SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES AZÉMA
THIERRY JEULIN
FRANK B. KNIGHT
GABRIEL MOKOBODZKI
MARC YOR

Sur les processus croissants de type injectif

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 30 (1996), p. 312-343
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1996__30__312_0>

Sur les processus croissants de type injectif.

J. Azéma[1] T. Jeulin[2] F. Knight[3] G. Mokobodzki[4]
M.Yor[1]

Février 1996

[1] Laboratoire de Probabilités - Université Paris 6 et CNRS URA 224
4 place Jussieu - Tour 56 - 3ème étage - Couloir 56-66
75272 PARIS CEDEX 05.
[2] Université Paris 7 et CNRS URA 1321 - 2 place Jussieu
Tour 45 - 5ème étage - Couloir 45-55 - 75251 PARIS CEDEX 05.
[3] University of Illinois - Department of Mathematics - 273 Altgeld Hall
1409 West Green Street - URBANA, IL 61801 - U.S.A.
[4] Equipe d'Analyse, URA 754, Université Paris 6, 4 place Jussieu
Tour 46 - 4ème étage - 75272 PARIS CEDEX 05.

1 Introduction.

1.1 Généralités, motivations.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vérifiant les conditions habituelles. On identifiera deux processus indistinguables ainsi qu'une martingale uniformément intégrable X avec sa variable terminale X_∞. Le point de départ de ce travail est le

Théorème 1 *Soit L une fin d'ensemble prévisible, A la projection duale prévisible du processus $1_{[L,\infty[}$. On suppose : $0 < L < \infty$ presque sûrement. Les quatre propriétés suivantes sont satisfaites :*
1) Pour toute martingale [continue à droite, limitée à gauche] uniformément intégrable X

$$X_{L-} = 0 \text{ si et seulement si } \mathbb{E}\left[X_\infty \mid \mathcal{G}_L^-\right] = 0 \qquad \dagger^1.$$

2) Pour tout processus prévisible Z tel que

$$\int_{]0,\infty[} |Z_s| \; dA_s < \infty \text{ presque sûrement,}$$

on a :

$$Z_L \overset{p.s.}{=} 0 \text{ si et seulement si } \int_{]0,\infty[} Z_s \, dA_s \overset{p.s.}{=} 0.$$

---

[1] $\mathcal{G}_L^-$ est la tribu $\sigma\{Z_L \mid Z \text{ prévisible}\}$, $\mathcal{G}_L$ est la tribu $\sigma\{Z_L \mid Z \text{ optionnel}\}$

3) Les variables $\{X_{L-} \mid X \in L^2(\mathcal{G}_\infty)\}$ *sont denses dans* $L^2\left(\mathcal{G}_L^-\right)$.
4) La famille des variables aléatoires

$$\left\{\int_{]0,\infty[} Z_s\, dA_s \mid Z \text{ prévisible et } Z_L \in L^2\left(\mathcal{G}_L^-\right)\right\}$$

est dense dans $L^2\left(\mathcal{G}_L^-\right)$.

Il découle de la propriété *2*) du théorème *1* que pour Z prévisible tel que $\int_{]0,\infty[} |Z_s|\, dA_s$ est presque sûrement fini†[2], l'égalité

$$\int_{]0,\infty[} Z_s\, dA_s = 0 \text{ presque sûrement} \tag{1}$$

implique la propriété *a priori* plus forte :

$$\int_{]0,t]} Z_s\, dA_s = 0 \text{ presque sûrement pour tout } t. \tag{2}$$

On dira d'un processus croissant (ou plus généralement à variation bornée) [prévisible] A pour lequel l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est satisfaite, qu'il est de type injectif.

Une grande partie de l'article est consacrée à l'étude de cette propriété d'injectivité. Elle est à rapprocher de la propriété d'injectivité de l'intégrale stochastique par rapport à une martingale locale $(M_t)_{t\geq 0}$, i.e. :

si Z est un processus prévisible, vérifiant

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[} Z_s^2\, d\,[M,M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty \text{ et } \int_{[0,\infty[} Z_s\, dM_s = 0 \text{ presque sûrement,}$$

alors :

$$\int_{[0,t]} Z_s\, dM_s = 0 \text{ presque sûrement pour tout } t.$$

On pourrait également rapprocher la propriété de densité *4*) du théorème *1* d'un travail important, très récent [DMSSS], où est discutée la densité dans $L^2(\mathcal{G}_T)$, pour T temps d'arrêt, des intégrales stochastiques $\int_{]0,T]} Z_s\, dX_s$, par rapport à une semimartingale (vectorielle) donnée.

1.2 Une caractérisation de l'injectivité.

Rappelons tout d'abord que le support gauche $\mathrm{Supp}^g(C)$ d'un processus à variation finie C (prolongé à $]-\infty,0[$ par 0) est l'ensemble

$$\left\{\tau \in [0,\infty[\; ; \forall \varepsilon > 0,\ \int_{]\tau-\varepsilon,\tau]} |dC_s| > 0\right\}$$

[2] L'intégrale $\int_{]0,t]} Z_s\, dA_s$ est aussi notée $(Z\cdot A)_t$.

des points de croissance à gauche de $\int_{]0,.]} |dC_s|$. $\mathrm{Supp}^g(C)$ est fermé pour la topologie gauche (c'est le plus petit fermé gauche H tel que $1_{H^c} \cdot C = 0$) ; il est optionnel (resp. prévisible) si C est lui-même optionnel (resp. prévisible). Le support $\mathrm{Supp}(C)$ de C est l'ensemble

$$\left\{ \tau \in [0,\infty[\ ;\ \forall \varepsilon > 0,\ \int_{]\tau-\varepsilon,\tau+\varepsilon]} |dC_s| > 0 \right\}$$

des points de croissance de $\int_{]0,.]} |dC_s|$; il coïncide avec la fermeture (pour la topologie usuelle) de $\mathrm{Supp}^g(C)$; il est [seulement] optionnel si C est optionnel ou prévisible. Supposons que C soit à variation localement intégrable et notons $C^{(o)}$ (resp. $C^{(p)}$) sa projection duale optionnelle (resp. prévisible) ; on a :

$$\mathrm{Supp}^g(C) \subset \mathrm{Supp}^g(C^{(o)}) \subset \mathrm{Supp}^g(C^{(p)}).$$

Dans le cas continu, l'injectivité est une propriété du support gauche ; plus précisément on a le

Théorème 2 *Soit C un processus continu, à variation finie, prévisible, nul en* 0. *C a la propriété d'injectivité si et seulement si :*
pour tout temps d'arrêt S, l'ensemble

$$\mathrm{Supp}^g\,(C) \cap\,]S,\infty[$$

est évanescent ou n'a pas de section complète par un temps d'arrêt prévisible.

Une caractérisation complète de la propriété d'injectivité est donnée par le

Théorème 3 *Soit C un processus à variation finie, prévisible, nul en* 0.
C a la propriété d'injectivité si et seulement si il vérifie les deux conditions suivantes :

(α) *pour tout temps d'arrêt S, l'ensemble*

$$\mathrm{Supp}^g\,(C) \cap\,]S,\infty[$$

est évanescent ou n'a pas de section complète par un temps d'arrêt prévisible T tel que $\mathrm{Supp}^g\,(C) \cap\,]S,T[$ *ne soit pas évanescent ;*
(β) *pour tout temps d'arrêt prévisible S tel que $\Delta C_S \neq 0$ sur $\{S < \infty\}$,*

$$]S,\infty[\, \cap \{\Delta C \neq 0\}$$

est évanescent ou n'a pas de section complète par un temps d'arrêt prévisible.

1.3 Exemples

Outre les projections duales de fins d'ensembles prévisibles, des exemples concrets de processus de type injectif sont donnés par le résultat suivant :

Théorème 4 *Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$, et $(L_t^x)_{x\in\mathbb{R},t\geq 0}$ la famille bicontinue des temps locaux du mouvement brownien réel. Le processus*

$$V_t = \int_{\mathbb{R}} L^x_{t\wedge 1}\, d\mu\,(x)\ ;$$

a la propriété d'injectivité si, et seulement si, le support de μ est d'intérieur vide.

