

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MADALINA DEACONU

SOPHIE WANTZ

Comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 31 (1997), p. 168-175

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1997__31__168_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante

Mădălina DEACONU, Sophie WANTZ

INRIA-Institut Elie Cartan
Université Henri Poincaré , B.P 239
54506 Vandoeuvre-les-Nancy

Résumé - Soit $y \in \mathbb{R}$ et $(X_t^y; t \geq 0)$ la solution de l'EDS unidimensionnelle : $X_t^y = y + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t u(X_s^y) ds$, où la dérive $-u$ est "fortement rentrante" (cf. H_1 et H_2 ci-dessous). Nous étudions le comportement asymptotique de $E(\exp \alpha T_x^y)$, lorsque $y \rightarrow \infty$ avec $\alpha \geq 0, y \geq x \geq 0$ et $T_x^y = \inf\{t \geq 0; X_t^y = x\}$.

1. Introduction

Soit $(X_t^y; t \geq 0)$ la solution de l'EDS unidimensionnelle

$$X_t^y = y + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t u(X_s^y) ds \quad (E)$$

où $(B_t; t \geq 0)$ est un mouvement brownien linéaire issu de zéro. En fait, nous ne nous intéressons au processus $(X_t^y; t \geq 0)$ que lorsqu'il séjourne dans \mathbb{R}_+ , si bien que les hypothèses suivantes ne portent que sur les valeurs prises par u sur \mathbb{R}_+ :

(H_1) • $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est de classe C^2 , u et u' tendent vers l'infini à l'infini,

u'' et $\frac{u'^2}{u}$ sont des $o(u)$ à l'infini et $u'' \leq 2\frac{u'^2}{u}$ en dehors d'un compact .

(H_2) • $\int^{+\infty} \frac{1}{u} < +\infty$

Un exemple simple d'une telle fonction est $u(x) = x^\gamma$ avec $\gamma > 1$.

Quitte à modifier u sur \mathbb{R}_- pour obtenir le caractère localement lipschitzien et rentrant de $-u$, l'équation (E) possède une unique solution forte. Soit : $T_x^y = \inf\{t \geq 0; X_t^y = x\}$. Notre résultat est :

THÉORÈME 1.1 . — *Il existe un compact K de \mathbb{R}_+ et deux constantes $0 < C_1 < C_2 < \infty$ tels que pour tout $x \notin K, x \geq 0$:*

i) *Pour tout $\alpha > 0$, tel que $u(x) \geq C_2 \alpha^{\frac{1}{2}}$, on a : $\forall y \geq x, E(\exp \alpha T_x^y) < \infty$.*

De plus : $\sup_{y \geq x} E(\exp \alpha T_x^y) < \infty$ et $\lim_{y \rightarrow \infty} E(\exp \alpha T_x^y)$ existe .

ii) *Pour tout $\alpha > 0$, tel que $u(x) \leq C_1 \alpha^{\frac{1}{2}}$, on a : $\forall y \geq x, E(\exp \alpha T_x^y) = \infty$.*

iii) *Pour tout $\alpha > 0$ on a :*

$$1 \geq \limsup_{y \rightarrow \infty} E(\exp -\alpha T_x^y) = \liminf_{y \rightarrow \infty} E(\exp -\alpha T_x^y) = k(\alpha, x) > 0 .$$

C_2 (resp. C_1) peut être choisie arbitrairement proche et plus grande que $2\sqrt{2}$ (resp. arbitrairement proche et plus petite que $\sqrt{2}$) .

REMARQUE 1.2 . — Si X est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (c'est à dire $u(x) = kx$, $k > 0$), un tel résultat est faux. Bien que, pour un $\alpha > 0$ assez petit par rapport à k , on ait : $E(\exp \alpha T_x^y) < \infty$ ($y \geq x$), nous avons : $\sup_{y \geq x} E(\exp \alpha T_x^y) = +\infty$ pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \geq 0$ (cf [GNRS], p.402, formule 12). Ainsi, l'hypothèse (H_2) est-elle tout à fait essentielle à notre résultat .

Le but de ce travail est de démontrer le Théorème 1.1 . Heuristiquement, ce résultat s'explique par le caractère fortement rentrant de $-u$.

