

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE KIPNIS

ELLEN SAADA

## **Un lien entre réseaux de neurones et systèmes de particules : un modèle de rétinotopie**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 30 (1996), p. 55-67

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1996\\_\\_30\\_\\_55\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1996__30__55_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**UN LIEN ENTRE RÉSEAUX DE NEURONES  
ET SYSTÈMES DE PARTICULES:  
UN MODELE DE RÉTINOTOPIE**

**C. KIPNIS<sup>†</sup> , E. SAADA<sup>1</sup>**

**Résumé**

Nous étudions un modèle stochastique de rétinotopie introduit par M. Cottrell et J.C. Fort. Nous faisons une nouvelle démonstration qui généralise leurs résultats sur la convergence de ce processus, grâce à des techniques de systèmes de particules. Celles-ci fournissent également une méthode de simulation de la loi limite.

**1. Introduction**

L'algorithme de Kohonen (écrit en 1982, voir [10],[11]) modèle un processus d'auto-organisation des liens neuronaux, la rétinotopie. Il s'agit de l'établissement d'une bijection bicontinue entre des cellules de la rétine (représentée par  $\{0, \dots, n+1\}^2$ ) et du cortex (représenté par  $[0, 1]^2$ ). Chaque cellule rétinienne est reliée à plusieurs cellules corticales, les liens sont renforcés proportionnellement au produit de l'intensité des stimuli reçus par la rétine, et de l'excitation des cellules corticales (principe de Hebb). Les cellules corticales images de cellules rétiniennes voisines deviennent elles-mêmes voisines dans  $[0, 1]^2$  (auto-organisation).

Toutefois, une étude rigoureuse de ce modèle historique est délicate en dimension supérieure à 1 (voir [1],[4],[9]). Nous nous intéressons donc ici à un algorithme modifié proposé en 1986 par M. Cottrell et J.C. Fort ([3]), qui est à bords fixés, et qui localise l'interaction (le prix en est malheureusement une perte du réalisme biologique). Dans [3], ce modèle est complètement analysé en dimension 1, et certains résultats étendus en dimension 2.

Nous souhaitons illustrer par cet article l'intérêt de l'utilisation des techniques de *systèmes de particules* (ici la *dualité*) pour l'analyse de réseaux à interaction locale: dans la section 2, nous décrivons le modèle de Cottrell et Fort, puis nous l'interprétons comme un système de particules, le *processus de lissage*. Celui-ci est *dual* d'un *processus de marches aléatoires couplées*. Cette dualité fournit une nouvelle démonstration de la convergence du processus initial, via le calcul des moments de la variable limite, et permet une simulation plus rapide de cette dernière (section 3).

---

<sup>1</sup> C.N.R.S., U.R.A. 1378, L.A.M.S. de l'Université de Rouen, U.F.R. de Sciences, mathématiques, 76821 Mont-Saint-Aignan cédex.

## 2. Le modèle et son interprétation comme système de particules.

Le processus de Markov  $(\omega_t)$  étudié dans [3] a pour espace d'états  $([0, 1]^d)^S$ , avec  $S = \{0, \dots, n+1\}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ ; il est élément de  $D(\mathbb{R}_+, ([0, 1]^d)^S)$ , l'espace des fonctions càdlàg à valeurs dans  $([0, 1]^d)^S$ , muni de la filtration canonique  $(\mathcal{F}_s, s \geq 0)$ . L'ensemble  $S$  est muni de la distance  $d(x, y) = \sum_{j=1}^d |x_j - y_j|$ , où  $x = (x_1, \dots, x_d)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_d)$ , et nous notons  $\partial S$  son bord. Les points voisins de  $x \in S$  situés sur  $\partial S$  (resp. sur  $S \setminus \partial S$ ) forment l'ensemble  $\mathcal{V}_2(x)$  (resp.  $\mathcal{V}_1(x)$ ):

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(x) &= \{y \in S : d(y, x) = 1\} \\ \mathcal{V}_1(x) &= \mathcal{V}(x) \cap (S \setminus \partial S) \\ \mathcal{V}_2(x) &= \mathcal{V}(x) \cap \partial S.\end{aligned}$$

Pour l'évolution, chaque point  $x \in S \setminus \partial S$  est muni d'une horloge exponentielle de paramètre  $q(x) > 0$ , toutes les horloges étant indépendantes. Etant donné un paramètre réel  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1/2d$ , lorsque l'horloge sonne en  $x \notin \partial S$  à l'instant  $t$ ,  $\omega_t$  devient  $\omega_t^x$  tel que

$$\begin{aligned}\omega_t^x(x) &= (1 - 2d\varepsilon)\omega_t(x) + \varepsilon \sum_{y \in \mathcal{V}(x)} \omega_t(y) \\ \omega_t^x(y) &= (1 - 2d\varepsilon)\omega_t(y) + \varepsilon \omega_t(x) + \varepsilon \sum_{\substack{z \in \mathcal{V}(x) \\ z \neq y}} \omega_t(z) \quad \text{pour } y \in \mathcal{V}_1(x) \\ \omega_t^x(u) &= \omega_t(u) \quad \text{sinon.}\end{aligned} \tag{1}$$

Les valeurs au bord restent fixes: si  $x \in \partial S$ ,  $\omega_t(x) = \omega_0(x)$  pour tout  $t \geq 0$ .