1.4 Plan de l'article.

Le reste de cet article est organisé comme suit :
- dans le paragraphe *2*, on donne une nouvelle démonstration de la propriété *1*) du théorème *1* ;
- dans le paragraphe *3*, on étudie des relations entre projections duales et propriété d'injectivité, ce qui nous permet, dans le paragraphe *4*, de démontrer les théorèmes *2* et *3* ;
- dans le paragraphe *5*, on donne plusieurs exemples, liés au mouvement brownien, de processus injectifs ou non-injectifs ; on y démontre en particulier le théorème *4* ;
- le paragraphe *6* est inspiré par la propriété de densité *4*) du théorème *1*. On y étudie des classes de variables aléatoires de $L^2(\mathcal{G}_{L-})$ se représentant, ou ne se représentant pas comme intégrales de la forme $\int_{]0,\infty[} Z_s \, dA_s$.
- Enfin, un appendice, composé de deux sections, apporte d'une part quelques compléments sur les fermés gauches, et, d'autre part quelques précisions sur les équivalences démontrées dans le paragraphe *3*.

2 Démonstration de la propriété 1) du théorème 1.

Une première démonstration est donnée en [AJKY]-théorème *2*, au prix d'un détour un peu pénible, qui utilise les résultats d'un article antérieur [AMY]. La démonstration directe donnée ici repose sur quelques lemmes élémentaires ayant leur intérêt propre.

Lemme 5 *Soit M une martingale locale, C un processus à variation finie, prévisible, nul en 0. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) $M_- \cdot C = 0$;
ii) MC est une martingale locale ;
iii) $\forall Z$ prévisible (localement borné), $M(Z \cdot C)$ est une martingale locale.

Démonstration. D'après la formule d'intégration par parties dûe à Yoeurp,

$$MC = M_- \cdot C + C_- \cdot M + [C, M] = M_- \cdot C + C \cdot M \ ;$$

MC est une semimartingale spéciale, dont la partie martingale locale est $C \cdot M$ et la partie à variation finie prévisible est $M_- \cdot C$.
i) et ii) sont donc équivalentes ; de façon évidente, $iii) \Rightarrow ii) \Rightarrow i)$. Supposons d'autre part $M_- \cdot C = 0$; soit Z prévisible localement borné ; on a :

$$0 = Z \cdot (M_- \cdot C) = M_- \cdot (Z \cdot C) \ ;$$

l'implication $i) \Rightarrow ii)$, appliquée à $Z \cdot C$ à la place de C, donne $iii)$ □

Lemme 6 *Soit C un processus prévisible à variation finie nul en 0.*
i) Soit $\mathcal{V} = \{H \cdot C \mid H$ prévisible localement borné$\}$; $\mathcal{V}$ est une algèbre, stable par composition par les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^1, avec $f(0) = 0$.
ii) Soit L la fin du support de C et $\mathcal{E} = \sigma\{V_t \mid V \in \mathcal{V}, t \geq 0\}$;

$$\{L > 0\} \in \mathcal{E},\ \mathcal{E}_{|\{L>0\}} = \mathcal{G}_{L-|\{L>0\}} \ ;\ \mathcal{E}_{|\{L=0\}} \text{ est triviale.}$$

Démonstration. *i*) Pour H, K prévisibles localement bornés,

$$(H \cdot C)_t\,(K \cdot C)_t = \int_{]0,t]} (H \cdot C)_{s-} K_s\, dC_s + \int_{]0,t]} (K \cdot C)_s H_s\, dC_s$$

et $K(H \cdot C)_- + (K \cdot C)H$ est prévisible localement borné.

Pour γ à variation finie[3], nul en 0, et f de classe C^1 avec $f(0) = 0$,

$$\begin{aligned} f(\gamma_t) &= \int_{]0,t]} f'(\gamma_s)\, d\gamma_s + \sum_{0<s\leq t} \left(f(\gamma_s) - f(\gamma_{s-}) - f'(\gamma_s)\,\Delta\gamma_s\right) \\ &= \int_{]0,t]} \left(f'(\gamma_s) + 1_{\{\Delta\gamma_s \neq 0\}} \left(\tfrac{f(\gamma_s)-f(\gamma_{s-})}{\gamma_s - \gamma_{s-}} - f'(\gamma_s)\right)\right) d\gamma_s. \end{aligned}$$

ii) Quitte à remplacer C par $\eta \cdot C$ où η est prévisible à valeurs dans $\{-1,1\}$ et $\int_{]0,t]} \eta_s\, dC_s = \int_{]0,t]} |dC_s|$ pour tout t, on peut supposer que C est croissant (ce qui ne change pas L ...). C étant constant après L,

$$\int_{]0,\infty[} H_s\, dC_s = \int_{]0,L]} H_s\, dC_s$$

et la tribu $\mathcal{E}$ est contenue dans $\mathcal{G}_{L-}$;

$\{L > 0\} = \{C_\infty > 0\} \in \mathcal{E}$ et sur $\{L = 0\}$, toutes les variables de $\mathcal{V}$ sont identiquement nulles.

Soit $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Arctg}\,(nx)$, S temps d'arrêt, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $H = 1_{]S,\infty[}$;

$$f_n\left(\int_{]0,a]} H_s\, dC_s\right) = f_n\left((C_a - C_S)_+\right) \underset{n\to\infty}{\to} 1_{\{C_a - C_S > 0\}} ;$$

en faisant tendre a vers l'infini, on obtient : $\{C_\infty > C_S\} \in \mathcal{E}$;

or $\{C_\infty > C_S\} = \{S < L\}$; la famille $\{\{S < L\} \mid S \text{ temps d'arrêt}\}$ engendrant $\mathcal{G}_{L-}$ sur $\{L > 0\}$, le lemme *6* est acquis □

Lemme 7 *Soit M une martingale uniformément intégrable et C un processus à variation finie, prévisible, nul en 0 ; soit L la fin du support [gauche] de C. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) MC est une martingale locale ;
ii) sur $\{L > 0\}$, $\mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{G}_{L-}] = 0$.

[3] De façon plus générale, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne, nulle en 0, z_1, ..., z_n boréliennes [localement] bornées sur $\mathbb{R}_+$ et b fonction croissante continue à droite, nulle en 0, de mesure associée $\beta = db$,

$$t \to F\left(\int_{]0,t]} z_1(s)\, db_s, \ldots, \int_{]0,t]} z_n(s)\, db_s\right)$$

est à variation finie, continue à droite, nulle en 0, de mesure associée absolument continue par rapport à β et à densité localement bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Si $V^{(1)}$, ..., $V^{(n)}$ sont dans $\mathcal{V}$, il en est donc de même de $F\left(V^{(1)}, \ldots, V^{(n)}\right)$; $\mathcal{V}$ est donc stable par composition par les fonctions localement lipschitziennes nulles en 0.

Démonstration. Plaçons-nous sous la condition $i)$; d'après le lemme *5*, pour tout processus H prévisible localement borné, $M(H \cdot C)$ est une martingale locale. On reprend la démonstration du lemme *6* (avec les mêmes notations) en supposant (ce qui n'est pas une restriction) que C est croissant.
$M f_n\left((C_. - C_S)_+\right)$ est une martingale locale, uniformément intégrable, donc une martingale uniformément intégrable, nulle en 0, de variable terminale

$$M_\infty f_n\left((C_\infty - C_S)_+\right) \ ;$$

on a donc :

$$\mathbb{E}\left[M_\infty f_n\left((C_\infty - C_S)_+\right)\right] = 0$$

et, par convergence dominée :

$$0 = \mathbb{E}\left[M_\infty \, ; \, C_\infty - C_S > 0\right] = \mathbb{E}\left[M_\infty \, ; \, S < L\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_\infty \mid \mathcal{G}_{L-}\right] \, ; \, S < L\right] \ ;$$

d'où $ii)$.