2. Démonstration du théorème 1.1

On cherche à estimer la vitesse de retour en un point x partant de y , $y \geq x$: T_x^y . Afin de calculer $E(\exp \alpha T_x^y)$, nous aurons besoin des fonctions propres du générateur infinitésimal de X :

$$L := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - u \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

On rappelle que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe C^2 ,

$$M_t^{y,f} := f(X_t^y) \exp \left(- \int_0^t \frac{Lf}{f}(X_s^y) ds \right); \quad t \geq 0, \quad (1)$$

est une martingale locale (cf [RY] p. 277) . Aussi est-il classique que l'étude de $E(\exp \alpha T_x^y)$, pour x fixé assez grand, passe par celle des fonctions propres de L , donc des solutions de :

$$f''(z) - u(z)f'(z) = \alpha f(z) \quad (\alpha \in \mathbb{R}, z \geq x) \quad (P_\alpha)$$

(La constante $\frac{1}{2}$ a disparu mais elle est prise en compte dans les constantes intervenant dans notre résultat.)

Nous allons chercher des solutions de (P_α) sous la forme :

$$f_\alpha(z) = \left(\exp \int_x^z \frac{\varphi_\alpha(y)}{u(y)} dy \right) \frac{\exp \int_x^z u(y) dy}{u(z)} \quad (2)$$

Dès que φ_α est bornée, l'hypothèse (H_2) assure l'existence d'une limite finie de $\int_x^z \frac{\varphi_\alpha}{u}(y) dy$ quand $z \rightarrow +\infty$.

Le lemme suivant résulte de calculs élémentaires . Nous en omettons la démonstration .

LEMME 2.1 . — f_α est solution de (P_α) si et seulement si φ_α est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$S_\alpha(\varphi_\alpha, x) = \varphi_\alpha'(x) \quad (D_\alpha)$$

$$\text{avec :} \quad S_\alpha(g, x) = 3g \frac{u'}{u}(x) + u''(x) - \frac{2u'^2}{u}(x) - g^2 \frac{1}{u}(x) + (\alpha - g)u(x).$$

Afin de déterminer l'allure de la fonction φ_α qui nous renseignera sur le fonction propre f_α , résolvons l'équation $S_\alpha(y, x) = 0$. En la multipliant par u , on trouve une équation en y du second degré : $y^2 + y(u^2 - 3u') + 2u'^2 - u''u - \alpha u^2 = 0$.

Pour que cette équation ait des racines réelles, on doit imposer :

$$\Delta = u^4 \left(1 - 6 \frac{u'}{u^2} + \frac{u'^2}{u^4} + 4 \frac{u''}{u^3} + 4 \frac{\alpha}{u^2} \right) \geq 0.$$

Par l'hypothèse (H_1) , $\frac{u'^2}{u} = o(u)$ et $u'' = o(u)$, donc Δ se comporte comme

$$\Delta \simeq u^4 \left(1 - \varepsilon + \frac{4\alpha}{u^2} \right).$$

On en déduit la condition suivante pour avoir des racines :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \alpha \geq 0 \text{ et } x \text{ assez grand} \\ \text{ou} \\ \bullet \quad \alpha < 0 \text{ et } x \text{ est tel que } u(x) \geq \overline{C_2} |\alpha|^{\frac{1}{2}}, \text{ avec } \overline{C_2} > 2 \end{array} \right. \quad (C)$$

Nous verrons que cette condition (C) , selon qu'elle est ou non vérifiée, détermine deux classes de fonctions propres.

Désignons par Γ_α^+ (resp. $\Gamma_\alpha^-, \Gamma_\alpha^0$) le sous-ensemble de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ défini par :

$$\Gamma_\alpha^+ = \{(x, y); x \geq 0, S_\alpha(y, x) > 0 \text{ (resp. } < 0, = 0)\}.$$

Désignons par Δ_x la droite verticale de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ passant par $(x, 0)$. On a alors les faits suivants :

- $\Delta_x \cap \Gamma_\alpha^+$ est soit vide, soit un compact non vide. Cette dichotomie nous amènera à distinguer deux sortes de fonctions propres (voir plus loin).

- $\Delta_x \cap \Gamma_\alpha^0$ est, pour x assez grand, constitué de deux points : $\widetilde{\Gamma}_x^0$ et $\widetilde{\widetilde{\Gamma}}_x^0$, avec $\widetilde{\Gamma}_x^0 > \widetilde{\widetilde{\Gamma}}_x^0$. $\widetilde{\Gamma}_x^0$ est la plus grande racine de l'équation $S_\alpha(y, x) = 0$. Elle est de la forme : $\widetilde{\Gamma}_x^0 = \alpha - \varepsilon_\alpha(x)$ avec $\varepsilon_\alpha(x) > 0$ et $\varepsilon_\alpha(x) \rightarrow_{x \rightarrow \infty} 0$.