Il s'agit donc d'un algorithme à pas constant  $\varepsilon$ , où  $q$  représente la loi des stimuli sur  $S$ . Lorsque cette loi est uniforme (i.e.  $q(x) = 1$  pour tout  $x \in S \setminus \partial S$ ), la convergence de l'algorithme (p.s. si le pas est décroissant, en loi s'il est constant) avec calcul des moyennes limites si  $d \leq 2$  et l'auto-organisation si  $d = 1$  sont prouvés dans [3]. Dans [15], ces résultats sont étendus si  $q$  est quelconque. Enfin, la convergence p.s. à pas décroissant est démontrée dans [5] pour tout  $d$ . Nous proposons ici une nouvelle démonstration du

**Théorème 1.** *Pour toute configuration initiale  $\omega_0 \in ([0, 1]^d)^S$ ,  $(\omega_t)$  converge en loi quand  $t$  tend vers l'infini, vers une v.a.  $\omega_\infty$  indépendante de  $\{\omega_0(x), x \notin \partial S\}$  et de  $\varepsilon$ .*

Les systèmes de particules sont des processus de Markov à interaction locale, pour lesquels sont mis en œuvre des outils spécifiques (cf. [12],[7]). L'un d'eux est la dualité:

**Définition ([12]).** *Soient  $(\eta_t)$  et  $(\zeta_t)$  deux processus de Markov d'espaces d'états respectifs  $X$  et  $Y$ , et soit  $H(\eta, \zeta)$  une fonction mesurable bornée sur  $X \times Y$ . Les processus  $(\eta_t)$  et  $(\zeta_t)$  sont duaux l'un de l'autre par rapport à  $H$  si,  $E^\eta$  (resp.  $E^\zeta$ ) désignant la loi du processus  $\eta_t$  (resp.  $\zeta_t$ ) d'état initial  $\eta$  (resp.  $\zeta$ )*

$$E^\eta H(\eta_t, \zeta) = E^\zeta H(\eta, \zeta_t) \quad \text{pour tous } \eta \in X, \zeta \in Y.$$

Ainsi, l'analyse de  $(\eta_t)$  se ramène à celle du processus auxiliaire  $(\zeta_t)$ .

Quel est le lien avec la rétinitopie? Il se trouve que l'évolution décrite ci-dessus correspond à un système de particules introduit dans [14] (puis approfondi dans [13],[12]), le processus de lissage . Ce dernier, que nous notons bien sûr  $(\omega_t)$ , est défini par son générateur infinitésimal

$$G^\omega f(\omega_t) = \sum_{x \in S} q(x)[f(A_x \omega_t) - f(\omega_t)] \quad (2)$$

pour  $t \geq 0$ ,  $f$  mesurable par rapport au processus, avec la convention  $q(x) = 1$  si  $x \in \partial S$ , et où  $\{A_x(u, v), u, v \in S\}$  est une famille de matrices positives sur  $S$ , et

$$(A_x \omega)^i(u) = (\omega^x)^i(u) = \sum_{v \in S} A_x(u, v) \omega^i(v) \quad (u \in S, 1 \leq i \leq d). \quad (3)$$

Ici, par les équations (1), ces matrices sont:

Pour  $x \in \partial S$ ,  $A_x$  est la matrice identité, et pour  $x \in S \setminus \partial S$ ,

$$\begin{cases} A_x(x, x) = 1 - 2d\varepsilon \\ A_x(x, y) = \varepsilon & \text{si } d(x, y) = 1 \\ A_x(y, y) = 1 - 2d\varepsilon & \text{si } d(x, y) = 1, y \notin \partial S \\ A_x(y, x) = \varepsilon & \text{si } d(x, y) = 1, y \notin \partial S \\ A_x(y, z) = \varepsilon & \text{si } d(x, y) = d(z, x) = 1, y \notin \partial S, z \neq y \\ A_x(u, u) = 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4)$$

Nous introduisons le processus auxiliaire  $(\nu_t)$ , dit *processus de marches aléatoires couplées* (voir là aussi [12],[13],[14]). C'est un processus de Markov de sauts d'espace d'états  $(\mathbb{N}^d)^S$ , où pour  $x \in S$ ,  $1 \leq i \leq d$ ,  $\nu_t^i(x)$  est le nombre de particules au site  $x$  à l'instant  $t$  pour la coordonnée  $i$ . Il a pour générateur infinitésimal

$$G^\nu f(\nu_t) = \sum_{x \in S} q(x)[\hat{E}f(\nu_t^x) - f(\nu_t)] \quad (5)$$

pour  $t \geq 0$ ,  $f$  mesurable par rapport au processus et

$$(\nu^x)^i(y) = \sum_{v \in S} \sum_{k=1}^{\nu^i(v)} \varphi_k(x, y, v) \quad (1 \leq i \leq d, x, y \in S) \quad (6)$$

où les  $\varphi_k(x, y, v)$  ( $1 \leq k \leq \nu^i(v)$ ,  $v \in S$ ) sont indépendantes; chaque  $\varphi_k(x, y, v)$  vaut 1 avec probabilité  $A_x(v, y)$  et 0 sinon,  $\hat{E}$  est l'espérance par rapport aux  $\varphi_k$ .

Ce processus décrit donc l'évolution de particules qui se déplacent sur  $S$ : quand l'horloge sonne en  $x \in S \setminus \partial S$  (à l'instant  $t$ ), de façon simultanée et indépendante, les particules  $\nu_t^1(u), \dots, \nu_t^d(u)$  présentes au site  $u$  sautent au site  $v$  avec la probabilité  $A_x(u, v)$ . C'est-à-dire ici que chacune des particules  $\nu_t^i(x)$  ( $i \in \{1, \dots, d\}$ ) reste en  $x$  avec probabilité  $1 - 2d\varepsilon$  ou saute en  $y \in \mathcal{V}(x)$  avec probabilité  $\varepsilon$ ; pour  $y \in \mathcal{V}_1(x)$ , chacune des particules  $\nu_t^i(y)$  reste en  $y$  avec probabilité  $1 - 2d\varepsilon$ , saute en  $x$  avec probabilité  $\varepsilon$  ou saute en  $z \in \mathcal{V}(x)$ ,  $z \neq y$  avec probabilité  $\varepsilon$ . Le bord  $\partial S$  est absorbant: lorsqu'une particule l'atteint, elle ne bouge plus. De plus, le nombre total de particules dans le système reste constant.

