Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Olivier Mazet

Classification des semi-groupes de diffusion sur $\mathbb{R}$ associés à une famille de polynômes orthogonaux

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 31 (1997), p. 40-53

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1997__31__40_0>

Classification des Semi-Groupes de diffusion sur $I\!R$ associés à une famille de polynômes orthogonaux

Olivier Mazet
Laboratoire de Statistique et Probabilités
Université Paul Sabatier, Toulouse III
118 Route de Narbonne 31062 Toulouse Cedex

1 Introduction.

Un semi-groupe de Markov est le noyau de transition d'un processus de Markov ; un semi-groupe de diffusion est un semi-groupe de Markov particulier, dont il constitue dans certaines situations le cas limite.

Nous considérons ici les diffusions au sens de Bakry-Emery ([5]), dont la définition, un peu plus restrictive que celle usuellement utilisée dans les ouvrages de références (voir par exemple [11]), sera précisée au paragraphe suivant.

Le but de ce travail est d'étudier les semi-groupes opérant sur un intervalle de $I\!R$, qui ont la propriété de diffusion, dont la mesure réversible admette un moment exponentiel, et qui laissent stable pour tout n l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Les exemples connus de cette situation sont les semi-groupes d'Ornstein Uhlenbeck, Ultra-sphériques, de Laguerre, de Jacobi. Il existe une littérature abondante les étudiant en détail. On pourra se référer par exemple à [8], [6], [12], [22].

On montre, dans un premier temps, que essentiellement, ces semi-groupes sont les seuls. Dans une deuxième partie, on met en évidence, au moyen de transformations géométriques, les liens qui unissent ces semi-groupes. Fondamentalement, ces derniers peuvent se retrouver, pour certaines valeurs entières des paramètres, à partir du mouvement brownien sur les sphères, et passages à la limite sur la dimension des sphères.

Afin de se familiariser avec le cadre d'étude général, essentiellement algébrique, que l'on va se fixer, voici un exemple simple :

Exemple : Rappelons brièvement l'exemple bien connu du semi-groupe d'Ornstein Uhlenbeck (pour une présentation plus détaillée, voir par exemple [15]), défini de la façon suivante :

Pour une fonction f borélienne bornée

$$P_t f(x) = \int_{I\!R} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\,\mu(dy)$$

avec $\mu(dy) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dy$ mesure gaussienne.

Le générateur infinitésimal de $(P_t)_{t\geq 0}$ s'écrit

$$Lf(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t f - f)(x) = f''(x) - xf'(x), \quad pour f \in \mathcal{C}_b^2.$$

(Remarquons que l'on a évité le coefficient multiplicatif $\frac{1}{2}$ dans l'expres-sion de L, qui apparaît dans la définition classique du semi-groupe d'Orn-stein-Uhlenbeck, par une simple homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ sur t.)

Si on considère la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes d'Hermite, on voit que

$$\{H_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ est totale dans } L^2(\mathbb{R}, d\mu) \tag{1.1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad LH_n = -nH_n \tag{1.2}$$

Comme on va le voir, L, (1.1) et (1.2) suffisent à caractériser le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck, (ou plus précisément la famille des semi-grou-pes d'Ornstein-Uhlenbeck, de paramètres quelconques, moyennant une hypothèse selon laquelle on travaille à affinité près).

En fait, la donnée du générateur infinitésimal et de son image sur une partie dense de son domaine permet de caractériser le semi-groupe associé. On va maintenant dresser, ci-dessous, une liste exhaustive des semi-groupes de diffusion sur un intervalle de $\mathbb{R}$, associés à des familles de polynômes orthogonaux, avec les hypothèses naturelles que l'on précise dans le paragraphe suivant.

2 Notations - Hypothèses.

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(I)$ tribu des boréliens sur I. On s'intéresse à l'espace mesuré $E = (I, \mathcal{B}(I), \mu)$, où μ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et vérifiant la propriété suivante :

μ admet un moment exponentiel, i.e. :

$$\exists \lambda > 0 \int_I e^{\lambda |x|} \mu(dx) < +\infty \tag{Pme}$$

μ est alors une mesure finie sur I, que l'on peut supposer ramenée à une mesure de probabilité par normalisation. On montre, au moyen de la transformée de Laplace, que (Pme) est une condition suffisante pour que l'ensemble des polynômes soit dense dans $L^2(E)$.