Inversement, sous $ii)$, limitons nous à nouveau au cas où C est croissant ; si H est prévisible borné, $a > 0$ et si R est un temps d'arrêt tel que sur $\{|M_0| \leq a\}$, C_R et $M^*_{R-} = \sup_{s<R} |M_s|$ soient bornées, alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_{]0,R]} H_s M_{s-} \, dC_s \, ; \, |M_0| \leq a\right] &= \mathbb{E}\left[M_\infty \int_{]0,R]} H_s \, dC_s \, ; \, |M_0| \leq a\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_\infty \mid \mathcal{G}_{L-}\right] \int_{]0,R]} H_s \, dC_s \, ; \, |M_0| \leq a\right] = 0.\end{aligned}$$

On en déduit facilement $M_- \cdot C = 0$ et d'après le lemme *5*, la condition $i)$ ci-dessus est satisfaite □

Lemme 8 *Soit Δ un processus à variation localement intégrable, D sa projection duale prévisible et M une martingale uniformément intégrable telle que $M_- \cdot \Delta = 0$. Soit λ la fin du support de D ; on a*

$$\mathbb{E}\left[M_\infty \mid \mathcal{G}_{\lambda-}\right] = 0 \textit{ sur } \{\lambda > 0\}.$$

Démonstration. La projection duale prévisible de $M_- \cdot \Delta$ est $M_- \cdot D$; il suffit d'appliquer les lemmes *5* et *7* □

Fin de la démonstration du théorème 1-*1*).
Si L est une fin d'ensemble prévisible avec $0 < L < \infty$, la fin du support de A est L ; en outre, pour Z prévisible,

$$Z_L = 0 \text{ si et seulement si } Z \cdot A = 0.$$

Par suite, pour X martingale [continue à droite, limitée à gauche] uniformément intégrable,

$$X_{L-} = 0 \Leftrightarrow X_- \cdot A = 0 \overset{\text{lemme } 8}{\Leftrightarrow} \mathbb{E}\left[X_\infty \mid \mathcal{G}_{L-}\right] = 0 \ \square$$

Remarques 9

1) Soit X une semi-martingale, C un processus à variation finie prévisible (nul en 0) et, pour $r \geq 0$, Λ_r la fin du support [gauche] de $C_{.\wedge r}$:

$$\Lambda_r = \sup\{s \leq r \mid s \in \mathrm{Supp}^g(C)\}.$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $X_{-} \cdot C = 0$ (ou $X_{-} = 0$ sur $\mathrm{Supp}^g(C)$) ;

ii) $XC = C \cdot X$;

iii) pour tout K prévisible borné, $X\,(K \cdot C) = (K \cdot C) \cdot X$;

iv) pour tout K prévisible borné, $X_t\, K_{\Lambda_t} = \int_{[0,t]} K_{\Lambda_u}\, dX_u$.

L'équivalence de *i*) et *ii*) résulte de la formule d'intégration par parties :

$$XC = X_{-} \cdot C + C \cdot X.$$

Le passage à *iii*) se fait comme au lemme *5*. Sous *iii*), avec les notations de la démonstration du lemme *7*,

$$X_t\, f_n\left((C_t - C_S)_+\right) = \int_{[0,t]} f_n\left((C_u - C_S)_+\right)\, dX_u,$$

ce qui donne quand n tend vers l'infini :

$$X_t\, 1_{\{S<\Lambda_t\}} = \int_{[0,t]} 1_{\{S<\Lambda_u\}}\, dX_u\ ;$$

le passage à la forme générale de *iv*) s'obtient par classe monotone. Le retour à *i*) se fait en appliquant *iv*) à l'égalité $H = C = C_\Lambda$ □

2) Soit maintenant H un ensemble prévisible, fermé gauche ; et, pour $t > 0$,

$$\ell_t = \sup\{s < t \mid s \in H\},$$
$$\mathcal{L}_t = \int_{]0,t]} 1_H(s)\, ds + \sum\nolimits_{0<s\leq t} 1_{\{\ell_s < s \in H\}} \Delta\ell_s.$$

$\mathcal{L}$ est un processus croissant, prévisible, nul en 0 et tel que :

$$H = \mathrm{Supp}^g(\mathcal{L})\ :$$

Par suite, si la semi-martingale X vérifie $X_{-} = 0$ sur H, elle vérifie $X_{-} \cdot \mathcal{L} = 0$ et, d'après la remarque précédente : pour tout K prévisible borné,

$$X_t\, K_{\Lambda_t} = \int_{[0,t]} K_{\Lambda_u}\, dX_u.$$

On retrouve ainsi la formule de balayage gauche déjà donnée dans la proposition *3* de [AJKY]-(Appendice B).

3) Des compléments sur les fermés gauches sont donnés en appendice.

3 Projections duales et injectivité.

Nous allons montrer ci-dessous les propriétés *2* et *4* du théorème *1*. Il nous a toutefois semblé intéressant de travailler d'abord avec une variable aléatoire positive τ générale, avant de considérer le cas d'une fin d'ensemble prévisible.

Lemme 10 *Soit τ une variable aléatoire positive, β (resp. B) la projection duale optionnelle (resp. prévisible) du processus croissant $1_{\{0<\tau\leq \cdot\}}$.*

1) Pour H processus optionnel tel que†[4] $\int_{]0,\infty[} |H_s|\, d\beta_s < \infty$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $H_\tau = 0$ *sur* $\{0 < \tau < \infty\}$;
ii) $H \cdot \beta = 0$;
iii) $(H \cdot \beta)_\tau = 0$;
iii') $(H \cdot \beta)_\tau = 0$ *sur* $\{0 < \tau < \infty\}$;
iv) $(H \cdot \beta)_\tau + (H \cdot \beta)_{\tau-} = 0$;
iv') $(H \cdot \beta)_\tau + (H \cdot \beta)_{\tau-} = 0$ *sur* $\{0 < \tau < \infty\}$;
v) $H_\tau \left((H \cdot \beta)_\tau + (H \cdot \beta)_{\tau-}\right) \leq 0$ *sur* $\{0 < \tau < \infty\}$.

2) Pour K processus prévisible tel que†[5] $\int_{]0,\infty[} |K_s|\, dB_s < \infty$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $K_\tau = 0$ *sur* $\{0 < \tau < \infty\}$;
ii) $K \cdot B = 0$;
iii) $(K \cdot B)_\tau = 0$;
iii') $(K \cdot B)_\tau = 0$ *sur* $\{0 < \tau < \infty\}$;
iv) $(K \cdot B)_\tau + (K \cdot B)_{\tau-} = 0$;
iv') $(K \cdot B)_\tau + (K \cdot B)_{\tau-} = 0$ *sur* $\{0 < \tau < \infty\}$;
v) $K_\tau \left((K \cdot B)_\tau + (K \cdot B)_{\tau-}\right) \leq 0$ *sur* $\{0 < \tau < \infty\}$.

Démonstration. *1*) Par définition de β, on a clairement *i*) $\Leftrightarrow$ *ii*) $\Rightarrow$ *iii*) $\Rightarrow$ *iii'*) ; on a en outre sur $\{0 < \tau < \infty\}$,

$$H_\tau (H \cdot \beta)_\tau = \tfrac{1}{2} H_\tau \left((H \cdot \beta)_\tau + (H \cdot \beta)_{\tau-}\right) + \tfrac{1}{2} H_\tau^2 (\Delta \beta_\tau)$$

si bien que *iii'*) $\Rightarrow$ *v*). Supposons maintenant *v*) satisfaite. Posons :

$$h = H_\tau \left((H \cdot \beta)_\tau + (H \cdot \beta)_{\tau-}\right) 1_{\{0<\tau<\infty\}} \text{ et } C = H \cdot \beta \,;$$

par hypothèse, on a : $h \leq 0$. De plus, si $C = H \cdot \beta$ on a :

$$C^2 = (C + C_-) \cdot C$$

et C^2 est la projection duale optionnelle du processus $h 1_{\{0<\tau\leq \cdot\}}$ qui est décroissant ; C^2 est donc décroissant, nul en 0, donc nul, ce qui équivaut à *ii*). Comme on a aussi *ii*) $\Rightarrow$ *iv*) $\Rightarrow$ *iv'*) $\Rightarrow$ *v*), le point *1*) est établi.

[4] Ceci nécessite $|H_\tau| < \infty$ sur $\{0 < \tau < \infty\}$.
[5] Ceci nécessite $|K_\tau| < \infty$ sur $\{0 < \tau < \infty\}$.

2) s'établit de façon analogue □

Si τ est la fin d'un ensemble optionnel (resp. prévisible), β (resp. B) est constant après τ. On peut ainsi énoncer les trois corollaires suivants (on notera que les corollaires *12* et *14* sont des redites des propriétés *2*) et *4*) du théorème *1*) :

Corollaire 11 *Soit L une fin d'ensemble optionnel et α la projection duale optionnelle de $1_{\{0<L\leq\cdot\}}$; pour H processus optionnel, tel que :*

$$\int_{]0,\infty[} |H_u| \, d\alpha_u < \infty,$$

il y a équivalence entre :

$$i)\ H_L = 0 \ sur\ \{0 < L < \infty\} \ ;\ ii) \int_{]0,.]} H_u \, d\alpha_u = 0 \ ;\ iii) \int_{]0,\infty[} H_u \, d\alpha_u = 0.$$

Corollaire 12 *Soit L une fin d'ensemble prévisible et A la projection duale prévisible de $1_{\{0<L\leq\cdot\}}$; pour K processus prévisible, tel que :*

$$\int_{]0,\infty[} |K_u| \, dA_u < \infty,$$

il y a équivalence entre :

$$i)\ K_L = 0 \ sur\ \{0 < L < \infty\} \ ;\ ii) \int_{]0,.]} K_u \, dA_u = 0 \ ;\ iii) \int_{]0,\infty[} K_u \, dA_u = 0.$$

