JEAN-FRANÇOIS LE GALL

Marches aléatoires auto-évitantes et mesures de polymères

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 31 (1997), p. 103-112

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1997__31__103_0>

Marches aléatoires auto-évitantes et mesures de polymère

Jean-François Le Gall

1. Introduction.

L'objet de cette note est de montrer que la loi d'une marche aléatoire plane faiblement auto-évitante, considérée sur un long intervalle de temps et convenablement changée d'échelle, se rapproche de la mesure de polymère en dimension deux. Les mesures de polymère ont été introduites formellement par Edwards [4], et une définition mathématique rigoureuse en dimension deux a été rendue possible par le travail de Varadhan [11]. La mesure de polymère s'interprète comme la loi d'un mouvement brownien faiblement auto-évitant, et notre résultat est donc un analogue auto-évitant du classique théorème d'invariance de Donsker. Le théorème principal du présent travail a déjà été obtenu par Stoll [10], sous des hypothèses cependant plus restrictives et à l'aide de techniques d'analyse non-standard. Tout récemment, Cadre [3] a développé une autre approche de ce résultat, sous des hypothèses voisines de celles de Stoll et en utilisant une méthode originale de plongement de marches aléatoires planes dans le mouvement brownien. Pour la marche aléatoire simple, une discussion plus générale, s'appliquant aussi aux modèles "auto-attractifs", est donnée dans le travail de Brydges et Slade [2]. Signalons enfin que le problème beaucoup plus difficile de l'approximation de la mesure de polymère en dimension trois par des marches aléatoires faiblement auto-évitantes vient d'être résolu par Albeverio, Bolthausen et Zhou [1]. Le but de cette note est donc surtout pédagogique, et son intérêt réside dans la simplicité des techniques utilisées, qui ont déjà été appliquées à d'autres problèmes, tels que l'étude asymptotique du nombre de sites visités par une marche aléatoire plane [5] ou l'existence de moments exponentiels pour le temps local d'intersection brownien renormalisé [7]. Nous espérons aussi que les estimations du présent travail pourront rendre quelque service dans l'étude des nombreuses questions ouvertes concernant les mesures de polymère.

Ce travail est la rédaction d'un exposé donné dans le cadre du Cours Peccot au Collège de France en 1989. Je remercie Marc Yor de m'avoir donné la possibilité de le publier dans le Séminaire de Probabilités.

2. Hypothèses et énoncé du théorème principal.

Nous considérons une marche aléatoire $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$, issue de 0 sous la probabilité P. On a donc $X_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

où les variables $Y_i, i = 1, 2, \ldots$ sont indépendantes et équidistribuées à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$.

Nous supposerons toujours que les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :

(H1) La marche aléatoire est centrée et a des moments d'ordre deux :

$$E[|X_1|^2] < \infty, \qquad E[X_1] = 0.$$

(H2) La marche aléatoire X est adaptée, au sens où la loi de X_1 n'est pas portée par un sous-groupe strict de $\mathbb{Z}^2$.

(H3) La marche aléatoire est isotrope, au sens où la matrice de covariance de X_1 s'écrit

$$\operatorname{cov}(X_1) = \sigma^2 \,\mathrm{Id}$$

où $\sigma > 0$ et Id est la matrice identité en dimension deux.

L'hypothèse importante est (H1). L'hypothèse (H3) a pour seul but de simplifier les énoncés qui suivent, en évitant l'introduction de mouvements browniens "non-isotropes".

Pour tout entier $N \geq 1$, pour $0 \leq t \leq 1$, on pose

$$X_t^{(N)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}} X_{[Nt]}$$

où $[Nt]$ désigne la partie entière de Nt. Soit $Q^{(N)}$ la loi de $(X_t^{(N)}, 0 \leq t \leq 1)$, qui est une mesure de probabilité sur l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}([0,1], \mathbb{R}^2)$. D'après le théorème de Donsker,

$$Q^{(N)} \xrightarrow[N\to\infty]{\text{(e)}} W$$

où la notation $\xrightarrow{\text{(e)}}$ indique la convergence étroite, et W est la loi sur $\mathbb{D}([0,1], \mathbb{R}^2)$ de $(B_t, 0 \leq t \leq 1)$, si B désigne un mouvement brownien plan issu de 0.