Il existe donc une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthonormés sur I, dense dans $L^2(E)$, telle que degré $(Q_n) = n$, unique au signe près : on suppose que le coefficient du plus haut degré est positif, ce qui caractérise entièrement (Q_n). En fait, cette suite (Q_n) est obtenue à partir de $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

On s'intéresse aux semi-groupes de Markov, symétriques dans $L^2(E)$, qui admettent la suite (Q_n) comme décomposition spectrale. On définit un semi-groupe de Markov admettant μ comme mesure stationnaire par une famille $(P_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs agissant sur les fonctions boréliennes bornées, et vérifiant :

- $P_t P_s = P_{t+s}$; $\quad P_0 = Id$,
- $f \geq 0 \Rightarrow P_t f \geq 0$; $\quad P_t 1 = 1$,

- $\forall f \in L^1(E) \quad \int_I P_t f\, d\mu = \int_I f\, d\mu$ (hypothèse d'invariance).

On voit alors que (P_t) est une contraction de $L^p(E)$ dans lui-même, et ce $\forall p \in [1, +\infty[$. On exige alors de plus, que

- $\forall f \in L^2(E) \quad \lim_{t\to 0} P_t f = f$ dans $L^2(E)$,
- $\forall f, g \in L^2(E) \quad \int_I (P_t f) g\, d\mu = \int_I f(P_t g)\, d\mu$ (hypothèse de symétrie).

(En ce qui concerne les semi-groupes de diffusion sur I, sur lesquels on va porter notre intérêt, l'hypothèse de symétrie est en fait équivalente à l'hypothèse d'invariance, et ce grâce à une propriété spécifique de la dimension 1, où tout champ de vecteurs est un champ de gradient).

L'hypothèse de symétrie montre alors que le semi-groupe admet une décomposition spectrale :

$$P_t = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, dE_\lambda,$$

où (E_λ) est une famille croissante de projecteurs orthogonaux. Ce que l'on demande ici, c'est que cette décomposition spectrale soit en fait une décomposition en vecteurs propres, et que ces vecteurs propres soient les polynômes Q_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_t Q_n = e^{-\lambda_n t} Q_n,$$

d'où

$$f \in L^2(E) \Rightarrow f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n Q_n \Rightarrow P_t f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n e^{-\lambda_n t} Q_n.$$

On introduit alors le générateur infinitésimal de P_t dans $L^2(E)$:

Définition 1

$$Lf(x) = \lim_{t\to 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t}$$

$\forall f \in \mathcal{D}_2(L)$ ensemble des fonctions de $L^2(E)$ telles que la limite existe.

On a alors

$$\forall n \quad LQ_n = -\lambda_n Q_n$$

et

$$\mathcal{D}_2(L) = \{f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n Q_n \in L^2(E), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2 f_n^2 < +\infty\}.$$

L'étude des familles (Q_n) et des semi-groupes de Markov associés est un sujet assez difficile qu'il est impossible d'aborder ici. On renvoie à [16] et à [10], pour des caractérisations dans les cas simples des polynômes d'Hermite et de Jacobi, des suites (λ_n) pour lesquelles le semi-groupe associé est un semi-groupe de Markov.

On se restreint donc à l'étude des semi-groupes de diffusion :

Définition 2 *Pour tout couple de polynômes (f,g) on définit la quantité*

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}[L(fg) - fLg - gLf].$$

Cet opérateur bilinéaire est appelé opérateur carré du champ.

Il reste à définir la propriété de diffusion du semi-groupe, et enfin à poser le cadre d'étude de son générateur infinitésimal.

Dans ce cadre, on se donne une définition de la propriété de diffusion adaptée à la famille des polynômes ; c'est une définition "algébrique".

Définition 3 *On dit que $(P_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de diffusion si, pour f et ϕ polynômes, on a :*

$$L[\phi(f)] = \phi'(f)Lf + \phi''(f)\Gamma(f,f) \qquad (Pd).$$

Remarque 1 On n'aura besoin en fait de cette hypothèse que lorsque $f = x$.

En effet, si on écrit (Pd) en prenant en particulier $\phi = Q_n$ et $f = x$, on obtient

$$L(Q_n(x)) = Q_n'(x)Lx + Q_n''(x)\Gamma(x,x).$$

Par linéarité, on voit donc que, sur les polynômes, L s'écrit:

$$L = \Gamma(x,x)\frac{d^2}{dx^2} + L(x)\frac{d}{dx}.$$

◇

Si on traduit maintenant le fait que $\forall n \quad LQ_n = -\lambda_n Q_n$ sur Q_1 et Q_2, on obtient que

$$\Gamma(x,x) = Ax^2 + Bx + C, \quad L(x) = ax + b.$$

Finalement, L se met sous la forme

$$L = (Ax^2 + Bx + C)\frac{d^2}{dx^2} + (ax+b)\frac{d}{dx},$$

avec A, B, C, a, b, réels.