Ce processus va nous permettre d'étudier  $(\omega_t)$ :

**Proposition 2.** Les processus  $(\omega_t)$  et  $(\nu_t)$  sont en dualité: ils sont liés par la relation

$$E^{\omega_0} \prod_{y \in S} \prod_{i=1}^d [1 + \alpha \omega_t^i(y)]^{\nu_0^i(y)} = E^{\nu_0} \prod_{y \in S} \prod_{i=1}^d [1 + \alpha \omega_0^i(y)]^{\nu_t^i(y)} \quad (7)$$

pour tous  $t \geq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\omega_0 \in ([0, 1]^d)^S$ ,  $\nu_0 \in (\mathbb{N}^d)^S$ , où  $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^d)$ ,  $\nu = (\nu^1, \dots, \nu^d)$ ,  $E^{\omega_0}$  (resp.  $E^{\nu_0}$ ) est la loi du processus  $(\omega_t)$  (resp.  $(\nu_t)$ ) de configuration initiale  $\omega_0$  (resp.  $\nu_0$ ).

**Démonstration.**

Soient  $\omega \in ([0, 1]^d)^S$ ,  $\nu \in (\mathbb{N}^d)^S$ , et  $H$  la fonction de dualité définie par

$$H(\omega, \nu) = \prod_{y \in S} \prod_{i=1}^d [1 + \alpha \omega^i(y)]^{\nu^i(y)} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Alors, pour tout  $x \in S \setminus \partial S$ ,

$$\begin{aligned} \hat{E}[H(\omega, \nu^x)] &= \hat{E}\left[\prod_{y \in S} \prod_{i=1}^d (1 + \alpha \omega^i(y))^{\nu^x(i)(y)}\right] \\ &= \hat{E}\left[\prod_{v \in S} \prod_{i=1}^d \prod_{k=1}^{\nu^i(v)} \exp\left(\sum_{y \in S} \varphi_k(x, y, v) \ln(1 + \alpha \omega^i(y))\right)\right] \quad \text{par (6)} \\ &= \prod_{v \in S} \prod_{i=1}^d \prod_{k=1}^{\nu^i(v)} \left(\sum_{y \in S} A_x(v, y) (1 + \alpha \omega^i(y))\right) \\ &= \prod_{v \in S} \prod_{i=1}^d (1 + \alpha (\omega^x)^i(v))^{\nu^i(v)} \quad \text{par (3), et car } \sum_{y \in S} A_x(v, y) = 1 \\ &= H(A_x \omega, \nu). \end{aligned}$$

Par conséquent d'après (2) et (5),

$$G^\nu H(\omega, \nu) = G^\omega H(\omega, \nu)$$

et (7) s'obtient en intégrant, par passage du générateur au semi-groupe.  $\square$

**Proposition 3.** Pour toute configuration initiale  $\nu_0$ ,  $(\nu_t)$  converge presque sûrement vers  $\nu_\infty$ , qui est indépendant de  $\varepsilon$ .

**Démonstration.**

Soit  $t \geq 0$  fixé. Pour  $x \in S$ ,  $y \in S \setminus \partial S$ ,  $v \in S$ ,  $v \neq x$ ,  $1 \leq i \leq d$ , nous notons  $J_y^{i,v,x}(t)$  le nombre de sauts de particules de  $v$  vers  $x$  sur la  $i$ -ème coordonnée lorsque l'horloge sonne en  $y$ , entre 0 et  $t$ . Pour simplifier l'écriture, nous supposons  $q(y) = 1$  (sinon il suffit de remplacer  $A_y(\cdot, \cdot)$  par  $q(y)A_y(\cdot, \cdot)$ ). Alors,

$$\nu_t^i(x) - \nu_0^i(x) = \sum_{\substack{y \in S \setminus \partial S \\ v \neq x}} [J_y^{i,v,x}(t) - J_y^{i,x,v}(t)] \quad (8)$$

d'où la martingale centrée (par rapport à  $\mathcal{F}_t$ )

$$\tilde{\nu}_t^i(x) = \nu_t^i(x) - \nu_0^i(x) - \sum_{\substack{y \in S \setminus \partial S \\ v \neq x}} \int_0^t [A_y(v, x) \nu_s^i(v) - A_y(x, v) \nu_s^i(x)] ds \quad (9)$$

de processus croissant

$$\langle \tilde{\nu}^i(x) \rangle_t = \sum_{\substack{y \in S \setminus \partial S \\ v \neq x}} \int_0^t [A_y(v, x) \nu_s^i(v) + A_y(x, v) \nu_s^i(x)] ds$$

(voir [2] pour les détails de calcul).

Si  $x \in \partial S$ , (8) et (9) se simplifient en

$$\nu_t^i(x) = \nu_0^i(x) + \sum_{\substack{y \in \mathcal{V}_1(x) \\ v \in S \setminus \partial S, v \neq x}} J_y^{i, v, x}(t) \quad (10)$$

$$0 = E^{\nu_0}(\tilde{\nu}_t^i(x)) = E^{\nu_0}[\nu_t^i(x)] - \nu_0^i(x) - \sum_{y \in \mathcal{V}_1(x)} \sum_{\substack{v=y \\ v \in \mathcal{V}_1(y), v \neq x}} \varepsilon E^{\nu_0} \left[ \int_0^t \nu_s^i(v) ds \right]. \quad (11)$$

Par (10),  $\nu_t^i(x)$  est croissant et majoré, donc converge p.s. Par (11) il en va de même pour  $E^{\nu_0}[\int_0^t \nu_s^i(z) ds]$  si  $z = y \in \mathcal{V}_1(x)$  ou  $z = v \in \mathcal{V}_1(y), v \neq x$ .

Ensuite, lorsque  $x \in S \setminus \partial S$ , comme  $\nu_t^i(x)$  est borné, les convergences de  $E^{\nu_0}[\int_0^t \nu_s^i(x) ds]$  et de  $E^{\nu_0}[\nu_t^i(x)]$  se démontrent par récurrence sur  $n = d(x, \partial S)$ , en passant aux espérances dans (9). La limite p.s. de  $\nu_t^i(x)$  est nulle car pour tout  $z \in S \setminus \partial S$ ,  $E^{\nu_0}[\int_0^{+\infty} \nu_s^i(z) ds]$  est fini.