- Pour x assez grand, $\Gamma_\alpha^+ \cap \{(z, y); z \geq x, y \in \mathbb{R}\} =: \Gamma_\alpha^{+,x}$ est absorbant pour l'équation (D_α) , i.e. : si φ est une solution de (D_α) , avec $\varphi(x) = s$ et $(x, s) \in \Gamma_\alpha^{+,x}$, alors φ est définie sur $[x, \infty[$ et $(z, \varphi(z)) \in \Gamma_\alpha^{+,x}$ pour tout $z \geq x$.

Nous considérons à présent les deux cas induits par la condition (C) .

a) Plaçons nous ici dans le cas où la condition (C) est vérifiée. Cela se traduit par : $\Delta_x \cap \Gamma_\alpha^+ \neq \emptyset$. On a alors le résultat suivant, que nous montrerons dans le paragraphe suivant :

THÉORÈME 2.2 . — *Dans le cas où la condition (C) est vérifiée, définissons une fonction f par (pour $z \geq x$) :*

$$f(z) := \frac{\exp \int_x^z u(y) dy}{u(z)} \left[\exp \left(\int_x^\infty \frac{\varphi_1}{u} + \int_x^z \frac{\varphi_2}{u} \right) - \exp \left(\int_x^\infty \frac{\varphi_2}{u} + \int_x^z \frac{\varphi_1}{u} \right) \right], \quad (3)$$

avec φ_1 et φ_2 deux solutions de D_α sur l'intervalle $[x, +\infty[$, telles que, pour $s > \alpha$ et $s' > \alpha$ fixés, $\varphi_1(x) = s$, $\varphi_2(x) = s'$ et $\varphi_1 \geq \varphi_2$, cf. figure 1. Alors f est une fonction propre de L et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) > 0$.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la formule de la vitesse de rappel. On note T_x^y le temps de retour en x partant de y , $x \leq y$.

THÉORÈME 2.3 . — Lorsque (C) est vérifiée, on a pour tout $y > x$:

$$E_y(e^{-\alpha T_x^y}) = \frac{f(y)}{f(x)}. \quad (4)$$

Démonstration du Théorème 2.3 :

(i) Soient $\alpha < 0$ et $u(x) \geq \overline{C}_2 |\alpha|^{\frac{1}{2}}$ et soit z tel que $x < y < z$. On a, en notant $\mathbb{1}$ la fonction indicatrice :

$$f(y) = E_y(f(X_t)e^{|\alpha|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y}) + f(x)E_y(e^{|\alpha|T_x^y} \mathbb{1}_{T_x^y < t \wedge T_z^y}) + f(z)E_y(e^{|\alpha|T_z^y} \mathbb{1}_{T_z^y < t \wedge T_x^y}) \quad (5)$$

en appliquant le fait que $M_t^{y,f}$ donnée par (1) est une martingale locale .

Quand $t \rightarrow \infty$, d'après le théorème de convergence monotone, on a pour les deux derniers termes de (5) :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} f(x)E_y(e^{|\alpha|T_x^y} \mathbb{1}_{T_x^y < t \wedge T_z^y}) &= f(x)E_y(e^{|\alpha|T_x^y} \mathbb{1}_{T_x^y < T_z^y}) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f(z)E_y(e^{|\alpha|T_z^y} \mathbb{1}_{T_z^y < t \wedge T_x^y}) &= f(z)E_y(e^{|\alpha|T_z^y} \mathbb{1}_{T_z^y < T_x^y}). \end{aligned}$$

Pour le premier terme du membre de droite de (5), on sait que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(X_t)e^{|\alpha|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y} = 0 \quad p.s.$$

Montrons que cette famille est équiintégrable en t . Pour cela, il suffit de voir qu'elle est bornée dans L^p , avec $p > 1$. En écrivant la relation (5) pour une fonction propre g de valeur propre $\alpha' < 0$, avec $\alpha' < \alpha$, on en déduit que :

$$g(y) \geq E_y(g(X_t)e^{|\alpha'|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y}) \geq C E_y(e^{|\alpha'|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y})$$

puisque g est minorée. D'où :

$$\begin{aligned} E_y(f^{\frac{\alpha'}{\alpha}}(X_t)e^{|\alpha'|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y}) &\leq C' E_y(e^{|\alpha'|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y}) \\ &\leq C'' g(y). \end{aligned}$$