Tout le travail de classification va être basé sur l'étude de ce générateur infinitésimal, par la discussion des valeurs des paramètres A, B, C, a et b, et de la forme de l'intervalle I.

Le cadre de cette étude est posé par l'énoncé des hypothèses suivantes :

On travaille à affinité près pour la "variable d'espace", et à homothétie près pour la "variable de temps", c'est-à-dire que l'on se permet, pour simplifier l'étude, et l'on peut vérifier facilement qu'il n'y a aucune perte de généralité, de travailler "modulo" les opérations suivantes :

$$\begin{array}{lll} x \mapsto mx & x \in I,\ m \in \mathbb{R}^* & (H.1) \\ x \mapsto x+p & x \in I,\ p \in \mathbb{R} & (H.2) \\ L \mapsto \lambda L & \lambda \in \mathbb{R}^* & (H.3) \end{array}$$

L étant le générateur infinitésimal.

Remarque 2 D'une part, nous avons :

$$\forall x \in I \quad \Gamma(x,x) \geq 0 \Rightarrow Ax^2 + Bx + C \geq 0.$$

D'autre part, nous avons, en écrivant $\mu(dx) = a(x)\,dx$:

$$\begin{aligned}\int_I fLg\,d\mu &= \int_I (\Gamma(x,x)g''(x) + L(x)g'(x))f(x)a(x)\,dx \\ &= [\Gamma(x,x)g'(x)f(x)a(x)]_I - \int_I \Gamma(x,x)a(x)f'(x)g'(x)\,dx \\ &\quad + \int_I L(x)g'(x)f(x)a(x)\,dx - \int_I (\Gamma(x,x)a(x))'f(x)g'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Le fait que L soit symétrique dans $L^2(E)$, montre que si l'on prend f et g à support compact dans I, on obtient que

$$(\Gamma(x,x)a(x))' = L(x)a(x),$$

d'où

$$a(x) = \exp\int_{x_0}^x \frac{L(u) - \Gamma'(u,u)}{\Gamma(u,u)}\,du.$$

Donc la symétrie de L sur les polynômes implique que le terme entre crochets de l'intégration par parties doit s'annuler aux bords de I, pour tout f et g. $a(x)$ ne s'annulant aux bords que si $\Gamma(x,x)$ fait de même, on obtient l'équivalence suivante :

$$x \in I \Leftrightarrow Ax^2 + Bx + C > 0 \qquad (Pp).$$

◇

3 Résultat Principal.

Nous allons maintenant démontrer la

Proposition : Les seuls semi-groupes de diffusion[1] satisfaisant toutes les hypothèses énoncées – donc en particulier à une affinité près, $((H.1)$ et $(H.2))$ – sont ceux associés aux générateurs suivants :

a) $L = \dfrac{d^2}{dx^2} - x\dfrac{d}{dx}$.

$I = \mathbb{R}$ muni de $\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ mesure gaussienne.

$(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors la suite des polynômes d'Hermite, définis par leur série génératrice :

$$\exp(tx - \frac{t^2}{2}) = \sum_n \frac{t^n}{n\,!}Q_n(x),$$

et on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad LQ_n = -nQ_n$.

Le semi-groupe associé est ici celui d'Ornstein-Uhlenbeck.

[1] Pour une étude détaillée de ces semi-groupes, et en particulier du cas b), on peut se référer, outre les ouvrages cités dans l'introduction, à [17] et [14].

b) $L = x\dfrac{d^2}{dx^2} + (\gamma + 1 - x)\dfrac{d}{dx}, \quad \gamma > -1.$

$I =]0, +\infty[$ muni de $\mu(dx) = K_\gamma e^{-x} x^\gamma \, dx$.

$(Q_n^\gamma)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors la suite des polynômes de Laguerre, définis par leur série génératrice :

$$(1-t)^{-\gamma-1} \exp(-\frac{xt}{1-t}) = \sum_n t^n Q_n^\gamma(x),$$

et on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad LQ_n^\gamma = -nQ_n^\gamma$.

c) $L = (1-x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} + (\beta - \gamma - (\beta + \gamma + 2)x)\dfrac{d}{dx}, \quad \beta > -1, \gamma > -1.$

$I =]-1, 1[$ muni de $\mu(dx) = K_{\beta,\gamma}(1-x)^\gamma(1+x)^\beta \, dx$.