Introduisons maintenant les lois des processus auto-évitants. Pour tous $\lambda \geq 0$, $N \geq 1$ on pose

$$L_\lambda^{(N)} = E\big[\exp\big(-\lambda \sum_{0\leq i<j\leq N} I(X_i = X_j)\big)\big]$$

et on définit alors $Q_\lambda^{(N)}$ comme la loi de $(X_t^{(N)}, 0 \leq t \leq 1)$ sous la probabilité

$$(L_\lambda^{(N)})^{-1} \exp\big(-\lambda \sum_{0\leq i<j\leq N} I(X_i = X_j)\big) \cdot P \quad .$$

L'idée est d'attribuer un poids plus faible, d'autant plus faible que λ est grand, aux trajectoires qui présentent beaucoup d'auto-intersections.

Il reste à introduire la loi du mouvement brownien auto-évitant, c'est-à-dire la mesure de polymère en dimension deux. On utilise pour cela les temps locaux d'auto-intersection du mouvement brownien plan B (voir [8] ou [6], Chapitre VIII). Soit $\Delta = \{(s,t), 0 \leq s < t \leq 1\}$. Il existe p.s. une unique famille $(\alpha_x, x \in \mathbb{R}^2)$ de mesures de Radon sur Δ telle que :

(i) L'application $x \to \alpha_x$ est continue pour la topologie de la convergence vague.

(ii) Pour toute partie borélienne H de Δ et pour toute fonction h mesurable positive sur $\mathbb{R}^2$,

$$\int_H h(B_s - B_t)\, ds\, dt = \int_{\mathbb{R}^2} h(x)\, \alpha_x(H)\, dx.$$

En prenant pour h une approximation de la mesure de Dirac en 0, on obtient l'expression formelle

$$\alpha_0(H) = \int_H \delta_0(B_s - B_t)\, ds\, dt.$$

On vérifie aisément que $\alpha_x(\Delta) < \infty$ si $x \neq 0$, p.s. et que $\alpha_0(\Delta) = \infty$ p.s. On peut néanmoins "renormaliser" $\alpha_0(\Delta)$ de la manière suivante (voir par exemple [6], Chapitre VIII). Pour tous entiers $p \geq 1$, $k \in \{1, \ldots, 2^{p-1}\}$, on pose

$$A_k^p = [(2k-2)2^{-p}, (2k-1)2^{-p}[\times](2k-1)2^{-p}, 2k2^{-p}] \subset \Delta.$$

Des arguments simples de changement d'échelle montrent que la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{2^{p-1}} \big(\alpha_0(A_k^p) - E[\alpha_0(A_k^p)]\big) \Big)$$

converge dans L^2 et p.s. La somme de cette série, notée γ, est le temps local d'intersection renormalisé de B sur l'intervalle $[0,1]$. On montre que, pour tout $\lambda > 0$,

$$L_\lambda = E[\exp(-\lambda\, \gamma)] < \infty$$

(voir [7], p.178, pour un argument simple, ce résultat étant dû à Varadhan [11] dans un cadre un peu différent).

La mesure de polymère W_λ est par définition la loi de $(B_t, 0 \leq t \leq 1)$ sous la probabilité

$$(L_\lambda)^{-1} \exp(-\lambda\, \gamma) \cdot P.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de ce travail.