Lemme 13 *Soit τ une variable aléatoire positive, β la projection duale optionnelle (resp. prévisible) de $1_{\{0<\tau\leq\}.}$.*

1) Pour tout $a \in [0,1[$,

$$\mathbb{E}\left[e^{a\beta_\tau} \mid 0 < \tau < \infty\right] \leq \frac{1}{1-a} \ et\ \mathbb{E}\left[e^{a\beta_\infty}\right] \leq \frac{1}{1-a}$$

2) Pour tout processus optionnel (resp. prévisible) H, et tout $r \in [1, \infty[$,

$$\|(|H| \cdot \beta)_\infty\|_r \leq r \left\|H_\tau 1_{\{0<\tau<\infty\}}\right\|_r.$$

Démonstration (voir [DM]-chapitre *6* et plus particulièrement le théorème *105*).
Traitons le cas optionnel ; la démonstration est analogue dans le cas prévisible.
1) Soit $c = \mathbb{P}[0 < \tau < \infty]$. On notera que $\Delta\beta = {}^o\left(1_{[\tau]\cap]0,\infty[}\right)$ est à valeurs dans $[0,1]$. Soit $T_n = \inf\{t \mid \beta_t \geq n\}$; comme β est majoré par $n+1$ sur $[0, T_n]$, pour tout $a \in [0,1[$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{a\beta_\tau} ; 0 < \tau < \infty, \tau \leq T_n\right] \leq c + \mathbb{E}\left[e^{a\beta_{T_n}} - 1\right] \\
&= c + \mathbb{E}\left[a \int_{]0,T_n]} e^{a\beta_s} \, d\beta_s + \sum\nolimits_{0<s\leq T_n} e^{a\beta_s}\left(1 - a\Delta\beta_s - e^{-a\Delta\beta_s}\right)\right] \\
&\leq c + a\mathbb{E}\left[\int_{]0,T_n]} e^{a\beta_s} \, d\beta_s\right] = c + a\mathbb{E}\left[e^{a\beta_\tau} ; 0 < \tau < \infty, \tau \leq T_n\right]
\end{aligned}$$

d'où :

$$\mathbb{E}\left[e^{a\beta_\tau}\,;\,0<\tau<\infty,\,\tau\leq T_n\right]\leq\frac{c}{1-a}\text{ et }\mathbb{E}\left[e^{a\beta_{T_n}}\right]\leq\frac{1}{1-a}$$

et, quand $n\to\infty$,

$$\mathbb{E}\left[\exp a\beta_\tau\,;\,0<\tau<\infty\right]\leq\frac{c}{1-a},\ \mathbb{E}\left[\exp a\beta_\infty\right]\leq\frac{1}{1-a}.$$

2) De même, pour $r\geq 1$ et V processus croissant,

$$\begin{aligned}V_t^r &= r\int_{]0,t]}V_s^{r-1}\,dV_s+\sum\nolimits_{0<s\leq t}\left(V_s^r-V_{s-}^r-rV_s^{r-1}\Delta V_s\right)\\ &\leq r\int_{]0,t]}V_s^{r-1}\,dV_s.\end{aligned}$$

Ainsi, soit H un processus optionnel borné et $V=|H|\cdot\beta$. V_∞^r est intégrable et :

$$\mathbb{E}\left[V_\infty^r\right]\leq r\mathbb{E}\left[\int_{]0,\infty[}V_s^{r-1}\,dV_s\right]=r\,\mathbb{E}\left[V_\tau^{r-1}\left|H_\tau\right|\,;\,0<\tau<\infty\right].$$

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder pour obtenir :

$$\left\|\int_{]0,\infty[}|H_s|\,d\beta_s\right\|_r\leq r\,\left\|H_\tau 1_{\{0<\tau<\infty\}}\right\|_r,$$

inégalité se prolongeant, par limite monotone, à tout processus optionnel H □

Corollaire 14 *Soit τ une variable aléatoire positive, β (resp. B) la projection duale optionnelle (resp. prévisible) de $1_{\{0<\tau\leq\cdot\}}$; à condition de se restreindre à $\{0<\tau<\infty\}$*

$$\left\{\int_{]0,\tau]}H_s\,d\beta_s\mid H\textit{ optionnel avec }\mathbb{E}\left[H_\tau^2\,;\,0<\tau<\infty\right]<\infty\right\}$$

est dense dans $L^2(\mathcal{G}_\tau)$ lorsque τ est fin d'ensemble optionnel ;

$$\left\{\int_{]0,\tau]}K_s\,dB_s\mid K\textit{ prévisible avec }\mathbb{E}\left[K_\tau^2\,;\,0<\tau<\infty\right]<\infty\right\}$$

est dense dans $L^2(\mathcal{G}_{\tau-})$ lorsque τ est fin d'ensemble prévisible.

Démonstration. Traitons seulement le cas optionnel.
Soit $\mathcal{W}$ la fermeture dans $L^2\left(\mathcal{G}_\tau\right)$ de

$$\left\{(H\cdot B)_\tau\mid H\text{ optionnel, }\mathbb{E}\left[H_\tau^2 1_{\{0<\tau<\infty\}}\right]<\infty\right\},$$

et $u\in L^2\left(\mathcal{G}_\tau\right)$ tel que $u1_{\{0<\tau<\infty\}}$ soit orthogonal à $\mathcal{W}$; soit U un processus optionnel tel que

$$u=U_\tau\text{ sur }\{0<\tau<\infty\}.$$

On a en particulier :

$$\begin{aligned}0 &= 2\mathbb{E}\left[U_\tau\,(U\cdot B)_\tau\,;\,0<\tau<\infty\right]\\ &=\mathbb{E}\left[U_\tau\left((U\cdot B)_\tau+(U\cdot B)_{\tau-}\right)+U_\tau^2\Delta B_\tau\,;\,0<\tau<\infty\right]\\ &=\mathbb{E}\left[\left(\int_{]0,\infty[}U_s\,dB_s\right)^2\right]+\mathbb{E}\left[U_\tau^2\Delta B_\tau\,;\,0<\tau<\infty\right];\end{aligned}$$

ainsi, $\int_{]0,\infty[}U_s\,dB_s=0$ et (corollaire *12*) $u1_{\{0<\tau<\infty\}}=0$ □

4 Une caractérisation de l'injectivité.

Venons-en à une étude précise de la notion d'injectivité définie dans l'introduction†[6]. Commençons par les constatations suivantes, où C désigne un processus prévisible, à variation totale $\int_{]0,\infty[} |dC_s|$ finie presque sûrement, nul en 0 et ayant la propriété d'injectivité.

♯*1*) Pour Z prévisible tel que : $\forall t > 0$, $\int_{]0,t]} |Z_s|\,|dC_s| < \infty$ presque sûrement, $Z \cdot C$ a la propriété d'injectivité. En particulier,

$$C^d = \sum\nolimits_{0<s\leq .} \Delta C_s \text{ et } C^c = C - C^d$$

sont injectifs.

♯*2*) Soit Φ une fonction localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, nulle en 0 ; on a :

$$\Phi(x) = \int_0^x \phi(u)\,du$$

où ϕ est borélienne localement bornée et

$$\Phi\left(C_t\right) = \int_{]0,t]} \left(1_{\{\Delta C_s = 0\}} \phi\left(C_s\right) + 1_{\{\Delta C_s \neq 0\}} \frac{\Phi\left(C_s\right) - \Phi\left(C_{s-}\right)}{C_s - C_{s-}} \right) dC_s\,;$$

comme

$$\int_{]0,\infty[} \left| 1_{\{\Delta C_s = 0\}} \phi\left(C_s\right) + 1_{\{\Delta C_s \neq 0\}} \tfrac{\Phi(C_s) - \Phi(C_{s-})}{C_s - C_{s-}} \right| |dC_s| < \infty \text{ p.s.},$$

$$\Phi\left(C_\infty\right) \overset{\text{p.s.}}{=} 0 \text{ implique } \Phi\left(C\right) = 0.$$

Ainsi soit $a \geq 0$, U, V prévisibles tels que :

$$\int_{]0,\infty[} \left(|U_s| + |V_s|\right) |dC_s| < \infty\,;$$

prenant $\Phi(x) = (x-a)_+$ et remplaçant C par $(U - V) \cdot C$ dans ce qui précéde, on obtient :

$$(U \cdot C)_\infty \leq (V \cdot C)_\infty + a \text{ presque sûrement} \Rightarrow (U \cdot C) \leq (V \cdot C) + a.$$

♯*3*) Notons $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ la tribu prévisible sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ et soit D un processus croissant, borné, prévisible, équivalent à C ; ν_D est la mesure sur $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}(\mathcal{G}))$ définie par :

$$\nu_D\left(U\right) = \mathbb{E}\left[\int_{]0,\infty[} 1_U\left(s\right)\, dD_s\right].$$

Alors,

$$\mathcal{M}_- = \{M_- \mid M \text{ martingale bornée}\}$$

[6] Vu le corollaire *11*, en remplaçant prévisible par optionnel, on peut légitimement introduire une notion analogue d'injectivité *optionnelle*. Nous n'avons pas cherché de caractérisation de l'injectivité optionnelle. Notons toutefois que, dans le cas continu, elle coïncide avec l'injectivité ***prévisible*** : si H est optionnel, de projection prévisible ${}^pH$, $\{{}^pH \neq H\}$ est à coupes (au plus) dénombrables, et n'est donc pas chargé par les processus à variation finie, *continus*.

est dense dans $L^2(\nu_D)$.