$(Q_n^{\gamma,\beta})$ est alors la suite des polynômes de Jacobi, définis par leur série génératrice :

$$2^{\gamma+\beta}(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - t + (1 + 2xt + t^2)^{\frac{1}{2}})] - \gamma(1 + t1(1 - 2xt + t^2)^{\frac{1}{2}})^{-\beta} =$$

$$\sum_n t^n Q_n^{\gamma,\beta}(x),$$

et on a $\forall n \in \mathbb{N}. \quad LQ_n^{\gamma,\beta} = -n(n + \gamma + \beta + 1)Q_n^{\gamma,\beta}$.

Preuve.

1ère étape :

L étant le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de diffusion sur $E = (I, \mathcal{B}(I), \mu)$, il possède la propriété suivante : les valeurs propres (λ_n) associées à la suite orthogonale de vecteurs propres $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont négatives. Or si l'on identifie les coefficients des termes du plus haut degré de l'équation :

$$LQ_n = \lambda_n Q_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

on obtient que

$$\forall n \quad An(n-1) + an = \lambda_n,$$

d'où

$$\forall n \geq 1, \quad A(n-1) + a \leq 0 \Rightarrow A \leq 0,$$

donc

$$\text{si } A \neq 0, \text{ alors } \forall n \geq 1 \quad \frac{a}{A} \geq 1 - n \Rightarrow a \leq 0,$$

$$\text{si } A = 0, \text{ alors } \; a \leq 0.$$

On obtient donc

$$A \leq 0 \text{ et } a \leq 0. \tag{3.1}$$

2ème étape :
On distingue trois formes fondamentales que peut revêtir l'intervalle I :

- $I = \mathbb{R}$,
- $I =]x_0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, x_0[$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$,
- $I =]x_0, y_0[$, x_0, y_0 réels distincts.

On applique dans chaque cas, une partie ou la totalité des hypothèses $(H.1)$, $(H.2)$, $(H.3)$ et la propriété (Pp) :

a) $I = \mathbb{R}, \quad \Gamma(x,x) = Ax^2 + Bx + C.$

La propriété (Pp) entraîne que l'on a nécessairement $A = 0$ et $B = 0$. D'autre part, on applique $(H.3)$ pour se ramener à la valeur $C = 1$, d'où le cas se réduit à l'étude de

$$I = \mathbb{R}, \quad \Gamma(x,x) = 1.$$

b) $I =]x_0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, x_0[, \quad \Gamma(x,x) = Ax^2 + Bx + C.$

On utilise $(H.1)$ et $(H.2)$ pour ramener I à la forme $I =]0, +\infty[$.
On remarque que l'on n'a utilisé $(H.1)$ qu'en partie, et que l'on peut encore transformer x en mx avec $m > 0$).
La propriété (Pp) nous montre alors que $A = 0$, et $C = 0$; enfin $(H.3)$ nous ramène à $B = 1$, d'où la cas se réduit à l'étude de

$$I =]0, +\infty[, \quad \Gamma(x,x) = x.$$

c) $I =]x_0, y_0[, \quad \Gamma(x,x) = Ax^2 + Bx + C.$

De la même manière, on obtient :
$(H.1)$ et $(H.2) \Rightarrow$ on se ramène à $I =]-1, 1[$,
$(Pp) \Rightarrow B = 0$ et $C = -A$,
$(H.3) \Rightarrow C = -A = 1$, d'où le cas se réduit à l'étude de

$$I =]-1, 1[, \quad \Gamma(x,x) = 1 - x^2.$$

3ème étape :
On introduit l'outil principal de calcul, qui consiste à effectuer sur I un changement de variables bijectif $y = \phi(x)$, de façon à ce que L se mette sous la forme classique

$$L = \frac{d^2}{dy^2} + \alpha(y)\frac{d}{dy}$$

sur $J = \phi(I)$. On doit donc poser

$$\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(x,x)}}.$$

On vérifie alors facilement que la mesure ν de densité $\exp(\int_K^y \alpha(t)\,dt)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, satisfait à la propriété de symétrie pour l'opérateur L, c'est-à-dire que

$$\langle Lf, g\rangle_{L^2(\nu)} = \langle Lg, f\rangle_{L^2(\nu)}, \quad \forall f, g \in \mathcal{D}_2(L).$$

Le changement de variables permet de trouver la mesure réversible associée au semi-groupe. Il suffit donc de revenir à la forme première de L, et de retenir les valeurs des paramètres telles que la mesure image $\mu = \phi^{-1}(\nu)$ vérifie la propriété (Pme). Ce changement de variables a essentiellement été utilisé pour ramener l'opérateur L à sa forme fondamentale, et il est à remarquer que les mêmes calculs auraient pu être faits en gardant tel quel le coefficient de la dérivée d'ordre 2.