Théorème 1. *Pour tout* $\lambda > 0$,

$$Q_{\lambda/N}^{(N)} \xrightarrow[N\to\infty]{\text{(e)}} W_{\sigma^{-2}\lambda}\ .$$

De manière équivalente, pour toute fonction continue bornée F sur $\mathbb{D}([0,1], \mathbb{R}^2)$,

$$\lim_{N\to\infty} Q_{\lambda/N}^{(N)}[F] = W_{\sigma^{-2}\lambda}[F].$$

Or, par définition,

$$Q_{\lambda/N}^{(N)}[F] = (L_{\lambda/N}^{(N)})^{-1} E[\exp(-\lambda J_N) F(X_s^{(N)}, 0 \leq s \leq 1)]$$

où

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{0 \leq i < j \leq N} I(X_i = X_j).$$

Pour toute variable aléatoire intégrable U, notons $\{U\} = U - E[U]$. Remarquons qu'on peut aussi écrire

$$Q_{\lambda/N}^{(N)}[F] = (\tilde{L}_{\lambda/N}^{(N)})^{-1}\, E[\exp(-\lambda\{J_N\})\, F(X_s^{(N)}, 0 \leq s \leq 1)],$$

à condition de poser

$$\tilde{L}_{\lambda/N}^{(N)} = E[\exp(-\lambda\{J_N\})].$$

On voit alors que le Théorème 1 est une conséquence de la définition de W_λ et des deux propositions suivantes.

Proposition 2. *On a*

$$\big(\{J_N\}, (X_s^{(N)}, 0 \le s \le 1)\big) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{(loi)}} \big(\sigma^{-2}\gamma, (B_s, 0 \le s \le 1)\big).$$

Proposition 3. *Pour tout $\lambda > 0$,*

$$\sup_{N\ge 1} E[\exp(-\lambda\,\{J_N\})] < \infty.$$

En effet, supposons démontrées les Propositions 2 et 3. Alors la suite

$$U_N = \exp(-\lambda\{J_N\})\, F(X_s^{(N)}, 0 \le s \le 1)$$

converge en loi vers $U = \exp(-\sigma^{-2}\lambda\,\gamma)\, F(B_s, 0 \le s \le 1)$. De plus, la Proposition 3 montre que la suite (U_N) est bornée dans L^2. On conclut alors que $E[U_N]$ converge vers $E[U]$, et en prenant $F = 1$ on voit de même que $\tilde{L}_{\lambda/N}^{(N)}$ converge vers $L_{\sigma^{-2}\lambda}$.

La Proposition 2 est très proche d'un résultat de Rosen [9], qui suppose cependant la marche aléatoire X apériodique. La convergence conjointe de $\{J_N\}$ et $X^{(N)}$ n'est pas énoncée par Rosen mais découle de la méthode qu'il utilise. Nous donnons dans la partie 3 une démonstration de la Proposition 2 un peu différente de celle de Rosen, reposant sur des estimations que nous utiliserons aussi dans la preuve de la Proposition 3. Cette dernière proposition est démontrée dans la partie 4.

3. Etude asymptotique des nombres d'intersection.

Nous commençons par un résultat relatif au nombre de couples d'intersection de deux marches aléatoires indépendantes. Nous considérons une seconde marche aléatoire plane X' issue de 0 indépendante de X. Nous supposons que X' satisfait les mêmes hypothèses (H1),(H2),(H3) que X avec la même constante σ (cependant X et X' n'ont pas nécessairement même loi). Pour tout $N \ge 1$, on pose

$$I_N = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} I(X_i = X'_j)$$

et on définit $X'^{(N)}$ de la même manière que $X^{(N)}$.