Soit en effet Z prévisible avec $\int Z^2\, d\nu_D < \infty$. $\left(\int_{]0,\infty[} |Z_s|\, dD_s\right)^2$ est intégrable et comme

$$\mathbb{E}\left[M_\infty \int_{]0,\infty[} Z_s\, dD_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_{]0,\infty[} M_{s-} Z_s\, dD_s\right],$$

Z est orthogonal dans $L^2(\nu_D)$ à $\mathcal{M}_-$ si et seulement si

$$\int_{]0,\infty[} Z_s\, dD_s = 0 \text{ presque sûrement ;}$$

D ayant la propriété d'injectivité, cette dernière condition impose $Z \cdot D = 0$ et donc :

$$\int Z^2\, d\nu_D = 0.$$

Ce résultat, appliqué à la projection duale prévisible A de $1_{\{0<L\leq .\}}$ où L est fin d'ensemble prévisible, donne le point *3*) du théorème *1* (et achève sa démonstration), puisque

$$\int Z\, d\nu_A = \mathbb{E}\left[Z_L\,;\, 0 < L < \infty\right].$$

Proposition 15 *Soit C un processus prévisible, à variation finie, ayant la propriété d'injectivité et Z un processus prévisible tel que :*

$$\int_{]0,\infty[} |Z_s|\, |dC_s| < \infty.$$

1) Soit Γ le support de la loi de la variable aléatoire $(Z \cdot C)_\infty$; le processus $Z \cdot C$ est presque sûrement à valeurs dans $\Gamma \cup \{0\}$. Si C est continu, Γ est un intervalle contenant 0.

2) Soit T un temps d'arrêt et Γ_T le support de la loi de $(Z \cdot C)_\infty$ conditionnellement à $\mathcal{G}_T$; on a presque sûrement

$$T \leq t \Rightarrow (Z \cdot C)_t \in \Gamma_T \cup \{(Z \cdot C)_T\}.$$

Démonstration. 1) Soit μ la loi de $(Z \cdot C)_\infty$;
soit J un intervalle ouvert, borné, contenu dans le complémentaire de $\Gamma \cup \{0\}$. Pour toute fonction f de classe C^1 à support dans J, $f\left((Z \cdot C)_\infty\right) = 0$ et (propriété ♯*2*) ci-dessus), $f\left((Z \cdot C)\right) = 0$, d'où le premier résultat. Si C est continu, supposons :

$$\text{Supp}\mu \cap]0,\infty[\neq \emptyset \text{ et } \exists 0 < a < b,\ a \notin \text{Supp}\mu,\ b \in \text{Supp}\mu\ ;$$

soit $\eta > 0$ tel que : $0 < a - \eta$ et $]a-\eta, a+\eta[\subseteq (\text{Supp}\mu)^c$; il suffit de choisir une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à support dans $]a-\eta, a+\eta[$, avec $f(a) \neq 0$ pour contredire la propriété des valeurs intermédiaires vérifiée par la fonction continue $f\,(Z \cdot C)$.

2) s'obtient de façon analogue □

On a aussi :

Proposition 16 *Soit C et D des processus prévisibles à variation finie, nuls en 0, ayant la propriété d'injectivité. On suppose en outre D continu. Soit T un temps d'arrêt. Le processus Δ*

$$t \to \Delta_t = C_{t \wedge T} + 1_{\{T \leq t\}} (D_t - D_T)$$

a la propriété d'injectivité.

Démonstration. Soit Z prévisible avec

$$\int_{]0,T]} |Z_s| \, |dC_s| + \int_{]T,\infty[} |Z_s| \, |dD_s| < \infty \text{ et } \int_{]0,\infty[} Z_s d\Delta_s = 0 \text{ presque sûrement.}$$

On pose :

$$\xi = \int_{]0,T]} Z_s \, dC_s = - \int_{]T,\infty[} Z_s \, dD_s.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, $1_{\{|\xi|>\varepsilon\}} \frac{1}{\xi} \int_{]T,\infty[} Z_s \, dD_s = -1_{\{|\xi|>\varepsilon\}}$;

le processus $H = 1_{\{|\xi|>\varepsilon\}} \frac{1}{\xi} Z 1_{]T,\infty[}$ est prévisible et $-1_{\{|\xi|>\varepsilon\}} = (H \cdot D)_\infty$;

D ayant la propriété d'injectivité, il résulte de la proposition *15-1*) que l'on a presque sûrement : $|\xi| \leq \varepsilon$; ainsi,

$$0 = \int_{]T,\infty[} Z_s \, dD_s = \int_{]0,T]} Z_s \, dC_s \text{ presque sûrement}$$

et, d'après l'injectivité de C et D,

$$\int_{]0,t\wedge T]} Z_s \, dC_s = 0, \; 1_{\{T \leq t\}} \int_{]T,t]} Z_s \, dD_s = 0 \; \square$$

Remarques 17

1) Si D n'est pas supposé continu, le résultat précédent n'est plus vrai :
soit T un temps d'arrêt fini, C un processus ayant la propriété d'injectivité, avec $\mathbb{P}[C_T \neq 0] \neq 0$; pour $\varepsilon > 0$, $T + \varepsilon$ est un temps d'arrêt prévisible et $D = -C_T 1_{[T+\varepsilon,\infty[}$ a aussi la propriété d'injectivité. Néanmoins le processus W défini par

$$t \to W_t = C_{t\wedge T} + 1_{\{T \leq t\}} (D_t - D_T)$$

vérifie

$$W \neq 0, \; \int_{]0,\infty[} |dW_s| < \infty \text{ et } W_\infty = 0.$$

2) Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ la suite croissante des temps de sauts d'un $\mathcal{G}$-processus de Poisson N ; pour tout $n \geq 1$, $t \to \inf(t, T_n)$ a la propriété d'injectivité ; d'autre part, le processus déterministe $t \to t$ n'est bien sûr pas injectif ; la propriété d'injectivité ne se localise donc pas.

Proposition 18

Soit C un processus prévisible à variation finie nul en 0, S un temps d'arrêt avec $\mathbb{P}[S < \infty] > 0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe un temps d'arrêt prévisible $T \geq S$ tel que :

$$S < T < \infty \textit{ sur } \{S < \infty\} \textit{ et } [T] \subseteq \mathrm{Supp}^g(C).$$

ii) Il existe un processus prévisible H tel que

$$\int_{]S,\infty[} |H_s|\, |dC_s| = 1 \textit{ sur } \{S < \infty\}.$$

Démonstration. Sous la condition $i)$ on peut supposer C croissant ; soit (τ_n) une suite de temps d'arrêt minorés par S, annonçant T sur $\{S < \infty\}$;
sur $\{S < \infty\}$, pour tout n, $C_T - C_{\tau_n}$ est strictement positif ; soit donc (u_n) une suite de réels strictement positifs avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}[C_T - C_{\tau_n} \leq u_n \mid S < \infty] \leq 2^{-n} ;$$

d'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\limsup_n \tfrac{1}{u_n}(C_T - C_{\tau_n}) \geq 1 \text{ presque sûrement sur } \{S < \infty\} ;$$

la suite de réels positifs $(c_n) = \left(\frac{1}{u_n}\right)$ vérifie donc

$$\{S < \infty\} \subseteq \left\{\sum_n c_n (C_T - C_{\tau_n}) = \infty\right\}.$$

Soit

$$K = \sum_{n \geq 1} c_n 1_{]\tau_n, T[} + 1_{\{\Delta C_T > 0\}} \frac{1}{\Delta C_T} 1_{[T]} \text{ et } \tau = \inf\{t > S \mid (K \cdot C)_t \geq 1\} ;$$