Enfin, il ne reste plus qu'à appliquer celles des hypothèses $(H.1), (H.2)$ ou $(H.3)$ qui n'auraient pas encore été utilisées, dans chaque cas, pour clore la classification :

a) $I = I\!R$

L se trouve déjà sous la forme désirée

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + (ax+b)\frac{d}{dx}, \quad a \leq 0.$$

On obtient alors

$$\mu(dx) = K_1 e^{\frac{a}{2}x^2 + bx}\,dx,$$

le fait que μ vérifie (Pme) entraîne que $a \neq 0$, et on utilise $(H.1)$ et $(H.2)$ pour poser $y = -(ax+b)$, et pour obtenir enfin

$$\mu(dy) = K e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy,$$

avec

$$L = \frac{d^2}{dy^2} - y\frac{d}{dy}.$$

b) $I =]0, +\infty[$.

$$L = x\frac{d^2}{dx^2} + (ax+b)\frac{d}{dx}, \quad a \leq 0 \;;$$

on pose $y = \sqrt{x}$, d'où

$$L = \frac{d^2}{dy^2} + (\frac{a}{2}y + \frac{2b-1}{y})\frac{d}{dy},$$

donc

$$\nu(dy) = K_1 e^{\frac{a}{4}y^2} y^{2b-1}\,dy,$$

d'où

$$\mu(dx) = K e^{ax} x^{b-1}\,dx,$$

et $(Pme) \Rightarrow a \neq 0$ et $b > 0$.

On utilise enfin complètement $(H.1)$ pour se ramener à

$$\mu(dx) = Ke^{-x}x^{b-1},$$

ce qui est le résultat annoncé avec $\gamma = b - 1$.

c) $I =]-1, 1[$.

$$L = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + (ax+b)\frac{d}{dx}, \quad a \leq 0.$$

On pose $y = \phi(x) = \arcsin(x)$, d'où[2]

$$L = \frac{d^2}{dy^2} + [(a+1)\tan(y) + \frac{b}{\cos(y)}]\frac{d}{dy},$$

d'où on obtient

$$\nu(dy) = K_1(1+\tan^2(y))^{\frac{a+1}{2}}(\frac{\sin y + 1}{\cos y})^b\, dy,$$

donc

$$\mu(dx) = K(1-x)^{-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}-1}(1+x)^{-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-1}\, dx,$$

ce qui est le résultat annoncé avec $\gamma = -1 - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$, et $\beta = -1 - \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$, enfin $(Pme) \Rightarrow \gamma > -1$ et $\beta > -1$.

Remarque 3 Plus généralement, considérons E un espace de probabilité quelconque, L un opérateur de diffusion admettant comme décomposition spectrale une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions satisfaisant les propriétés suivantes :

- $\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad \exists \lambda_i$ réels, $\quad f_n f_p = \sum_{i=0}^{n+p} \lambda_i f_i,$
- f_1 bijection de E sur $f_1(E)$.

Par récurrence, on montre facilement que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \exists \mu_i \text{ réels}, \quad f_k = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_1^i,$$

et après le changement de variables $y = f_1(x)$, on est ramené à notre cadre d'étude basé sur les polynômes de la variable réelle. ◇

4 Remarques sur l'interprétation géométrique de ces processus de diffusion particuliers.

Il est intéressant de remarquer que tous ces processus de diffusions peuvent se retrouver, pour certaines valeurs entières des paramètres, au moyen de diverses transformations géométriques, à partir du mouvement brownien sur les sphères de $\mathbb{R}^n$. On peut trouver certaines de ces remarques dans [12], que l'on généralise notamment aux semi-groupes de Jacobi dissymétriques.

[2] Il est intéressant de rapprocher la famille des processus relative à ce générateur infinitésimal, avec celle dégagée dans [1], voir la remarque 5 page 11.