Lemme 4. *On a*

$$\big(I_N, (X_s^{(N)}, X_s'^{(N)}; 0 \le s \le 1)\big) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{(loi)}} \big(\sigma^{-2}\beta([0,1]^2), (B_s, B'_s; 0 \le s \le 1)\big),$$

où B' est un mouvement brownien plan indépendant de B issu de 0, et

$$\beta([0,1]^2) = \int_0^1\int_0^1 \delta_{(0)}(B_s - B'_t)\, ds\, dt$$

est le temps local d'intersection de B et B' sur $[0,1]^2$ (voir par exemple [6]*, Chapitre VIII). De plus, il existe une constante $C_1 < \infty$ telle que*

$$\sup_{N\ge 1} E[(I_N)^2] \le C_1. \tag{1}$$

Démonstration. Nous reprenons les arguments de Rosen [9], en supposant d'abord que X et X' sont apériodiques (i.e. si ϕ est la fonction caractéristique de X_1, ou de X'_1, les conditions $|\phi(\xi)| = 1$ et $\xi \in]-\pi, \pi]^2$ entraînent $\xi = 0$). Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$I_N^\varepsilon = \sigma^{-2} \int_0^1 \int_0^1 p_\varepsilon(X_s^{(N)}, X_t'^{(N)})\, ds\, dt,$$

où $p_\varepsilon(x,y) = (2\pi\varepsilon)^{-1} \exp(-|y-x|^2/(2\varepsilon))$. D'après le Lemme 1 et la formule (2.6) de Rosen [9], il existe deux constantes $C > 0$, $\delta > 0$ telles que, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$,

$$\limsup_{N\to\infty} E[(I_N^\varepsilon - I_N)^2]^{1/2} \le C\,\varepsilon^\delta \tag{2}$$

(Rosen traite le cas $\sigma = 1$, mais des modifications triviales de son argument donnent le résultat pour σ quelconque). Pour $\varepsilon > 0$ fixé, I_N^ε est une fonction continue bornée du couple $(X^{(N)}, X'^{(N)})$. Le théorème de Donsker entraîne alors

$$\big(I_N^\varepsilon, (X_s^{(N)}, X_s'^{(N)}; 0 \le s \le 1)\big) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{(loi)}} \big(\sigma^{-2}\int_0^1\int_0^1 p_\varepsilon(B_s, B'_t) ds dt, (B_s, B'_s; 0 \le s \le 1)\big).$$

D'autre part,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^1 \int_0^1 p_\varepsilon(B_s, B'_t)\, ds\, dt = \beta([0,1]^2), \quad \text{p.s.}$$

grâce à la formule de densité de temps d'occupation pour le temps local d'intersection (voir par exemple [6], Chapitre VIII). La première assertion du lemme découle alors de (2), et il en va de même pour la seconde, puisque, pour ε fixé, les variables I_N^ε, $N \ge 1$ sont bornées uniformément.

Il reste à s'affranchir de l'hypothèse d'apériodicité. Pour cela on introduit une suite (ε_n) de variables aléatoires indépendantes équidistribuées, indépendantes du couple (X, X') et telles que $P[\varepsilon_n = 1] = 1 - P[\varepsilon_n = 0] = \rho \in]0,1[$. On définit $S_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ puis $\tilde{X}_n = X_{S_n}$, de sorte que $\tilde{X}$ est une marche aléatoire apériodique vérifiant les mêmes hypothèses que X (la constante σ^2 est remplacée par $\rho\sigma^2$). On construit de même $\tilde{X}'$ à partir de X' et d'une autre suite (ε'_n) de même loi que (ε_n) et indépendante du triplet $(\varepsilon_n, X_n, X'_n; n \ge 0)$. On définit alors $\tilde{I}_N$ comme I_N en remplaçant le couple (X, X') par $(\tilde{X}, \tilde{X}')$, et de même $(\tilde{X}^{(N)}, \tilde{X}'^{(N)})$. On voit facilement que, pour tout $\eta > 0$, $I_N \le \tilde{I}_{[(1+\eta)N]}$ sur l'ensemble $\{S_{(1+\eta)N} \ge N, S'_{(1+\eta)N} \ge N\}$, indépendant du couple (X, X') et dont la probabilité tend vers 1, uniformément en N, lorsque ρ croît vers 1. En appliquant à $\tilde{I}_N$ la majoration (1) on obtient aussitôt que cette majoration est aussi vraie dans le cas général.