Toutes les particules effectuent des marches aléatoires absorbées en  $\partial S$ , et la loi de  $\nu_\infty$  est indépendante de  $\varepsilon$ , puisque ce paramètre n'apparaît que dans la vitesse de déplacement des particules (cf. (8) et (9)). La loi de  $\nu_\infty$  découle de la résolution du problème des moments (voir par exemple [6]): en prenant les espérances et en passant à la limite dans les équations (9) pour tous les  $x \in S$ , on obtient un système d'équations linéaires en les  $E^{\nu_0}[\int_0^{+\infty} \nu_s^i(z) ds]$ ,  $z \in S \setminus \partial S$ . Il faut résoudre le sous-système (de Cramer, cf. [8] p. 403) réduit aux  $x \in S \setminus \partial S$ , puis substituer les solutions dans les équations où  $x \in \partial S$  pour obtenir les premiers moments de  $\nu_\infty$ . On procède de même pour les moments d'ordre supérieur, en appliquant la formule d'Itô pour écrire les équations adéquates. Par exemple pour les seconds moments, pour  $t \geq 0$ ,  $1 \leq i \leq d$ ,  $x \neq y \in S$ , on calcule les martingales centrées

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_t^i(x, x) &= (\nu_t^i(x))^2 - (\nu_0^i(x))^2 - 2 \sum_{\substack{z \in S \setminus \partial S \\ v \in S \setminus \partial S, v \neq x}} \int_0^t A_z(v, x) \nu_s^i(x) \nu_s^i(v) ds \\ &+ \mathbb{1}_{\{x \in S \setminus \partial S\}} 2 \sum_{\substack{z \in S \setminus \partial S \\ v \neq x}} \int_0^t A_z(x, v) (\nu_s^i(x))^2 ds - \sum_{\substack{z \in S \setminus \partial S \\ v \in S \setminus \partial S, v \neq x}} \int_0^t A_z(v, x) \nu_s^i(v) ds \end{aligned}$$

$$- \mathbb{1}_{\{x \in S \setminus \partial S\}} \sum_{\substack{z \in S \setminus \partial S \\ v \neq z}} \int_0^t A_z(x, v) \nu_s^i(x) ds \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_t^i(x, y) = & \nu_t^i(x) \nu_t^i(y) - \nu_0^i(x) \nu_0^i(y) - \sum_{\substack{z \in S \setminus \partial S \\ v \in S \setminus \partial S, v \neq y}} \int_0^t A_z(v, y) \nu_s^i(x) \nu_s^i(v) ds \\ & + \mathbb{1}_{\{y \in S \setminus \partial S\}} \sum_{\substack{z \in S \setminus \partial S \\ v \neq y}} \int_0^t A_z(y, v) \nu_s^i(x) \nu_s^i(y) ds \\ & - \sum_{\substack{z \in S \setminus \partial S \\ v \in S \setminus \partial S, v \neq x}} \int_0^t A_z(v, x) \nu_s^i(y) \nu_s^i(v) ds \\ & + \mathbb{1}_{\{x \in S \setminus \partial S\}} \sum_{\substack{z \in S \setminus \partial S \\ v \neq x}} \int_0^t A_z(x, v) \nu_s^i(x) \nu_s^i(y) ds \\ & + \mathbb{1}_{\{y \in S \setminus \partial S\}} \sum_{z \in S \setminus \partial S} \int_0^t A_z(y, x) \nu_s^i(y) ds \\ & + \mathbb{1}_{\{x \in S \setminus \partial S\}} \sum_{z \in S \setminus \partial S} \int_0^t A_z(x, y) \nu_s^i(x) ds. \end{aligned} \quad (13)$$

□

### Démonstration du théorème 1.

Il se déduit des propositions 2 et 3. La relation (7) permet de calculer les moments de  $\omega_\infty$ , d'où la loi limite. □

### 3. Applications: calcul de moments et simulations.

1. Nous explicitons tout d'abord comment les premiers et seconds moments de  $\omega_\infty$  découlent de la relation de dualité (7). Pour une configuration initiale  $\omega_0$  et un site  $x_0 \in S \setminus \partial S$ , si  $\nu_0$  ne comporte qu'une seule particule en  $x_0$  sur la composante  $i$ , un passage à la limite de (7) où  $\alpha = 1$  donne

$$E^{\omega_0}[\omega_\infty^i(x_0)] = E^{\nu_0} \prod_{y \in \partial S} [1 + \omega_0^i(y)]^{\nu_\infty^i(y)} - 1. \quad (14)$$

Nous prendrons  $d = 2$  pour les simulations, mais pour les calculs nous nous restreignons à  $d = 1$  (pour simplifier l'écriture). Ainsi, (14) devient (puisque  $\omega_0(0) = 0$ ,  $\omega_0(n+1) = 1$ )

$$\begin{aligned} E^{\omega_0}[\omega_\infty(x_0) + 1] &= P^{x_0} \{\nu_\infty(0) = 1\} [1 + \omega_0(0)] + P^{x_0} \{\nu_\infty(n+1) = 1\} [1 + \omega_0(n+1)] \\ &= 1 + E^{x_0}[\nu_\infty(n+1)] \end{aligned} \quad (15)$$

où  $E^{x_0}$ ,  $P^{x_0}$  signifient que  $\nu_0$  n'a qu'une particule, en  $x_0$ .

