. Dans ce cadre, Lawler montre que, presque sûrement, il n'existe pas de temps de coupure en dimension $d \leq 4$, et qu'il y en a une infinité si $d \geq 5$. C'est ce résultat que nous nous proposons d'établir pour la marche aléatoire bilatère réfléchie sur un hyperplan. La ligne générale de la démonstration de Lawler nous servira de guide; cependant la réflexion va introduire un certain nombre de difficultés spécifiques.

Soit $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées dans $\mathbb{Z}^d$ de loi définie par

$$P(X_n = e) = \frac{1}{2d}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout e dans $\mathbb{Z}^d$ vérifiant $|e| = 1$. On définit la *marche aléatoire simple bilatère* issue de $x \in \mathbb{Z}^d$ en posant

$$\begin{aligned} S_0 &= x \\ S_n &= S_{n-1} + X_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Pour tout $y = (y^1, \cdots, y^d) \in \mathbb{Z}^d$, on note

$$\begin{aligned} y^{|d|} &= (y^1, \cdots, y^{d-1}, |y^d|) \\ \tilde{y} &= (y^1, \cdots, y^{d-1}, -y^d). \end{aligned}$$

La *marche aléatoire simple bilatère réfléchie* W associée à $S = (S_n)$ est définie par

$$W_n = S_n^{|d|} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Pour tout intervalle I d'entiers relatifs, on pose

$$SI = \{S_j \ ; \ j \in I\} \quad \text{et} \quad WI = \{W_j \ ; \ j \in I\}$$

et on dit que $j \in \mathbb{Z}$ est un *temps de coupure* de S, resp. W, si

$$S]-\infty, j] \cap S]j, +\infty] = \emptyset, \quad \text{resp.} \quad W]-\infty, j] \cap W]j, +\infty] = \emptyset.$$

Comme un temps de coupure de W est nécessairement un temps de coupure de S, le résultat de Lawler entraîne immédiatement que si $d \leq 4$, p.s., il n'existe aucun temps de coupure de W. La réflexion provoquant des intersections supplémentaires, il n'est pas a priori évident, quand $d \geq 5$, que le nombre de temps de coupure de W reste p.s infini. C'est ce que nous allons établir.

Théorème : *Si $d \geq 5$, pour tout $x \in (\mathbb{Z}^d)^+ := \mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{N}$, le nombre de temps de coupure de la marche aléatoire simple bilatère réfléchie issue de x est p.s. infini.*

1re étape : Choisissons x quelconque dans $(\mathbb{Z}^d)^+$. Notons P^x la probabilité pour laquelle $S_0 = x$ et posons

$$\begin{aligned} g(x) &= P^x(W]-\infty, 0] \cap W]0, +\infty[= \emptyset) \\ R &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}(W_{-i} = \hat{W}_j). \end{aligned}$$

D'après le théorème local de la limite centrale ([3], p.14),

$$E^x(R) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} [P^x(S_{-i} = S_j) + P^x(S_{-i} = \tilde{S}_j)] \leq 2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P^0(S_{i+j} = 0) < \infty.$$

On remarquera que si $x^d = y^d$ alors $g(x) = g(y)$.
Commençons par vérifier que g n'est pas identiquement nulle. D'après le résultat ci-dessus, P^x-p.s. il n'existe qu'un nombre fini de couples (k, l) dans $\mathbb{N}^2$ tels que $W_{-k} = W_l$, et

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P^x(\{W_{-i} = W_j\} \cap \{W]-\infty, -i] \cap W]j, +\infty[= \emptyset\}) \geq 1.$$

D'autre part,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} P^x(\{W_{-i}=W_j\}\cap\{W]-\infty,-i]\cap W]j,+\infty[=\emptyset\})$$
$$= \sum_{y\in(\mathbb{Z}^d)^+}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} P^x(W_{-i}=W_j=y)P^y(W]-\infty,0]\cap W]0,+\infty[=\emptyset).$$

On en déduit qu'il existe y_0 tel que $g(y_0)>0$.
2$^{\text{e}}$ étape : On définit la suite bilatère des temps aléatoires suivants

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_k &= \inf\{j>T_{k-1}\ ;\ S_j^d=x^d\} \quad \text{pour tout } k\geq 1 \\ T_k &= \sup\{j<T_{k+1}\ ;\ S_j^d=x^d\} \quad \text{pour tout } k\leq -1. \end{aligned}$$