De même, pour obtenir la première partie de la proposition, on remarque d'abord que

$$(X_t^{(N)}, X_t'^{(N)}, \tilde{X}_t^{(N)}, \tilde{X}_t'^{(N)}; 0 \le t \le 1) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{(loi)}} (B_t, B'_t, \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_{\rho t}, \frac{1}{\sqrt{\rho}} B'_{\rho t}; 0 \le t \le 1).$$

En utilisant le cas apériodique et la majoration ci-dessus de I_N en fonction de $\tilde{I}_{[(1+\eta)N]}$, et en faisant tendre ρ vers 1, on en déduit que toute valeur d'adhérence de la suite $(X^{(N)}, X'^{(N)}, I_N)$ doit être de la forme (B, B', I_∞) avec $I_\infty \le \sigma^{-2}\beta([0,1]^2)$. D'autre part, on vérifie immédiatement que pour tout N, $E[I_N] \ge (1-\rho)^4 E[\tilde{I}_N]$, et donc en faisant à nouveau tendre ρ vers 1, on voit qu'on a nécessairement $E[I_\infty] = E[\sigma^{-2}\beta([0,1]^2)]$ ce qui force l'égalité $I_\infty = \sigma^{-2}\beta([0,1]^2)$ et complète la preuve. $\square$

Lemme 5. *Il existe une constante C_2 telle que, pour tout $N \geq 1$,*

$$E[\{J_N\}^2] \leq C_2.$$

Démonstration. On a pour tout $N \geq 2$,

$$\begin{aligned} J_N &= \frac{1}{N} \sum_{0 \leq i < j \leq N/2} I(X_i = X_j) + \frac{1}{N} \sum_{N/2 \leq i < j \leq N} I(X_i = X_j) \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{0 \leq i < N/2 < j \leq N} I(X_i = X_j) \\ &= \frac{[N/2]}{N} J_{[N/2]} + \frac{[N/2]}{N} \tilde{J}_{[N/2]} + L_N, \end{aligned}$$

où, d'une part $\tilde{J}_{[N/2]}$ est indépendante de $J_{[N/2]}$ et a même loi que $J_{[N/2]}$, et d'autre part,

$$L_N \leq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{[N/2]} \sum_{j=0}^{[N/2]+1} I(X_{[N/2]-i} = X_{[N/2]+j}).$$

On peut appliquer la majoration (1) aux marches aléatoires $X'_i = X_{[N/2]-i}$, $X''_j = X_{[N/2]+j}$, ce qui conduit à

$$E[L_N^2] \leq C_1.$$

Ensuite, en soustrayant les espérances et en appliquant l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} E[\{J_N\}^2]^{1/2} &\leq E\Big[\Big(\frac{[N/2]}{N} \{J_{[N/2]}\} + \frac{[N/2]}{N} \{\tilde{J}_{[N/2]}\}\Big)^2\Big]^{1/2} + (C_1)^{1/2} \\ &= 2^{1/2} \frac{[N/2]}{N} E[\{J_{[N/2]}\}^2]^{1/2} + (C_1)^{1/2} \end{aligned}$$

Si $a_k = \sup\{E[\{J_N\}^2]^{1/2}; 2^k \leq N \leq 2^{k+1}\}$, l'inégalité précédente montre que, pour tout $\rho \in]2^{-1/2}, 1[$, on a dès que k est assez grand

$$a_{k+1} \leq \rho\, a_k + (C_1)^{1/2}.$$

On conclut que la suite (a_k) est bornée. □

Démonstration de la Proposition 2. Reprenons les notations de la preuve du Lemme 5, en supposant N pair :

$$J_N = \frac{1}{2} J_{N/2} + \frac{1}{2} \tilde{J}_{N/2} + L_N$$

avec

$$L_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N/2} \sum_{j=1}^{N/2} I(X'_i = X''_j).$$