Donc la famille $(f(X_t)e^{|\alpha|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y})_t$ est bornée dans $L^{\frac{\alpha'}{\alpha}}$ et est donc équiintégrable. Ainsi :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_y(f(X_t)e^{|\alpha|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y}) = 0.$$

Ce qui nous donne, pour $t \rightarrow \infty$ dans (5) :

$$f(y) = f(x)E_y(e^{|\alpha|T_x^y} \mathbb{1}_{T_x^y < T_z^y}) + f(z)E_y(e^{|\alpha|T_z^y} \mathbb{1}_{T_z^y < T_x^y}).$$

On fait à présent tendre z vers $+\infty$, et par la même méthode (l'équiintégrabilité), on montre que :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} E_y(e^{|\alpha|T_z^y} \mathbb{1}_{T_z^y < T_x^y}) = 0.$$

On conclut par (4) dans le cas (i) :

$$E_y(e^{|\alpha|T_x^y}) = \frac{f(y)}{f(x)}.$$

(ii) Soient $\alpha > 0$ et x assez grand . Ce cas est beaucoup plus simple car $f(X_{t \wedge T_x^y} e^{-\alpha(t \wedge T_x^y)})$ est une martingale bornée . Il suffit donc d'appliquer le théorème d'arrêt et de faire tendre t vers $+\infty$. Ceci achève la démonstration du théorème 2.3.

On a alors : $\lim_{y \rightarrow +\infty} E_y(e^{-\alpha T_x^y}) = \frac{C(\alpha)}{f(x)}$. Les points (i) et (iii) du théorème 1.1 en découlent aisément .

COROLLAIRE 2.4 . — *Pour tout $x \notin K$, il existe un $\alpha > 0$ tel que, pour tout $r > 0$ et uniformément en $y \geq x$, on a :*

$$P(T_x^y > r) \leq C(x) e^{-\alpha r}.$$

COROLLAIRE 2.5 . — *Pour $\alpha > 0$ et x en dehors d'un compact K et pour tout $\alpha < 0$ tel que $u(x) \geq \overline{C}_2 |\alpha|^{\frac{1}{2}}$, les lois des v.a. T_x^y convergent étroitement, quand $y \rightarrow +\infty$, vers une loi de probabilité ν telle que $\int_0^\infty e^{-\alpha z} \nu(dz) < \infty$.*

Idee de la démonstration du Corollaire 2.5 : On se place dans le cas $\alpha > 0$ et x assez grand . Soit Q_x^y la loi de la v.a. T_x^y . Alors, on montre que la famille $(Q_x^y)_y$ est tendue et monotone, et on en déduit qu'il existe une loi de probabilité ν telle que $\int_0^\infty e^{-\alpha z} \nu(dz) < +\infty$ et Q_x^y converge vers ν quand $y \rightarrow +\infty$. Ceci établit notre corollaire .

b) On se place à présent en dehors du domaine d'application de la condition (C), c'est-à-dire lorsque $\alpha < 0$ et $|\alpha| > 1$. Alors :

THÉORÈME 2.6 . — *Lorsque la condition (C) n'est pas vérifiée, une fonction propre de L peut être écrite sous la forme :*

$$f(z) := \left(\exp \int_{x_1}^z \frac{\varphi}{u} \right) \frac{\exp \int_{x_1}^z u(y) dy}{u(z)}, \quad (6)$$

avec x_1 tel que $u(x_1) \leq \overline{C}_1 |\alpha|^{\frac{1}{2}}$, et φ telle que :

- pour $z \geq x_1$, $\varphi(z) \leq \rho |\alpha| - u^2(z)$ ($\rho < 1$)
- pour $z \leq x_1$, $\varphi(z) \geq \frac{|\alpha|}{z - x_0}$, voir figure 2 .

Par les mêmes arguments d'équité intégrabilité que dans la démonstration du théorème 2.3, on en déduit que : $E(\exp \alpha T_{x_0}^y) = +\infty$, avec $x_0 < C_1 |\alpha|^{\frac{1}{2}}$, ce qui est le point (ii) du théorème 1.1 avec $C_1 = \sqrt{2} \overline{C}_1$. Notre principal résultat est donc établi .

REMARQUE 2.7 . — *L'hypothèse $\int_0^\infty \frac{1}{u} < +\infty$, sous laquelle notre théorème 1.1 est vrai, est précisément celle qui assure l'ultracontractivité du semigroupe associé à X_t^y par rapport à la mesure de probabilité $\nu(dx) = C e^{-v(x)} dx$ avec v une primitive de u (cf. [KKR]) .*

Nous allons achever la démonstration du théorème 1.1 en prouvant les théorèmes 2.2 et 2.6 .