On note :

- $S_r^{n-1} = \{x \in I\!R^n, \|x\| = r\}$
- $D_r^n = \{x \in I\!R^n, \|x\| \leq r\}$
- $\Phi_{n,p}^r$ projection de S_r^{n-1} sur un sous-espace vectoriel de dimension $p \leq n-1$ passant par l'origine :

$$\Phi_{n,p}^r(S_r^{n-1}) = D_r^p.$$

Le mouvement brownien sur S_1^{n-1} se projette par $\Phi_{n,p}^1$ sur un processus de Markov, sur D_1^p, de générateur infinitésimal qui s'écrit dans la base canonique :

$$L_{n,p} = \sum_{i=1}^{p} (\delta^{ij} - x^i x^j) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - n \sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

On pose $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}$ norme euclidienne de $I\!R^p$.

On considère les fonctions sur D_1^p qui ne dépendent que de ρ, et on obtient alors que

$$L_{n,p}^{(\rho)} f(\rho) = (1-\rho^2) f''(\rho) + \frac{p-1}{\rho} f'(\rho) - n\rho f'(\rho) \quad \text{avec} \quad \rho \in [0,1].$$

On effectue alors le changement de variables

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [-1,1] \\ \rho & \mapsto & x = 2\rho^2 - 1, \end{array}$$

pour obtenir

$$L_{n,p}^{(x)} f(x) = 4[(1-x^2) f''(x) + (\frac{n+1-2p}{2} - \frac{n+1}{2} x) f'(x)].$$

L'opérateur

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + (\frac{n+1-2p}{2} - \frac{n+1}{2}x)\frac{d}{dx}$$

est l'opérateur de Jacobi de paramètres $\beta = \frac{n-p-1}{2}$ et $\gamma = \frac{p-2}{2}$.

On vient d'obtenir l'ensemble des opérateurs de Jacobi dissymétriques dont les paramètres sont des demi-entiers ; de plus on remarque que les conditions $\beta > -1$, $\gamma > -1$ se traduisent par $n > p-1$, $p > 0$ sur les dimensions des espaces de départ.

Par ailleurs, avant d'opérer le changement de variables $x = 2\rho^2 - 1$, le cas $p = 1$ nous fournit directement $L_{n,1} f(\rho) = (1-\rho^2) f''(\rho) - n\rho f'(\rho)$ qui est l'opérateur de Jacobi symétrique (ou opérateur ultrasphérique) de paramètre $n \in I\!N^*$. Puis, si l'on effectue alors le changement de variables $x = 2\rho^2 - 1$ sur cet opérateur $L_{n,1}$, on obtient une classe particulière des opérateurs de Jacobi dissymétriques qui sont ceux de paramètres $\beta = \frac{n}{2}, \gamma = -\frac{1}{2}$.

Remarque 4 Cet opérateur $L_{n,1}$, qui est la partie radiale du Laplacien sur la sphère, est un cas particulier d'un phénomène plus général : la partie radiale du Laplacien sur un espace symétrique compact de rang 1 est un opérateur de Jacobi. Ces espaces ont été classifiés dans [21] (voir aussi [9]), et outre les sphères, ils comprennent aussi les espaces projectifs réels, complexes et quaternioniques, ainsi que le plan elliptique de Cayley. $\diamond$

Remarque 5 En faisant le changement de variables $y = \arcsin x$ décrit plus haut, l'opérateur $\frac{1}{4}L^{(x)}_{n,p}$ s'écrit

$$\frac{d^2}{dy^2} + \frac{a}{\cos y}\frac{d}{dy} + b\tan y\frac{d}{dy},$$

avec $a = \frac{n+1-2p}{2}$, $b = \frac{1-n}{2}$

Dans [1], les auteurs font apparaître un opérateur similaire qui semble correspondre pour les cas où a et b sont des demi-entiers, à la même opération sur les parties radiales, où l'espace hyperbolique remplace la sphère. ◇

D'autre part, il est bien connu que le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension p est la limite quand n tend vers l'infini de l'image du semi-groupe du mouvement brownien sur $S^{n-1}_{\sqrt{n}}$ par $\Phi^{\sqrt{n}}_{n,p}$, avec $p < n$. On obtient le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck classique (i.e. unidimensionnel) pour $p = 1$. (On utilise ici l'outil communément appelé "lemme de Poincaré", qui serait plutôt dû à Mehler, voir [19], page 77).

De plus, si l'on considère les fonctions radiales sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\exists g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(|x|) = f(x),$$

et si l'on définit le semi-groupe (Q_t) sur $\mathbb{R}^*$ de la façon suivante :

$$Q_t g(|x|) = P_t f(x),$$

où (P_t) est le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck, alors (Q_t) est le semi-groupe de diffusion associé aux polynômes de Laguerre.