Pour $n\geq 1$ et $i\geq 1$, on note

$$\begin{aligned} V_{i,n} &= \{W]-\infty,T_{(2i-1)n}]\cap W]T_{(2i-1)n},+\infty[=\emptyset\} \\ W_{i,n} &= \{W[T_{(2i-2)n},T_{(2i-1)n}]\cap W]T_{(2i-1)n},T_{2in}]=\emptyset\} \\ \text{et}\quad g_n(x) &= P^x(W[T_{-n},0]\cap W]0,T_n]=\emptyset\}. \end{aligned}$$

La récurrence de la marche (S_n^d) montre que $P^x(T_k<\infty)=1$. Pour tout $k\geq 1$, posons

$$W'_n = W_{T_k+n}-W_{T_k}+x \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Il est facile de vérifier que pour P^x, (W_n) et (W'_n) ont même loi, et par conséquent, pour tout $n\geq 1$ et pour tout $i\geq 1$,

$$\begin{aligned} P^x(W_{i,n}) &= g_n(x) \\ P^x(V_{i,n}) &= g(x). \end{aligned}$$

On vérifie facilement aussi que les $(W_{i,n}\ ;\ i\geq 1)$ sont indépendants pour P^x.
3$^{\text{e}}$ étape : Nous sommes maintenant en mesure, en reprenant la démonstration de Lawler, de prouver le résultat proposé lorsque la marche est issue d'un point $x\in(\mathbb{Z}^d)^+$ vérifiant $g(x)>0$. Notons X le nombre de temps de coupure positifs de $W]-\infty,+\infty[$. Pour tout $k\geq 1$, tout $m\geq 1$ et tout $n\geq 1$,

$$\begin{aligned} P^x(X\geq k) &\geq P^x\Big(\sum_{i=1}^{m}\mathbb{1}(V_{i,n})\geq k\Big) \\ &\geq P^x\Big(\sum_{i=1}^{m}\mathbb{1}(W_{i,n})\geq k\Big) - P^x\Big(\sum_{i=1}^{m}\mathbb{1}(W_{i,n}\backslash V_{i,n})\geq 1\Big) \\ &\geq P^x\Big(\sum_{i=1}^{m}\mathbb{1}(W_{i,n})\geq k\Big) - \sum_{i=1}^{m}(P^x(W_{i,n})-P^x(V_{i,n})). \end{aligned}$$

D'après l'étape précédente, $\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(W_{i,n})$ suit une loi binomiale de paramètres m et $g_n(x)$ avec $g_n(x) \geq g(x) > 0$. Il en résulte que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \geq 1$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$P^x(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(W_{i,n}) \geq k) \geq 1 - \varepsilon.$$

D'autre part, $\sum_{i=1}^{m}(P^x(W_{i,n}) - P^x(V_{i,n})) = m(g_n(x) - g(x))$, et comme $g_n(x) \to g(x)$, on peut choisir n assez grand pour que $P^x(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}(V_{i,n}) \geq k) \geq 1 - 2\varepsilon$, et on en déduit que

$$P^x(X = +\infty) = 1.$$

Un raisonnement analogue montrerait que la marche réfléchie possède aussi une infinité de temps de coupure négatifs.

4^{e} étape: Soit maintenant x quelconque dans $(\mathbb{Z}^d)^+$. Notons A l'événement "W admet une infinité de temps de coupure ". En sommant sur $m \geq 0$ et sur l'ensemble des chemins possibles C de longueur m qui mènent de x à un premier point x_m vérifiant $x_m^d = y_0^d$, on a

$$\begin{aligned} P^x(A) &= \sum P^x(A \cap (S_0, \cdots, S_m) = C) \\ &= \sum P^{x_m}(A \cap (S_{-m}, \cdots, S_0) = C) \\ &= \sum P^{x_m}((S_{-m}, \cdots, S_0) = C) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Références

[1] Burdzy, K., (1989). Cut points on Brownian paths. Ann. Proba. **17**, 1012-1036.

[2] Dvoretsky, A., Erdös, P., Kakutani, S., (1950). Double points of paths of Brownian motions in n-space. Acta. Sci. Math. Szeged. **12**, 75-81.

[3] Lawler, G., (1991). *Intersections of Random Walks.* Birkhäuser, Boston.

[4] Lawler, G., (1996). Hausdorff dimension of cut points for Brownian motion. Electronical Journal of Probability **1**, paper n° 2.

[5] Lawler, G., (1996). Cut times for simple random walk. Electronical Journal of Probability **1**, paper n° 13.