3. Démonstration du théorème 2.2 (première classe de fonctions propres : cas où (C) est satisfaite)

Supposons que $\alpha < 0$ et $u(x) \geq \overline{C_2}|\alpha|^{\frac{1}{2}}$ (le cas $\alpha > 0$ et x assez grand se traite de manière analogue).

On remarque que la fonction constante α est une sursolution de (D_α) pour x assez grand (i.e. $-S_\alpha(\alpha, x) \geq 0$).

Soit $s > \alpha$. Nous désignons par φ la solution de (D_α) définie sur l'intervalle $[x, \infty[$ et telle que $\varphi(x) = s$. Il est alors clair que :

$$\sup_{z \geq x} |\varphi(z)| \leq k \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \alpha.$$

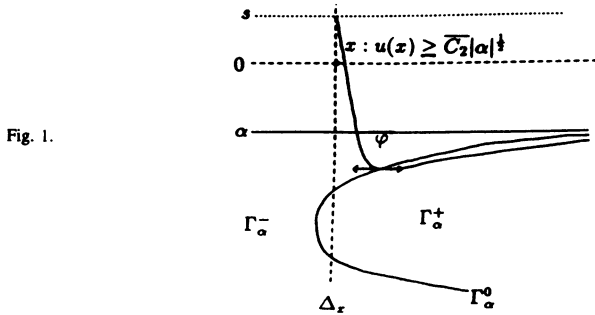


Fig. 1.

Montrons alors que la fonction f définie dans l'énoncé du théorème 2.2 par (3) est une solution positive de P_α , et que sa limite à l'infini existe et est strictement positive . On note :

$$v(z) := \int_x^z u(y)dy \quad \text{et} \quad h(z) := \int_x^z \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{u}(y)dy .$$

On voit facilement que : $(\varphi_1 - \varphi_2)(z) = Cu^3(z)\exp(-v(z) - h(z))$.

f étant une combinaison linéaire de deux fonctions propres de la forme (2), de valeur propre α , est elle-même une fonction propre de valeur propre α . Ecrivons f sous la forme :

$$f(z) = \left(\exp \int_x^\infty \frac{\varphi_1}{u} + \int_x^z \frac{\varphi_2}{u} \right) \left(1 - \exp \int_z^\infty \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{u} \right) \frac{e^{v(z)}}{u(z)} \tag{7}$$

Puisque $(\varphi_2 - \varphi_1) \leq 0$ on a $f(z) \geq 0$ pour tout $z \geq x$.

Notons :

$$\gamma(z) := \left(\exp \int_x^\infty \frac{\varphi_1}{u} + \int_x^z \frac{\varphi_2}{u} \right), \quad g(z) := 1 - \exp \int_z^\infty \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{u} .$$

Il est évident que $\gamma(z)$ a une limite quand z tend vers l'infini, égale à $\exp \int_x^\infty \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{u}$.

D'autre part :

$$g(z) = \left(\int_z^\infty \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{u} + o\left(\int_z^\infty \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{u} \right) \right)$$

car $(\varphi_1 - \varphi_2)(z) \rightarrow_{z \rightarrow \infty} 0$ et donc on peut encadrer l'intégrale par deux fonctions tendant vers zéro, ce qui nous autorise à faire de développement limité de l'exponentielle au voisinage de l'origine . On obtient :

$$\int_z^\infty \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{u}(y)dy = \int_z^\infty \tilde{C}(y)u^2(y)e^{-v(y)} dy \quad \text{avec } \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{C}(y) = 1.$$

D'autre part :
$$\int_z^\infty u^2(y)e^{-v(y)} dy = u(z)e^{-v(z)} + e^{-v(z)}o\left(\frac{1}{z}\right).$$

D'où :
$$g(z) = u(z)e^{-v(z)} + e^{-v(z)}o\left(\frac{1}{z}\right);$$

et finalement, d'après (7) :

$$f(z) = \gamma(z) \left(1 + \frac{1}{u(z)}o\left(\frac{1}{z}\right) \right).$$

On en déduit que :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \text{Cexp} \int_x^\infty \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{u}(y)dy.$$

Ceci achève la démonstration .

De plus, on peut trouver une majoration des moments d'ordre p des temps d'atteinte; et pour $p = 1$, on a une estimation optimale .