τ est un temps d'arrêt prévisible ; sur $\{S < \infty\}$, on a aussi :

$$\tau < \infty,\ (K \cdot C)_{\tau-} \leq 1,$$
$$(K \cdot C)_\tau < \infty \text{ si } \tau < T \text{ ou } \tau = T \text{ et } \Delta C_T = 0 ;$$

il suffit de prendre

$$H = K 1_{]S,\tau[} + 1_{\{\tau = T,\, \Delta C_T > 0\}} \left(\frac{1 - (K \cdot C)_{\tau-}}{\Delta C_\tau}\right) 1_{[\tau]}$$

pour obtenir $ii)$. Inversement si $ii)$ est vérifiée,

$$T = \inf\left\{t > S \mid \int_{]S,t]} |H_s|\, |dC_s| \geq \tfrac{1}{2}\right\}$$

est un temps d'arrêt prévisible, fini sur $\{S < \infty\}$.
$[T]$ est contenu dans $\mathrm{Supp}^g(C)$, d'où $i)$ □

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le

Théorème 2 *Soit C un processus continu, prévisible, à variation finie, nul en 0. C n'est pas de type injectif si et seulement si il existe un temps d'arrêt S tel que l'ensemble*

$$]S, \infty[\cap \mathrm{Supp}^g(C)$$

n'est pas évanescent et admet une section complète par un temps d'arrêt prévisible.

Démonstration.
1) Si C n'a pas la propriété d'injectivité , il existe un processus prévisible Z avec

$$\int_{]0,\infty[} |Z_s|\,|dC_s| < \infty,\ \int_{]0,\infty[} Z_s\,dC_s = 0 \text{ et } D = Z \cdot C \neq 0\,;$$

d'après le théorème de section [prévisible], il existe un temps d'arrêt S [prévisible] tel que :

$$\mathbb{P}[S < \infty] > 0 \text{ et } D_S \neq 0 \text{ sur } \{S < \infty\}.$$

Sur $\{S < \infty\}$,

$$1 = \frac{-1}{D_S}\int_{]S,\infty[} Z_s\,dC_s \leq \frac{1}{|D_S|}\int_{]S,\infty[} |Z_s|\,|dC_s|\ ;$$

d'après la proposition *18*, il existe un temps d'arrêt prévisible T tel que

$$S < T < \infty \text{ sur } \{S < \infty\} \text{ et } [T] \subseteq \mathrm{Supp}^g(D) \subseteq \mathrm{Supp}^g(C).$$

2) Inversement, supposons qu'il existe un temps d'arrêt S, tel que $]S,\infty[\,\cap\, \mathrm{Supp}^g(C)$ ne soit pas évanescent et qu'il en existe une section complète par un temps d'arrêt prévisible T ; d'après la proposition *18*, il existe un processus prévisible Z avec

$$\int_{]S,T]} |Z_s|\,|dC_s| < \infty,\ \int_{]S,T]} Z_s\,dC_s = 1 \text{ sur } \{S < \infty\}\ ;$$

d'après la proposition *15*, C n'est pas de type injectif □

Proposition 19

Soit C un processus prévisible à variation finie nul en 0, S un temps d'arrêt avec $\mathbb{P}[S < \infty] > 0$. S'il existe un temps d'arrêt prévisible $T \geq S$ tel que :

$$S < T < \infty \textit{ sur } \{S < \infty\},\ [T] \subseteq \mathrm{Supp}^g(C)$$
$$\textit{et }]S,T[\,\cap\,\mathrm{Supp}^g(C) \textit{ non évanescent,}$$

il existe un processus prévisible Z tel que

$$\int_{]S,T]} |Z_s|\,|dC_s| < \infty,\ \int_{]S,T]} Z_s\,dC_s = 0 \textit{ et } \mathbb{P}\left[\int_{]S,T]} |Z_s|\,|dC_s| \neq 0\right] > 0$$

(en particulier, C n'est pas de type injectif).

Démonstration. Soit (τ_n) une suite de temps d'arrêt minorés par S, annonçant T sur $\{S < \infty\}$; dire que $]S,T[\,\cap\,\mathrm{Supp}^g(C)$ est non évanescent revient à dire :

$$\mathbb{P}\left[\int_{]S,T[} |dC_s| \neq 0\right] > 0.$$

En particulier, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\mathbb{P}\left[\int_{]S,\tau_m]} |dC_s| > \alpha\right] > 0.$$

Comme dans la démonstration de la proposition *18*, on établit l'existence d'un processus prévisible J tel que

$$\int_{]\tau_m,T]} |J_s|\,|dC_s| = 1 \text{ sur } \{S<\infty\}\,.$$

Soit ξ le processus

$$\xi_t = \frac{1}{4\alpha}\left(\alpha \wedge \int_{]0,t]} 1_{\{S<s\le\tau_m\}}\,|dC_s|\right) + \int_{]0,t]} 1_{\{\tau_m<s\le T\}}\,|J_s|\,|dC_s|\ ;$$

on a $\xi_\infty \ge 1$ sur $\{S<\infty\}$ et $\mathbb{P}\left[\frac{1}{8}<\xi_{\tau_m}<1\right]>0$; si f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\{f\neq 0\}$ soit l'intervalle $\left]\frac{1}{8},1\right[$, le processus à variation bornée $f(\xi)$ est de la forme $Z\cdot C$ pour un processus prévisible Z, dont on vérifie immédiatement qu'il vérifie les conclusions énoncées □

Corollaire 20 *Soit C un processus prévisible à variation finie, nul en* 0 *; une condition nécessaire pour que C ait la propriété d'injectivité est que tout ouvert aléatoire prévisible contenu dans* Supp(C) *soit évanescent*†[7].

Démonstration. On peut supposer C croissant ; soit $a>0$ et U un ouvert aléatoire prévisible contenu dans $\mathrm{Supp}(C)\cap[0,a]$; supposons U non évanescent. Il existe un temps d'arrêt prévisible S avec

$$\mathbb{P}[S<\infty]>0 \text{ et } [S]\subseteq U\,;$$

soit τ le temps d'arrêt $\tau=\inf\{t>S \mid t\notin U\}$; sur $\{S<\infty\}$, τ est fini, $\tau\notin U$ (τ est donc prévisible), $\tau\in\mathrm{Supp}(C)$ et $\mathrm{Supp}^g(C)\cap]S,\tau[=]S,\tau[$ est non évanescent. Il suffit d'appliquer la proposition *19* pour conclure □

Lemme 21 *Soit D un processus à variation finie, prévisible, nul en* 0, *tel que :*

$$\int_{]0,\infty[} |dD_s|<\infty,\ D_\infty=0,\ \mathbb{P}\left[\int_{]0,\infty[}|dD_s|>0\right]\neq 0$$
$$\text{et } \{\Delta D\neq 0\}\subseteq\{D=0\}\,.$$

Il existe des temps d'arrêt S et T tels que :

$$\mathbb{P}[S<\infty]>0,\ T \text{ est prévisible}\ ;$$
$$\text{sur } \{S<\infty\},\ S<T<\infty,\ T\in\mathrm{Supp}^g(D),$$
$$D \text{ est continu sur }]S,T[,\ \text{et } \int_{]S,T[}|dD_s|>0$$

[7] Cela ne signifie pas que Supp(C) soit d'intérieur vide : si T est le premier temps de saut d'un processus de Poisson, $t\to t\wedge T$ est prévisible, injectif, de support $[0,T]$.

Démonstration. Notons tout de suite que l'on a :

$$D_t^2 = 2\int_{]0,t]} D_{s-}dD_s + [D,D]_t = 2\int_{]0,t]} D_{s-}dD_s^c - [D,D]_t \,.$$

En particulier, D^c n'est pas nul (i.e. D n'est pas de saut pur). En outre, $D_t \neq 0$ implique : pour t fixé, D est continu en t.
Soit $a > 0$ avec $\{|D| > a\}$ non évanescent et

$$S = \inf\{t > 0 \mid |D_t| > a\}\,.$$

Plaçons nous dorénavant sur $\{S < \infty\}$ (qui est de probabilité non nulle). Par continuité à droite de D, $|D_S| \geq a$ tandis que $|D_{S-}| \leq a$; en fait, D est continu en S et $|D_S| = a$. Soit alors

$$T = \inf\left\{t > S \mid |D_t| \leq \tfrac{1}{2}a\right\}.$$

Comme $|D_\infty| = 0$, on a $S < T < \infty$ et $T \in \mathrm{Supp}^g(D)$;

D est continu sur $]S,T[$; $|D_T| = \frac{1}{2}|a|\, 1_{\{\Delta D_T \neq 0\}}$; T est prévisible.