Notons comme précédemment $X_t'^{(N)} = (\sigma N)^{-1/2} X'_{[Nt]}$, $X_t''^{(N)} = (\sigma N)^{-1/2} X''_{[Nt]}$ pour $0 \leq t \leq 1/2$. Le Lemme 5 donne

$$((X_t'^{(N)}, X_t''^{(N)}; 0 \leq t \leq 1/2), L_N) \xrightarrow[N \to \infty, N \text{ pair}]{\text{(loi)}} ((B'_t, B''_t; 0 \leq t \leq 1/2), \beta([0, 1/2]^2))$$

où B', B'' sont deux mouvements browniens plans issus de 0 indépendants, et

$$\beta([0,1/2]^2) = \int_0^{1/2}\int_0^{1/2} \delta_0(B'_s - B''_t)\, ds\, dt.$$

D'autre part, on a

$$(X'^{(N)}, X''^{(N)}, X^{(N)}) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{(loi)}} (B', B'', B)$$

avec $B'_t = B_{1/2-t} - B_{1/2}$, $B''_t = B_{1/2+t} - B_{1/2}$ pour $0 \le t \le 1/2$. Avec cette définition de B' et B'' on a l'égalité (formellement évidente)

$$\int_0^{1/2}\int_0^{1/2} \delta_0(B'_s - B''_t)\, ds\, dt = \int_{[0,1/2[\times]1/2,1]} \delta_0(B_s - B_t)\, ds\, dt\ .$$

En combinant ce qui précède, on obtient donc que

$$(X^{(N)}, L_N) \xrightarrow[N\to\infty, N \text{ pair}]{\text{(loi)}} (B, \alpha_0([0,1/2[\times]1/2,1])).$$

Soit ensuite $m \ge 1$. On obtient par récurrence la formule

$$J_N = 2^{-m} \sum_{p=1}^{2^m} J^{(p)}_{2^{-m}N} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{p=1}^{2^{k-1}} L_N^{k,p}, \tag{3}$$

avec

$$J^{(p)}_{2^{-m}N} = \frac{2^m}{N} \sum_{(p-1)2^{-m}N \le i < j \le p2^{-m}N} I(X_i = X_j)$$

$$L_N^{k,p} = \frac{1}{N} \sum_{(2p-2)2^{-k}N \le i < (2p-1)2^{-k}N < j \le 2p2^{-k}N} I(X_i = X_j).$$

Restreignons-nous aux valeurs de N multiples de 2^m. Cette restriction est sans importance à cause de la propriété

$$\lim_{N\to\infty} E[(J_N - J_{2^m[2^{-m}N]})^2] = 0$$

qui est très facile à vérifier. Alors, les variables $J^{(p)}_{2^{-m}N}$, $p = 1, \ldots, 2^m$ sont indépendantes et de même loi que $J_{2^{-m}N}$. Le Lemme 4 entraîne

$$E\big[\big(2^{-m}\sum_{p=1}^{2^m}\{J^{(p)}_{2^{-m}N}\}\big)^2\big] = 2^{-2m}\, 2^m\, E[\{J_{2^{-m}N}\}^2] \le C_2\, 2^{-m}. \tag{4}$$

D'autre part, le même raisonnement que ci-dessus pour l'étude de $L_N = L_N^{1,1}$ montre que, pour tous k, p,

$$(X^{(N)}, \{L_N^{k,p}\}) \xrightarrow{\text{(loi)}} (B, \{\alpha_0(A_p^k)\})$$

où l'ensemble A_p^k a été défini dans la partie 2. Un argument simple de tension montre que cette convergence a lieu conjointement pour tous k, p. En particulier,

$$(X^{(N)}, \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{2^{k-1}}\{L_N^{k,p}\}) \xrightarrow{\text{(loi)}} (B, \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{2^{k-1}}\{\alpha_0(A_p^k)\}).$$

Il est maintenant facile d'en déduire la Proposition 2 : on utilise la formule (3), en remarquant que pour m grand,

$$\{2^{-m}\sum_{p=1}^{2^m} J^{(p)}_{2^{-m}N}\}$$

est petit en norme L^2, uniformément en N, d'après (4), cependant que

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{2^{k-1}}\{\alpha_0(A^k_p)\}$$

est proche de γ, par la définition même de γ.