THÉOREME 3.1 . — *i) Pour tout $p \geq 1$, il existe une constante $C_p < \infty$ telle que :*

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} u(x) E[(T_x^{x+h})^p] \leq h C_p,$$

ii) Pour $p = 1$, cette estimation est optimale : il existe deux constantes $C < \infty$ et $C' < \infty$ telles que :

$$h C' \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} u(x) E(T_x^{x+h}) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} u(x) E(T_x^{x+h}) \leq h C.$$

4. Démonstration du théorème 2.6 (seconde classe de fonctions propres : cas où (C) n'est pas satisfaite)

Rappelons que dans ce cas, la condition (C) n'est pas vérifiée, ce qui équivaut à : $\alpha < 0$ et $|\alpha| > 1$. Faisons trois remarques :

i) La fonction ψ_1 , définie par : $\psi_1(z) := \rho|\alpha| - u^2(z)$, avec $\rho < 1$, est une sursolution de (D_α) pour z en dehors d'un compact, i.e. :

$$\psi_1'(z) - S_\alpha(\psi_1, z) \geq 0.$$

ii) Soient $\overline{C}_1 < 1$, x_1 tel que $u(x_1) \leq \overline{C}_1|\alpha|^{\frac{1}{2}}$ et $x_0 = x_1 - k$, $\left(k > \frac{1}{\rho - \overline{C}_1^2}\right)$.

Soit ψ_2 définie sur $]x_0, x_1]$ par :

$$\psi_2(z) := \frac{|\alpha|}{z - x_0}.$$

Alors, ψ_2 est une sursolution de (D_α) . En effet, on vérifie aisément que $\psi_2'(z) - S_\alpha(\psi_2, z) \geq 0$.

iii) On peut choisir \overline{C}_1 (aussi proche de 1 que l'on veut) telle que : $\psi_2(x_1) \leq \psi_1(x_1)$, c'est-à-dire :

$$\frac{|\alpha|}{x_1 - x_0} \leq \rho|\alpha| - u^2(x_1), \quad (\rho - \overline{C}_1^2) \geq \frac{1}{x_1 - x_0} = \frac{1}{k}.$$

Ceci justifie notre choix de la constante k ($k > \frac{1}{\rho - \overline{C}_1^2}$).

Soit maintenant s tel que $\psi_2(x_1) \leq s \leq \psi_1(x_1)$. Et soit φ la solution de (D_α) vérifiant $\varphi(x_1) = s$. Définissons φ sur son intervalle maximal de définition.

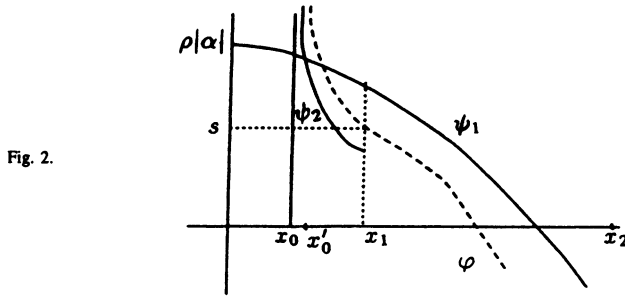


Fig. 2.

On a donc :

- pour $z \geq x_1$ $\varphi(z) \leq \rho|\alpha| - u^2(z)$ (8)

- pour $z \leq x_1$ $\varphi(z) \geq \frac{|\alpha|}{z - x_0}$ (9)

Soit alors

$$f(z) := \left(\exp \int_{x_1}^z \frac{\varphi}{u} \right) \frac{\exp \int_{x_1}^z u(y) dy}{u(z)}.$$

Ainsi, il est clair, d'après (8) et (9), que f est solution de (P_α) et :

- f est définie sur $[x'_0, x_2]$ (avec x'_0 proche de x_0 , $x_0 < x'_0 < x_1$ et x_2 éventuellement égal à $+\infty$), de classe C^2 sur $]x'_0, x_2[$ et telle que :
- $f(x'_0) = f(x_2) = 0$ ($x_0 \leq x'_0 \leq x_1 < x_2 \leq \infty$).

Références

[GNRS] V. Giorno, A.G. Nobile, L.M. Ricciardi, L. Sacerdote *Some remarks on the Rayleigh process*, J. Appl. Prob. 23 , 398-408 (1986)
 [KKR] O. Kavian, G. Kerkycharian, B. Roynette *Quelques remarques sur l'ultracontractivité*, Journal of Functional Analysis, 111 (1993)
 [RY] D. Revuz, M. Yor *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer Verlag