Les semi-groupes d'Ornstein-Uhlenbeck et de Laguerre peuvent aussi être retrouvés par leurs générateurs infinitésimaux à partir des opérateurs de Jacobi. En effet, en effectuant une homothétie de rapport $\sqrt{n}$ sur l'opérateur de Jacobi symétrique $L_{n,p}$, (ce qui équivaut à considérer l'image du Laplacien sur $S^{n-1}_{\sqrt{n}}$ par $\Phi^{\sqrt{n}}_{n,p}$), et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient le générateur infinitésimal du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

De la même façon, en dimension 1, en considérant l'opérateur de Jacobi dissymétrique

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + (\frac{n+1-2p}{2} - \frac{n+1}{2}x)\frac{d}{dx},$$

en utilisant le changement de variable

$$x \mapsto n\frac{x-1}{2},$$

et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient le générateur infinitésimal du semi-groupe de Laguerre.

Enfin, en ce qui concerne les valeurs propres des générateurs infinitésimaux sur la base des polynômes dans L^2, on remarque que la suite $\lambda_k = -k(k+n-1)$, énoncée au paragraphe 3, des valeurs propres de l'opérateur de Jacobi symétrique $L_{n,1}$ correspond exactement à la suite des valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur S^n ; alors que l'opérateur de Jacobi dissymétrique $L^{(x)}_{n,1}$ admet la suite

$$\lambda'_k = 4(-k(k + \frac{n+1}{2} - 1)) = -2k(2k+n-1) = \lambda_{2k}$$

de valeurs propres, donc ne reprend qu'une valeur propre sur deux du même Laplacien sur S^n.

Cette remarque, vraie pour toutes les valeurs des paramètres, s'explique aisément pour les valeurs entières en remarquant que l'opérateur de Jacobi dissymétrique $L^{(\rho)}_{n,p}$ peut être considéré comme la restriction de l'opérateur de Jacobi symétrique $L_{n,p}$ aux fonctions radiales sur D^p_1, donc en l'occurrence, pour $p = 1$, aux fonctions paires sur $[-1,1]$, donc la suite des vecteurs propres de $L^{(\rho)}_{n,1}$ est la suite des polynômes de Jacobi de degré pair, d'où le résultat sur les valeurs propres.

La remarque peut se généraliser en dimension supérieure : Soit $P_k(x)$ le k-ième polynôme de Jacobi sur $[-1,1]$; alors P_k est vecteur propre de l'opérateur $L_{n,1}$. On pose maintenant

$$\begin{array}{cccc} f_k : & D^p & \to & I\!R \\ & (x_1,\ldots,x_p) & \mapsto & P_k(x_1). \end{array}$$

Alors clairement f_k est vecteur propre de l'opérateur $L_{n,p}$. De plus, le Laplacien sur S^n étant invariant par les rotations de $I\!R^n$, il en est de même pour sa projection $L_{n,p}$ sur D^p. les rotations de $I\!R^p$ pour $p \le n$ étant des rotations de $I\!R^n$ particulières. Donc si $R \in SO_p$ groupe des rotations de $I\!R^p$, $f_k \circ R$ reste vecteur propre de $L_{n,p}$.

On munit maintenant SO_p de la mesure de Haar dR, et on pose

$$\begin{array}{cccc} h_k : & D^p & \to & I\!R \\ & x & \mapsto & \int_{SO_p} f_k(Rx)\, dR \ ; \end{array}$$

pour $x_0 \in D^p$, $h_k(x_0)$ est en fait la valeur moyenne de f_k sur $S^{p-1}_{\|x_0\|_p}$. h_k est donc une fonction radiale, i.e.

$$\exists h'_k \ : [0,1] \to I\!R, \quad h_k(x) = h'_k(\|x\|_p).$$

De plus, il est facile de vérifier que $h_k(x)$ reste vecteur propre de $L_{n,p}$, donc que $h'_k(\rho)$ et vecteur propre de $L^{(\rho)}_{n,p}$. On effectue enfin le changement de variables

$$\begin{array}{cccc} \phi : & [0,1] & \to & [-1,1] \\ & \rho & \mapsto & x = 2\rho^2 - 1, \end{array}$$

et on retrouve que $h'_k(x)$ est vecteur propre de $L^{(x)}_{n,p}$, donc est polynôme de Jacobi dissymétrique ; on peut constater en effet que les diverses modifications subies par $P_k(x)$ n'ont pas altéré sa forme polynômiale. Enfin, on retrouve que $L^{(x)}_{n,p}$ n'admet comme valeurs propres qu'une valeur propre sur deux de l'opérateur $L_{n,p}$ par le fait que dans un cas sur deux, $h_k(x) \equiv 0$.