4. Preuve de la Proposition 3.

Nous reprenons les notations de la preuve de la Proposition 2, sans supposer N multiple de 2^m. On pose pour $m \geq 1$,

$$J^m_N = J_N - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{2^m} \sum_{(k-1)2^{-m}N\leq i<j\leq k2^{-m}N} I(X_i = X_j).$$

Comme on a aussi

$$J^m_N = \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{2^{k-1}} L^{k,p}_N,$$

la majoration (1) entraîne que pour tout m fixé,

$$C^m_\lambda := \sup_{N\geq 1} E[\exp(-\lambda\{J^m_N\})] \leq \sup_{N\geq 1}\exp(\lambda E[J^m_N]) < \infty.$$

Puisque $J_N = J^m_N$ dès que $N < 2^m$, il suffit pour établir la Proposition 3 de montrer que $\sup_{m\geq 1} C^m_\lambda < \infty$. Pour cela, on va majorer C^{m+1}_λ en fonction de C^m_λ. Partons de l'égalité

$$J^{m+1}_N = J^m_N + \sum_{p=1}^{2^m} L^{m+1,p}_N.$$

Soient λ', λ'' tels que $\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda}{\lambda''} = 1$. Alors,

$$\begin{aligned} E[\exp(-\lambda\{J^{m+1}_N\})] &\leq E[\exp(-\lambda'\{J^m_N\})]^{\lambda/\lambda'} E[\exp(-\lambda''\sum_{p=1}^{2^m}\{L^{m+1,p}_N\})]^{\lambda/\lambda''} \\ &= E[\exp(-\lambda'\{J^m_N\})]^{\lambda/\lambda'}\prod_{p=1}^{2^m} E[\exp(-\lambda''\{L^{m+1,p}_N\}]^{\lambda/\lambda''}. \end{aligned}$$

L'inégalité $e^{-u} - 1 + u \leq u^2$ pour $u \geq 0$ montre cependant que

$$\big|E[\exp(-\lambda'' L^{m+1,p}_N)] - (1 - \lambda'' E[L^{m+1,p}_N])\big| \leq (\lambda'')^2 E[(L^{m+1,p}_N)^2] \leq C_1(\lambda'')^2 2^{-2m},$$

d'après le Lemme 4. De façon plus précise, les arguments de la partie 3 montrent que $N\,L^{m+1,p}_N$ est majoré par le nombre de couples d'intersection de deux marches aléatoires indépendantes sur l'intervalle $\{0, 1, \ldots, [2^{-(m+1)}N] + 1\}$, et le résultat énoncé découle de la majoration (1) si $2^{-m}N \geq 1$. Si $2^{-m}N < 1$, on voit aisément que $L_N^{m+1,p} = 0$ et la majoration est triviale.

On a ensuite, toujours d'après la majoration (1),

$$\begin{aligned} |\exp(\lambda'' E[L_N^{m+1,p}]) - (1 + \lambda'' E[L_N^{m+1,p}])| &\leq (\lambda'')^2 E[L_N^{m+1,p}]^2 \exp(\lambda'' E[L_N^{m+1,p}]) \\ &\leq C_1(\lambda'')^2\, 2^{-2m} \exp((C_1)^{1/2}\lambda'' 2^{-m}). \end{aligned}$$

Finalement en combinant les deux majorations obtenues on arrive facilement à

$$\left|E[\exp(-\lambda''\{L_N^{m+1,p}\})] - 1\right| \leq 3\, C_1(\lambda'')^2 2^{-2m} \exp((C_1)^{1/2}\lambda'' 2^{-m}).$$