Pour les seconds moments, nous prenons  $\nu_0$  composée de deux particules, et nous passons à la limite dans (7) avec  $\alpha = 1$ :

\* si  $x \in S \setminus \partial S$ ,

$$E^{\omega_0}[(1 + \omega_\infty(x))^2] = P^{x,x}\{\nu_\infty(0) = 2\} \\ + 4P^{x,x}\{\nu_\infty(n+1) = 2\} + 2P^{x,x}\{\nu_\infty(0) = \nu_\infty(n+1) = 1\}$$

et puisque

$$P^{x,x}\{\nu_\infty(0) = 2\} + P^{x,x}\{\nu_\infty(n+1) = 2\} + P^{x,x}\{\nu_\infty(0) = \nu_\infty(n+1) = 1\} = 1,$$

$$E^{\omega_0}[(\omega_\infty(x))^2] = 3P^{x,x}\{\nu_\infty(n+1) = 2\} \\ + P^{x,x}\{\nu_\infty(0) = \nu_\infty(n+1) = 1\} - 2E^{\omega_0}[\omega_\infty(x)] \quad (16)$$

\* si  $x \neq y \in S \setminus \partial S$ ,

$$E^{\omega_0}[(1 + \omega_\infty(x))(1 + \omega_\infty(y))] = P^{x,y}\{\nu_\infty(0) = 2\} + 4P^{x,y}\{\nu_\infty(n+1) = 2\} \\ + 2P^{x,y}\{\nu_\infty(0) = \nu_\infty(n+1) = 1\}$$

$$E^{\omega_0}[\omega_\infty(x)\omega_\infty(y)] = 3P^{x,y}\{\nu_\infty(n+1) = 2\} + P^{x,y}\{\nu_\infty(0) = \nu_\infty(n+1) = 1\} \\ - E^{\omega_0}[\omega_\infty(x)] - E^{\omega_0}[\omega_\infty(y)] \quad (17)$$

comme

$$\begin{cases} P^{x,y}\{\nu_\infty(0) = \nu_\infty(n+1) = 1\} = E^{x,y}[\nu_\infty(0)\nu_\infty(n+1)] \\ P^{x,y}\{\nu_\infty(n+1) = 2\} = \frac{1}{4}\{E^{x,y}[(\nu_\infty(n+1))^2] - E^{x,y}[\nu_\infty(0)\nu_\infty(n+1)]\} \end{cases} \quad (18)$$

on conclut par le calcul des moments de  $\nu_\infty$  (expliqué dans la démonstration de la proposition 3).

Un exemple.

Nous traitons le cas (simple)  $d = 1$ ,  $n = 2$ .

Les termes  $A_1(1, 0)$ ,  $A_1(1, 2)$ ,  $A_1(2, 1)$ ,  $A_1(2, 0)$ ,  $A_2(2, 1)$ ,  $A_2(2, 3)$ ,  $A_2(1, 2)$ ,  $A_2(1, 3)$  valent  $\varepsilon$ , les autres sont nuls (cf. (4)). Nous notons  $\varphi(i) = E^{\nu_0}[\int_0^{+\infty} \nu_s(i) ds]$ ,  $\varphi(j, k) = E^{\nu_0}[\int_0^{+\infty} \nu_s(j)\nu_s(k) ds]$  où  $i \in \{1, 2\}$ ,  $0 \leq j, k \leq 3$ . Pour les premiers moments, le système linéaire déduit des équations (9) à résoudre est

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon\varphi(1) \\ \varepsilon\varphi(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu_0(1) \\ -\nu_0(2) \end{pmatrix}$$

et il reste à substituer les solutions dans

$$\begin{cases} E^{\nu_0}[\nu_\infty(0)] = \nu_0(0) + \varepsilon\varphi(1) + \varepsilon\varphi(2) \\ E^{\nu_0}[\nu_\infty(3)] = \nu_0(3) + \varepsilon\varphi(1) + \varepsilon\varphi(2) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} E^{\nu_0}[\nu_\infty(0)] = \nu_0(0) + \frac{1}{2}[\nu_0(1) + \nu_0(2)] \\ E^{\nu_0}[\nu_\infty(3)] = \nu_0(3) + \frac{1}{2}[\nu_0(1) + \nu_0(2)] \end{cases}$$



Pour les seconds moments, la résolution (cf (12),(13)) du système linéaire

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon\varphi(0,1) \\ \varepsilon\varphi(0,2) \\ \varepsilon\varphi(1,1) \\ \varepsilon\varphi(1,2) \\ \varepsilon\varphi(2,2) \\ \varepsilon\varphi(1,3) \\ \varepsilon\varphi(2,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu_0(0)\nu_0(1) + \varepsilon\varphi(1) \\ -\nu_0(0)\nu_0(2) + \varepsilon\varphi(2) \\ -(\nu_0(1))^2 - 2\varepsilon[2\varphi(1) + \varphi(2)] \\ -\nu_0(1)\nu_0(2) + 2\varepsilon[\varphi(1) + \varphi(2)] \\ -(\nu_0(2))^2 - 2\varepsilon[\varphi(1) + 2\varphi(2)] \\ -\nu_0(1)\nu_0(3) + \varepsilon\varphi(1) \\ -\nu_0(2)\nu_0(3) + \varepsilon\varphi(2) \end{pmatrix}$$

permet la substitution dans

$$\begin{aligned} E^{\nu_0}[(\nu_\infty(0))^2] &= (\nu_0(0))^2 + \varepsilon\varphi(1) + \varepsilon\varphi(2) + 2\varepsilon\varphi(0,1) + 2\varepsilon\varphi(0,2) \\ E^{\nu_0}[(\nu_\infty(3))^2] &= (\nu_0(3))^2 + \varepsilon\varphi(1) + \varepsilon\varphi(2) + 2\varepsilon\varphi(1,3) + 2\varepsilon\varphi(2,3) \\ E^{\nu_0}[\nu_\infty(0)\nu_\infty(3)] &= \nu_0(0)\nu_0(3) + \varepsilon\varphi(0,1) + \varepsilon\varphi(0,2) + \varepsilon\varphi(1,3) + \varepsilon\varphi(2,3) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} E^{\nu_0}[(\nu_\infty(0))^2] &= (\nu_0(0))^2 + \frac{1}{4}[(\nu_0(1))^2 + (\nu_0(2))^2 + \nu_0(1) + \nu_0(2)] \\ &\quad + \nu_0(0)\nu_0(1) + \nu_0(0)\nu_0(2) + \frac{1}{2}[\nu_0(1)\nu_0(2)] \\ E^{\nu_0}[(\nu_\infty(3))^2] &= (\nu_0(3))^2 + \frac{1}{4}[(\nu_0(1))^2 + (\nu_0(2))^2 + \nu_0(1) + \nu_0(2)] \\ &\quad + \nu_0(2)\nu_0(3) + \nu_0(1)\nu_0(3) + \frac{1}{2}[\nu_0(1)\nu_0(2)] \\ E^{\nu_0}[\nu_\infty(0)\nu_\infty(3)] &= \nu_0(0)\nu_0(3) + \frac{1}{4}[(\nu_0(1))^2 + (\nu_0(2))^2 - \nu_0(1) - \nu_0(2)] \\ &\quad + \frac{1}{2}[\nu_0(0)\nu_0(1) + \nu_0(0)\nu_0(2) + \nu_0(1)\nu_0(2)] \\ &\quad + \nu_0(1)\nu_0(3) + \nu_0(2)\nu_0(3) \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (15)-(18),