Vérifions le sur un exemple simple : $p = 2$

$$SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[\right\},$$

d'où

$$h_k(x,y) = \int_0^{2\pi} P_k(x\cos\theta + y\sin\theta)\, \frac{d\theta}{2\pi},$$

on pose alors $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

$$\begin{aligned} h_k(x,y) = h'_k(r) &= \int_0^{2\pi} P_k(r\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi)\, \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} P_k(r\cos(\theta+\varphi))\, \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} P_k(r\cos\theta)\, \frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

Or k impair $\Rightarrow h'_k(r) = 0$ (car P_k est un polynôme impair).

En conclusion, tous les opérateurs de Jacobi dont les paramètres sont des demi-entiers, s'obtiennent par projection du mouvement brownien sur les sphères, (et même, en ce que concerne les opérateurs symétriques, de deux façons différentes). Les semi-groupes d'Ornstein-Uhlenbeck et de Laguerre s'obtiennent par des limites quand n et p tendent vers l'infini, des semi-groupes de Jacobi, moyennant un changement d'échelle et de temps.

References

[1] L. Alili, D. Dufresne, and M. Yor. Sur l'identité de Bougerol pour les fonctionnelles exponentielles du mouvement Brownien avec drift. A paraître, 1996.

[2] D. Bakry. La propriété de sous-harmonicité des diffusions dans les variétés. In *Séminaire de probabilité XXII, Lectures Notes in Mathematics*, volume 1321, pages 1–50. Springer-Verlag, 1988.

[3] D. Bakry. L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes. In *Lectures on Probability Theory*, volume 1581. Springer-Verlag, 1994.

[4] D. Bakry. Remarques sur les semi-groupes de Jacobi. In *Hommage à P.A. Meyer et J. Neveu*, volume 236, pages 23–40. Astérisque, 1996.

[5] D. Bakry and M. Emery. Hypercontractivité de semi-groupes de diffusion. *C.R.Acad. Paris*, 299, Série I(15):775–778, 1984.

[6] S. Bochner. Sturm-Liouville and heat equations whose eigenfunctions are ultraspherical polynomials or associated Bessel functions. *Proc. Conf. Differential Equations*, pages 23–48, 1955.

[7] W. Feller. The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations. *Ann. of Math.*, 55:468–519, 1952.

[8] W. Feller. Diffusion processes in one dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 77:1–31, 1954.

[9] R. Gangolli. Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Brownian motion of several parameters. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, III(2):9–226, 1967.

[10] G. Gasper. Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel. *Ann. of Math.*, 2(95):261–280, 1972.

[11] K. Ito and H. P. McKean. *Diffusion processes and their sample paths*, volume 125. Springer-Verlag, 1965.

[12] S. Karlin and J. McGregor. Classical diffusion processes and total positivity. *Journal of mathematical analysis and applications*, 1:163–183, 1960.

[13] H. Koornwinder. Jacobi functions and analysis on nomcompact semisimple Lie groups. In R.A. Askey et al. (eds.), editor, *Special functions: group theoretical aspects and applications*, pages 1–85. 1984.

[14] A. Korzeniowski and D. Stroock. An example in the theory of hypercontractive semigroups. *Proc. A.M.S.*, 94:87–90, 1985.

[15] PA. Meyer. Note sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. In *Séminaire de probabilités XVI*, volume 920, pages 95–133. Springer-Verlag, 1982.

[16] O.V. Sarmanov and Z.N. Bratoeva. Probabilistic properties of bilinear expansions of Hermite polynomials. *Teor. Verujatnost. i Primenen*, 12:470–481, 1967.

[17] T. Shiga and S. Watanabe. Bessel diffusions as a one-parameter family of diffusion processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 27:37–46, 1973.

[18] E.M. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton University Press, 1971.

[19] D. Stroock. *Probability Theory: an analytic view.* Cambridge University Press, 1993.

[20] G. Szegö. *Orthogonal Polynomials.* American Mathematical Society, 4th edition, 1975.

[21] H.C. Wang. Two-point homogeneous spaces. *Annals of Mathematics*, 55:177–191, 1952.

[22] E. Wong. The construction of a class of stationary Markov processes. *Amer. Math. Soc., Proc. of the XVIth Symp. of App. Math.*, pages 264–276, 1964.

[23] K. Yosida. *Functional Analysis.* Springer-Verlag, 1968.