En reportant cette majoration dans les calculs précédents, on trouve

$$\begin{aligned} C_\lambda^{m+1} &\leq (C_{\lambda'}^m)^{\lambda/\lambda'} \left(1 + 3C_1(\lambda'')^2 2^{-2m} \exp((C_1)^{1/2}\lambda'' 2^{-m})\right)^{2^m\lambda/\lambda''} \\ &\leq (C_{\lambda'}^m)^{\lambda/\lambda'} \exp\left(3C_1\lambda\lambda''\, 2^{-m} \exp((C_1)^{1/2}\lambda'' 2^{-m})\right). \end{aligned}$$

Il est facile de déduire le résultat recherché de cette inégalité. Fixons $\rho > 0$ et pour tout $m \geq 2$ posons

$$u_m = \prod_{k=m}^{\infty} \frac{1}{1 - k^{-2}}, \quad \lambda_m = \rho u_m$$

de sorte que $\lambda_{m+1}/\lambda_m = 1 - m^{-2}$. On applique alors la majoration précédente avec $\lambda = \lambda_{m+1}$, $\lambda' = \lambda_m$, $\lambda'' = m^2\lambda_{m+1}$:

$$C_{\lambda_{m+1}}^{m+1} \leq C_{\lambda_m}^m \exp\left(3C_1\lambda_{m+1}^2 m^2\, 2^{-m} \exp((C_1)^{1/2}\lambda_{m+1} m^2 2^{-m})\right)$$

(noter que $C_\lambda^m \geq 1$). Comme la suite (λ_m) est bornée l'inégalité précédente entraîne

$$\sup_{m \geq 1} C_{\lambda_m}^m < \infty.$$

Pour conclure, on remarque que d'après l'inégalité de Jensen,

$$C_\rho^m \leq (C_{\lambda_m}^m)^{\rho/\lambda_m} \leq C_{\lambda_m}^m,$$

et donc $\sup_{m\geq 1} C_\rho^m < \infty$ ce qui termine la preuve puisque ρ était arbitraire.

Bibliographie.

[1] S. Albeverio, E. Bolthausen, X.Y. Zhou : On the discrete Edwards model in three dimensions. Preprint (1996)

[2] D.C. Brydges, G. Slade : The diffusive model of self-avoiding walks. *Probab. Th. Rel. Fields* **103**, 285-315 (1995)

[3] B. Cadre : Une preuve standard du principe d'invariance de Stoll. Dans ce volume.

[4] S.F. Edwards : The statistical mechanics of polymers with excluded volume. *Proc. Phys. Sci.* **85**, 613-624 (1965)

[5] J.F. Le Gall : Propriétés d'intersection des marches aléatoires I. Convergence vers le temps local d'intersection. *Comm. Math. Phys.* **104**, 471-507 (1986)

[6] J.F. Le Gall : Some properties of planar Brownian motion. *Lecture Notes Math.* **1527**, pp. 111-234. Springer (1992)

[7] J.F. Le Gall : Exponential moments for the renormalized self-intersection local time of planar Brownian motion. *Séminaire de Probabilités XXVIII. Lecture Notes Math.* **1583**, pp. 172-180. Springer (1994)

[8] J. Rosen : Self-intersections of random fields. *Ann. Probab.* **12**, 108-119 (1984)

[9] J. Rosen : Random walks and intersection local time. *Ann. Probab.* **18**, 959-977 (1990)

[10] A. Stoll : Invariance principles for Brownian intersection local time and polymer measures. *Math. Scand.* **64**, 133-160 (1989)

[11] S.R.S. Varadhan : Appendix to "Euclidean quantum field theory" by K. Symanzik. In : *Local Quantum Theory* (R. Jost ed.). Academic Press (1969)

Laboratoire de Probabilités, Université Pierre et Marie Curie
4, Place Jussieu, F-75252 PARIS Cedex 05