$$\begin{aligned} E^{\omega_0}[\omega_\infty(1)] &= E^{\omega_0}[\omega_\infty(2)] = 1/2 \\ E^{\omega_0}[(\omega_\infty(1))^2] &= E^{\omega_0}[(\omega_\infty(2))^2] = E^{\omega_0}[\omega_\infty(1)\omega_\infty(2)] = 1/4. \end{aligned}$$

## 2. Remarques.

\* Dans [3], le calcul des premiers moments de la loi limite (effectué pour  $d = 1$  et  $d = 2$ ) se ramène à la résolution du même système linéaire qu'au dessus.

\* Contrairement à ce que peut laisser croire l'exemple,  $\omega_\infty$  n'est pas déterministe (sauf dans le cas trivial  $n = 1$ ). En effet, si  $\nu_0$  comporte  $N$  particules dont

$X_t^1, \dots, X_t^N$  sont les positions respectives à l'instant  $t \geq 0$ , il est facile de voir que la v.a.  $\omega_\infty$  est déterministe si et seulement si  $X_\infty^1, \dots, X_\infty^N$  sont indépendantes. Ceci est faux à cause du fort couplage des marches: Par exemple, lorsque l'horloge sonne en  $x \in S \setminus \partial S$ , deux particules situées en  $v_1 \neq v_2 \in \mathcal{V}_1(x)$  peuvent bouger simultanément, ce qui empêche l'indépendance.

### 3. Simulations.

Par la relation (14), il suffit de laisser évoluer  $(\nu_t)$  lorsque  $\nu_0$  est réduite à une seule particule située en  $x_0 \in S$  sur la coordonnée  $1 \leq i \leq 2$  pour simuler les premiers moments de  $\omega_\infty$  (pour  $d = 2$ ). D'après (5),(6), cette particule effectue une marche aléatoire  $\mathcal{R}$  absorbée au bord: lorsqu'elle est en  $x \notin \partial S$ ,

\* Elle saute avec probabilité  $2\varepsilon$  en  $y \in \mathcal{V}_1(x)$  (ce qui correspond à la probabilité  $\varepsilon$  si l'horloge sonne en  $x$ , plus  $\varepsilon$  si l'horloge sonne en  $y$ ).

\* Elle saute avec probabilité  $\varepsilon$  en  $y \in \mathcal{V}_2(x)$  (si l'horloge sonne en  $x$ ).

\* Elle saute avec probabilité  $\varepsilon$  en  $z \in S$  voisin d'un seul élément  $l$  de  $\mathcal{V}_1(x)$  (si l'horloge sonne en  $l$ ).

\* Elle saute avec probabilité  $2\varepsilon$  en  $z \in S \setminus \partial S$  voisin d'exactly deux éléments  $l$  et  $m$  de  $\mathcal{V}_1(x)$  ( $\varepsilon$  si l'horloge sonne en  $l$ , plus  $\varepsilon$  si l'horloge sonne en  $m$ ).

\* Elle saute avec probabilité  $\varepsilon$  en  $z \in \partial S$  voisin d'exactly deux éléments de  $\mathcal{V}(x)$ ,  $l \in \mathcal{V}_1(x)$ ,  $m \in \mathcal{V}_2(x)$  (si l'horloge sonne en  $l$ ).

\* Elle reste en  $x$  avec la probabilité complémentaire.

Pour la simulation, comme la loi de  $\omega_\infty$  est indépendante de  $\varepsilon$ , on choisit  $\varepsilon$  pour que la probabilité qu'une particule située en  $y \notin \partial S$  y reste soit aussi petite que possible (soit  $\varepsilon = 1/20$ ).

Pour  $n = 10$ , à partir de la configuration initiale  $\omega_0$  (fig.1), nous avons effectué  $mi = 7000$  simulations de  $(\nu_t)$  pour calculer l'espérance dans (14) (fig.2). Cette méthode est donc plus rapide que la méthode directe utilisée dans [3]: 20000 itérations étaient nécessaires dans ce cas, comme le montrent les figures 3 et 4, reproduites avec l'autorisation de Biological Cybernetics (Springer-Verlag).

Enfin, dans les démonstrations de la section précédente, nous n'avons utilisé ni que l'espace d'états de  $(\omega_t)$  était  $([0, 1]^d)^S$ , avec  $S = \{0, \dots, n + 1\}^d$ , ni un type spécifique de voisinages dans  $S$ . Un espace  $W^{S'}$ , où  $W$  est un compact de  $\mathbb{R}^d$  et  $S'$  un réseau convexe de  $\mathbb{R}^d$  convient. Par conséquent, dans la simulation suivante nous prenons  $W = \mathcal{D}(0, 1)$  (le disque centré à l'origine de rayon 1 de  $\mathbb{R}^2$ ), et

$$S' = \left\{ k \exp\left(\frac{il\pi}{2(nt+1)}\right), k \in \{0, \dots, nr+1\}, l \in \{1, \dots, nt\} \right\}.$$

Dans ce cas,  $\mathcal{V}(0)$  a  $nt$  éléments, en utilisant la distance naturelle sur  $S'$  i.e.

$$d(x, y) = |k_x - k_y| + |l_x - l_y| \quad \text{où } x = k_x \exp\left(\frac{il_x\pi}{2(nt+1)}\right), y = k_y \exp\left(\frac{il_y\pi}{2(nt+1)}\right),$$

ce qui modifie les probabilités de transition de  $\mathcal{R}$  autour de l'origine (cf. (4)). Pour  $nr = 6$ ,  $nt = 9$ , à partir de la configuration initiale  $\omega_0$  (fig.5), nous avons effectué  $mi = 9000$  simulations de  $(\nu_t)$  pour obtenir les premiers moments de  $\omega_\infty$  (fig.6).