En outre, $\int_{]S,T]} |dD_s^c| \neq 0$:
en effet, par définition de S, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r \in \,]S, S+\varepsilon[$, $|D_r| > a$, soit :

$$\begin{aligned} 0 < (D_r^2 - D_S^2) &= 2\int_{]S,r]} D_{s-}dD_s^c - [D,D]_r + [D,D]_S \\ &= 2\int_{]S,r]} D_{s-}dD_s^c \text{ si } r < T \ \square \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le

Théorème 3 *Soit C un processus prévisible, à variation finie, nul en 0. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) C n'est pas de type injectif ;

2) C vérifie l'une des deux propriétés :

$(\neg\alpha)$ il existe un temps d'arrêt S tel que l'ensemble

$$]S,\infty[\, \cap \,\mathrm{Supp}^g(C)$$

n'est pas évanescent et admet une section complète par un temps d'arrêt prévisible T tel que $]S,T[\, \cap \,\mathrm{Supp}^g(C)$ ne soit pas évanescent ;

$(\neg\beta)$ il existe un temps d'arrêt prévisible S tel que $\Delta C_S \neq 0$ sur $\{S < \infty\}$ et que l'ensemble

$$]S,\infty[\, \cap \{\Delta C \neq 0\}$$

n'est pas évanescent et a une section complète par un temps d'arrêt prévisible.

Démonstration. *1)* D'après la proposition *18*, si C vérifie $(\neg\alpha)$, il n'est pas de type injectif. De même, si C vérifie $(\neg\beta)$, il existe des temps d'arrêt prévisibles S et T avec

$$S < T < \infty,\ \Delta C_S \neq 0,\ \Delta C_T \neq 0 \text{ sur } \{S < \infty\} \ ;$$

soit Z le processus prévisible $Z = 1_{[S]} - \frac{\Delta C_S}{\Delta C_T} 1_{[T]}$; on a immédiatement :

$$\int_{]0,\infty[} |Z_s|\,|dC_s| = 2\,|\Delta C_S|\,, \ \int_{]0,\infty[} Z_s\,dC_s = 0 \text{ et } \int_{]0,S]} |Z_s|\,|dC_s| = |\Delta C_S|\,,$$

et C ne vérifie pas la propriété d'injectivité.

2) Inversement, si C n'a pas la propriété d'injectivité, il existe un processus prévisible Z avec

$$\int_{]0,\infty[} |Z_s|\ |dC_s| < \infty, \ \int_{]0,\infty[} Z_s\,dC_s = 0 \text{ et } D = Z \cdot C \neq 0.$$

Soit $D = Z \cdot C$; d'après le théorème de section [prévisible], il existe un temps d'arrêt S [prévisible] tel que :

$$\mathbb{P}[S < \infty] > 0 \text{ et } D_S \neq 0 \text{ sur } \{S < \infty\}\,.$$

Sur $\{S < \infty\}$,

$$1 = \frac{-1}{D_S} \int_{]S,\infty[} Z_s\,dC_s \leq \frac{1}{|D_S|} \int_{]S,\infty[} |Z_s|\,|dC_s|\,.$$

D'après la proposition *18*, il existe un temps d'arrêt prévisible T tel que

$$S < T < \infty \text{ sur } \{S < \infty\} \text{ et } [T] \subseteq \mathrm{Supp}^g(D) \subseteq \mathrm{Supp}^g(C) \ ;$$

▷ Si $]S,T[\, \cap \mathrm{Supp}^g(C)$ n'est pas évanescent, C vérifie la condition $(\neg\alpha)$.

▷ Sinon $]S,T[\, \cap \mathrm{Supp}^g(C)$ est évanescent, T est un temps de saut de D (et donc de C).

- Si $\{\Delta D \neq 0\} \subseteq \{D = 0\}$, il résulte du lemme *21* que C vérifie $(\neg\alpha)$.

- Sinon, $\{\Delta D \neq 0,\ D \neq 0\}$ est non évanescent et on peut choisir le temps d'arrêt S tel que

$$D_S \neq 0,\ \Delta D_S \neq 0 \text{ sur } \{S < \infty\}\,.$$

D (ou C) vérifie alors la condition $(\neg\beta)$ □

Remarques 22

Soit H un fermé gauche prévisible. H est le support gauche d'un processus croissant prévisible ne vérifiant pas la propriété d'injectivité si et seulement si il existe des temps d'arrêt prévisibles S et T avec $\mathbb{P}[S < \infty] > 0$ et, sur $\{S < \infty\}$,

$$S < T < \infty,\ S \in H,\ T \in H.$$

La condition est manifestement suffisante (prendre $1_{[S,\infty[} - 1_{[T,\infty[}$). Inversement, soit D un processus à variation finie, prévisible, nul en 0, tel que :

$$\int_{]0,\infty[} |dD_s| < \infty,\ D_\infty = 0,\ \mathbb{P}\left[\int_{]0,\infty[} |dD_s| > 0\right] \neq 0\,;$$

$\{D \neq 0\} \cap \mathrm{Supp}^g(D)$ est non évanescent ; il existe donc un temps d'arrêt prévisible S avec

$$\mathbb{P}[S < \infty] > 0 \text{ et } D_S \neq 0,\ S \in \mathrm{Supp}^g(D) \text{ sur } \{S < \infty\} \ ;$$

la proposition *18* fournit T □

D'après le théorème *3*, si C est un processus croissant, prévisible, nul en 0, de type injectif, tout processus croissant *continu* γ tel que

$$\mathrm{Supp}^g(\gamma) \subseteq \mathrm{Supp}^g(C)$$

est encore de type injectif. On a l'amélioration suivante :

Théorème 23 *Soit Y un processus prévisible à variation finie et τ une fin d'ensemble prévisible ; soit B la projection duale prévisible de $1_{\{0<\tau\leq \cdot\}}$ et λ le début de* $\mathrm{Supp}^g(B)$ *; supposons que sur $\{0<\tau<\infty\}$,*

$$Y_\tau = 0 \textit{ et } \mathrm{Supp}^g(Y) \cap]\lambda, \infty[\subseteq \mathrm{Supp}^g(B).$$

Alors, sur $\{0<\tau<\infty\}$, on a presque sûrement :

$$\forall t \geq \lambda,\ Y_t = 0.$$

En conséquence, si $0<\tau<\infty$ presque sûrement, tout processus prévisible à variation finie, dont le support est contenu dans $\mathrm{Supp}^g(B)$ *a la propriété d'injectivité.*

Démonstration. *1*) $Y_\tau = 0$ sur $\{0<\tau<\infty\}$ équivaut à $Y \cdot B = 0$;
ainsi, pour Z prévisible, on a :

$$0 = (ZY)\cdot B = Y \times (Z \cdot B) - \left((Z\cdot B)_- \cdot Y\right)$$

et finalement,

$$\left((Z\cdot B)_- \cdot Y\right)_\tau = 0 \text{ sur } \{0<\tau<\infty\}.$$

Comme dans la démonstration du lemme *6*, on obtient aussi :

$$\forall Z \text{ prévisible}, \int_{]0,\tau]} 1_{\{(Z\cdot B)_{s-}>0\}}\, dY_s = 0 \text{ sur } \{0<\tau<\infty\}.$$

Comme $\mathrm{Supp}^g(Y) \subseteq]0,\tau]$, on a aussi, pour tout Z prévisible,

$$\int_{]0,\infty[} 1_{\{(Z\cdot B)_{s-}>0\}}\, dY_s = 0 \text{ sur } \{0<\tau<\infty\}.$$