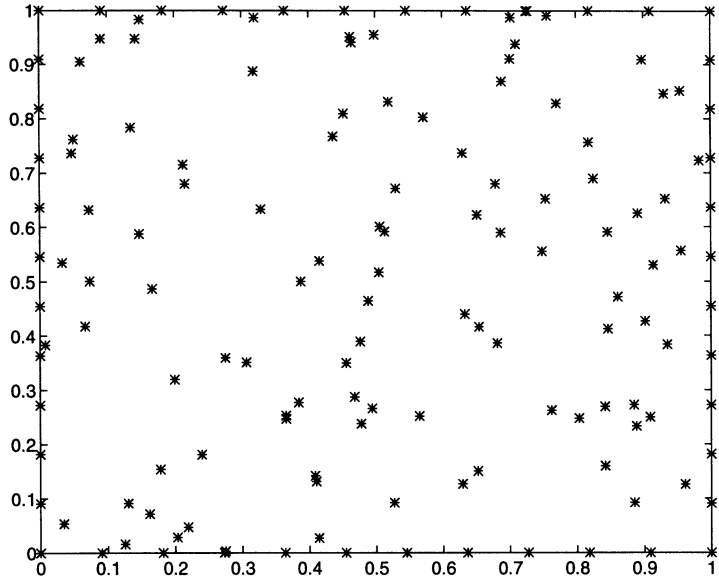


FIGURE 1 : Espace d'états  $([0, 1]^2)^S$ ,  $n = 10$ , configuration initiale.

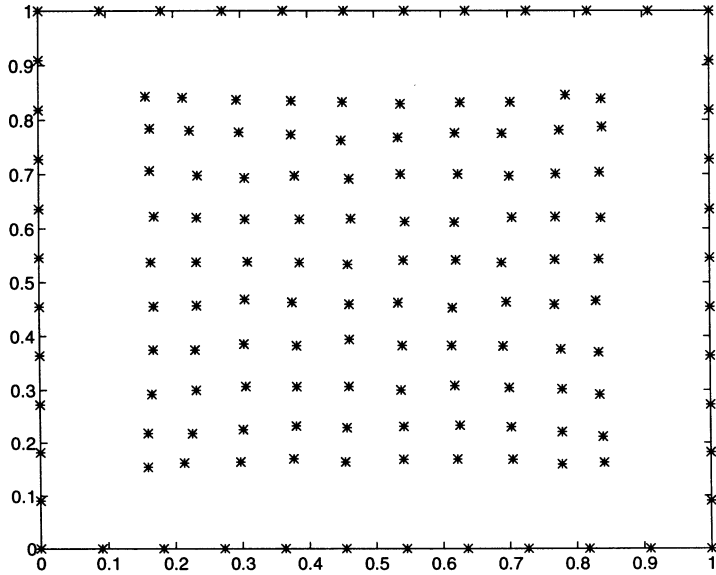


FIGURE 2: Espace d'états  $([0, 1]^2)^S$ ,  $n = 10$ , configuration limite moyenne.

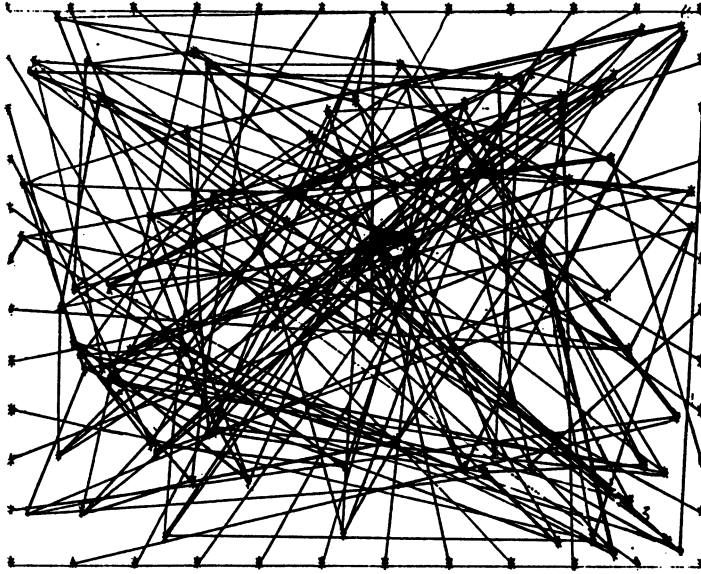


FIGURE 3: Espace d'états  $([0, 1]^2)^S$ ,  $n = 10$ , configuration initiale ([3]).

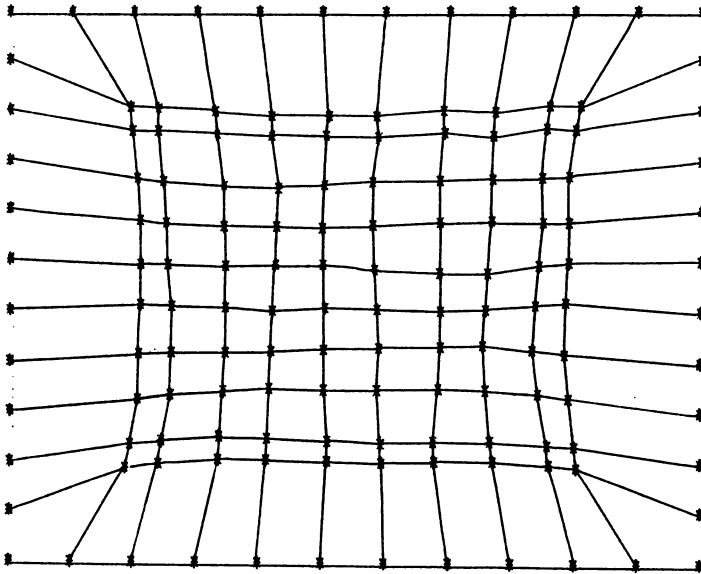


FIGURE 4: Espace d'états  $([0, 1]^2)^S$ ,  $n = 10$ , configuration limite moyenne ([3]).

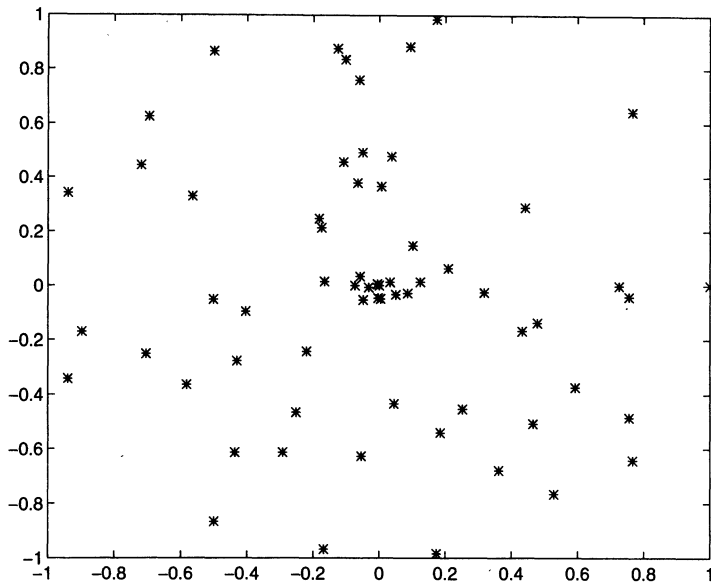


FIGURE 5: Espace d'états  $(\mathcal{D}(0,1))^{S'}$ ,  $nr = 6$ ,  $nt = 9$ , configuration initiale.

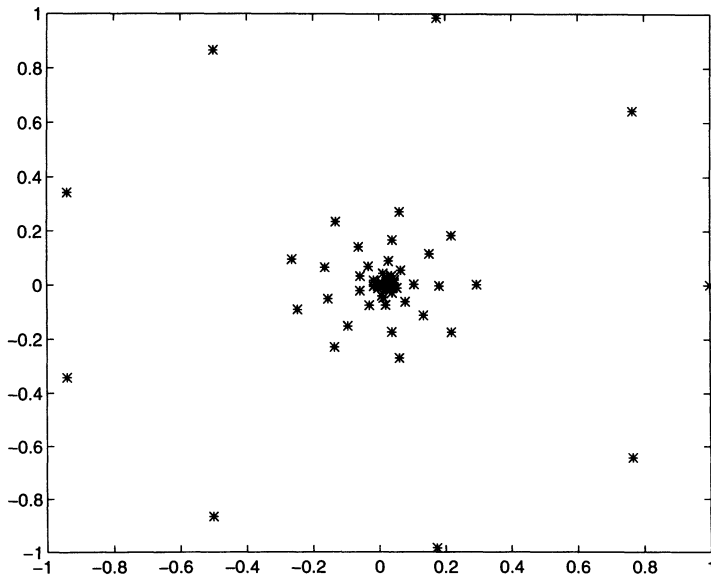


FIGURE 6: Espace d'états  $(\mathcal{D}(0,1))^{S'}$ ,  $nr = 6$ ,  $nt = 9$ , configuration limite moyenne.

## Remerciements

Merci à Claude, avec qui j'avais commencé ce travail, pour tout ce qu'il m'a appris. Il nous manque.

Merci à Jacques Neveu qui, par son enseignement hors pair, m'a donné le goût des probabilités, et m'a initiée aux systèmes de particules en me faisant lire l'article [13].

E.S.

## Références

- [1] BOUTON, C. et G. PAGES (1993). Self-organization and convergence of the one-dimensional Kohonen algorithm with non uniformly distributed stimuli. *Stoch. Proc. and Appl.*, **47**, 249-274.
- [2] COCOZZA, C. et C. KIPNIS (1977). Existence de processus Markoviens pour des systèmes infinis de particules. *Ann. Inst. Henri Poincaré, sect. B*, **13**, 239-257.
- [3] COTTRELL, M. et J.C. FORT (1986). A stochastic model of retinotopy: a self-organizing process. *Biol. Cybern.*, **53**, 405-411.
- [4] COTTRELL, M. et J.C. FORT (1987). Etude d'un processus d'auto-organisation. *Ann. Inst. Henri Poincaré, sect. B*, **23**, 1-20.
- [5] DUFLO, M. (1994). *Algorithmes stochastiques*. Poly. de DEA, univ. de Marne-la-Vallée.
- [6] DURRETT, R. (1991). *Probability: Theory and examples*. Wadsworth & Brooks /Cole.
- [7] DURRETT, R. (1993). *Ten Lectures on Particle Systems*. Notes du cours d'été de Saint-Flour.
- [8] FELLER, W. (1968). *An introduction to probability theory and its applications, vol 1, 3rd edition*. Wiley, New York.
- [9] FORT, J.C. et G. PAGES (1994). About the a.s. convergence of the Kohonen algorithm with a generalized neighbourhood function. Preprint.
- [10] KOHONEN, T. (1982). Self-organized formation of topogically correct feature maps. *Biol. Cybern.*, **43**, 59-69.
- [11] KOHONEN, T. (1984). *Self-organization and associative memory*. Springer-Verlag, New York.
- [12] LIGGETT, T.M. (1985). *Interacting particle systems*. Springer-Verlag, New-York.
- [13] LIGGETT, T.M. et F. SPITZER (1981). Ergodic theorems for coupled random walks and other systems with locally interacting components. *Z. Warsch. Verw. Gebiete*, **56**, 443-448.
- [14] SPITZER, F. (1981). Infinite systems with locally interacting components. *Ann. Probab.*, **9**, 349-364.
- [15] YANG H. et T.S. DILLON (1992). Convergence of self-organizing neural algorithms. *Neural Networks*, **5**, 485-493.