2) Soit S un temps d'arrêt prévisible et $Z = 1_{[S]}$;

$$(Z\cdot B)_- = \Delta B_S 1_{]S,\infty[} \quad \text{et} \quad \left\{(Z\cdot B)_- > 0\right\} = \{\Delta B_S > 0\} \cap]S, \infty[\;;$$

ainsi,

$$Y_S = 0 \text{ sur } \{\Delta B_S > 0,\, 0<\tau<\infty\}.$$

Soit M la martingale de variable terminale $M_\infty = 1_{0<\tau<\infty}$; le processus $Y 1_{\{\Delta B>0\}} M_-$, qui est la projection prévisible de$Y 1_{\{\Delta B>0\}} 1_{\{0<\tau<\infty\}}$, est donc évanescent ; en particulier sur $\{0<\tau<\infty\}$, puisque M_- ne s'annule pas, on a :

$$Y = 0 \text{ sur } \{\Delta B > 0\}.$$

3) Soit R un temps d'arrêt avec $R \geq \lambda$ et $H = 1_{]R,\infty[}$;

$$(H \cdot B)_{t-} = (B_{t-} - B_R)\, 1_{\{R<t\}} \ ;$$

si $\delta_r = \inf\{t > r \mid B_t > B_r\}$, on a

$$\Big\{(H \cdot B)_- > 0\Big\} =]\delta_R, \infty[\ ;$$

plaçons nous sur $\{0 < \tau < \infty\}$; par *1*), on a : $Y_{\delta_R} = 0$; de plus,

$$]R, \delta_R[\cap \mathrm{Supp}^g(B) = \emptyset \Rightarrow Y \text{ est constant sur } [R, \delta_R[\ ;$$

enfin, soit $\delta_R \notin \mathrm{Supp}^g(B)$, ou δ_R est un temps de saut de B ;
compte tenu de *2*), dans les deux cas $Y = 0$ sur $[R, \delta_R]$ et

$$Y_R = 0 \text{ presque sûrement sur } \{0 < \tau < \infty\}.$$

4) Ainsi, par projection optionnelle, $Y 1_{[\lambda,\infty[} M = 0$. Sur $\{0 < \tau < \infty\}$, puisque M ne s'annule pas, on a $Y 1_{[\lambda,\infty[} = 0$ □

On a une réciproque partielle du corollaire *20* dans le cas saturé, propriété dont il n'est pas inutile de rappeler la définition (pour une étude approfondie, voir [AY1] ou [AMY]) :

Définition 24 *Un fermé optionnel M est saturé si : $\forall R$ temps d'arrêt,*

$$\text{sur } \{R < \infty,\ R \notin M\},\ \mathbb{P}[M \cap]R, \infty[\neq \emptyset \mid \mathcal{G}_R] < 1.$$

Proposition 25 *Soit Γ un processus prévisible, à variation finie, nul en* 0. *On suppose que son support est saturé. Γ a la propriété d'injectivité si et seulement si les ouverts prévisibles contenus dans* Supp (Γ) *sont évanescents.*

Démonstration. D'après le corollaire *20*, il suffit d'établir que si Γ n'est pas de type injectif, $\overline{H} = \mathrm{Supp}(\Gamma)$ contient un ouvert prévisible, non évanescent. Or, si Γ n'est pas de type injectif, il existe un processus prévisible Z avec

$$\int_{]0,\infty[} |Z_s|\ |d\Gamma_s| < \infty,\ D = Z \cdot \Gamma \neq 0 \text{ et } D_0 = D_\infty = 0.$$

Si S est un temps d'arrêt prévisible tel que $\mathbb{P}[S < \infty] > 0$ et $D_S \neq 0$ sur $\{S < \infty\}$, il existe un temps d'arrêt prévisible T avec

$$S < T < \infty \text{ et } T \in \mathrm{Supp}^g(D) \subseteq \overline{H} \text{ sur } \{S < \infty\}.$$

$[S, T[\cap \overline{H}^c$ est évanescent ; sinon, il existerait un temps d'arrêt R avec

$$\mathbb{P}[R < \infty] > 0 \text{ et, sur } \{R < \infty\},\ S \leq R < T,\ R \notin \overline{H} \ ;$$

on aurait ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[R < \infty] &= \mathbb{P}\left[S \leq R < T,\ R \notin \overline{H}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[S \leq R < T,\ R \notin \overline{H},\ T \in H\right] \\ &\underset{\substack{\text{conditionnement} \\ \text{par rapport à } \mathcal{G}_R}}{<} \mathbb{P}[R < \infty]. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\overline{H} \supseteq [S,T] \supseteq]S,T[,$$

qui est un ouvert prévisible non évanescent □

Par ailleurs, on a le résultat suivant qui complète la proposition *16* :

Proposition 26 *Soit L une fin d'ensemble prévisible, presque sûrement finie et telle que*

$$\forall R \textit{ temps d'arrêt prévisible, } \mathbb{P}[L = R > 0] = 0.$$

Soit A la projection duale prévisible de $1_{\{0<L\leq \cdot\}}$ (A est continu). Soit W un processus prévisible, à variation finie, nul en 0, et tel que

$$\mathrm{Supp}^g(W) \subseteq]0,L].$$

Si W est de type injectif, $W + A$ est aussi de type injectif.

Démonstration. Soit $Z = {}^o\left(1_{]0,L]}\right)$. Pour tout temps d'arrêt S, sur $\{S < \infty\}$ la loi de $A_\infty - A_S$ conditionnellement à $\mathcal{G}_S$ est

$$(1 - Z_S)\,\delta_0 + Z_S 1_{\{t>0\}} e^{-t} dt$$

(voir [A] ou [J]-proposition *3.28*). Supposons que $Y = W + A$ n'ait pas la propriété d'injectivité. Appliquons le théorème *3*. A étant continu, $\Delta Y = \Delta W$; si la condition $(\neg\beta)$ est vérifiée, W n'est pas injectif. Sinon la condition $(\neg\alpha)$ est vérifiée et il existe un temps d'arrêt S tel que $\mathrm{Supp}^g(Y) \cap]S,\infty[$ soit non évanescent et ait une section complète par un temps d'arrêt prévisible T avec

$$\mathrm{Supp}^g(Y) \cap]S,T[\text{ non évanescent.}$$

Sur $\{S < \infty\}$, on a donc :

▷ $S < T \leq L$ et $T \in \mathrm{Supp}^g(Y)$;

▷ $Z_T = 1$ et $A_\infty - A_T$ est indépendant de $\mathcal{G}_T$, de loi exponentielle de paramètre 1, i.e.

$$\forall p \geq 0,\ \mathbb{E}\left[e^{-p(A_\infty - A_T)} \mid \mathcal{G}_T\right] = \tfrac{1}{p+1} ;$$

▷ $Z_S = 1$ et $A_\infty - A_S$ est indépendant de $\mathcal{G}_S$, de loi exponentielle de paramètre 1, i.e.

$$\forall p \geq 0,\ \mathbb{E}\left[e^{-p(A_\infty - A_S)} \mid \mathcal{G}_S\right] = \tfrac{1}{p+1}.$$

Par suite, sur $\{S < \infty\}$, $\forall p \geq 0$,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{p+1} &= \mathbb{E}\left[e^{-p(A_\infty - A_S)} \mid \mathcal{G}_S\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{-p(A_\infty - A_T)} e^{-p(A_T - A_S)} \mid \mathcal{G}_T\right] \mid \mathcal{G}_S\right] \\ &= \tfrac{1}{p+1}\mathbb{E}\left[e^{-p(A_T - A_S)} \mid \mathcal{G}_S\right],\end{aligned}$$

soit :

$$\mathbb{P}[A_T - A_S = 0 \mid S < \infty] = 1,$$

si bien que $T \in \mathrm{Supp}^g(W)$ et

$$\mathrm{Supp}^g(W) \cap]S,T[= \mathrm{Supp}^g(Y) \cap]S,T[\text{ est non évanescent.}$$

Toujours d'après le théorème *3*, W n'a pas la propriété d'injectivité □

5 Exemples.

Nous donnons maintenant des exemples "concrets". Dans tout ce paragraphe X est un $\mathcal{G}$-mouvement brownien nul en 0 ; $(L_t^x)_{(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}$ est la famille bicontinue de ses temps locaux ; pour $y \in \mathbb{R}$,

$$T_y = \inf\{t \mid X_t = y\}.$$

La projection duale prévisible du processus croissant $1_{[g,\infty[}$ où

$$g = \sup\{t < 1 \mid X_t = 0\},$$

est

$$A_t = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_0^{t\wedge 1} \tfrac{1}{\sqrt{1-s}}\, dL_s^0.$$

Ainsi, $(A_t)_{t\geq 0}$ et par conséquent (par absolue continuité) $(L_{t\wedge 1}^0)_{t\geq 0}$ sont de type injectif. Plus généralement,

Proposition 27 *Soit* $0 \leq a < b$ *;* $C = L_{.\wedge a}^0$ *et* $D = 1_{[a,\infty[}\left(L_{.\wedge b}^{X_a} - L_a^{X_a}\right)$ *ont la propriété d'injectivité, de même que* $C + D$.

Démonstration. Soit pour $0 \leq a < b$, $\gamma_{a,b} = \sup\{s \leq b \mid X_s = X_a\}$;
la projection duale prévisible de $1_{[\gamma_{a,b},\infty[}$ est

$$t \to 1_{\{a\leq t\}}\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_a^{t\wedge b} \tfrac{1}{\sqrt{b-s}}\, dL_s^{X_a} \ ;$$

les injectivités annoncées résultent de la proposition *16*. On notera que $C + D$ a pour support

$$\{t \in [0,a] \mid X_t = 0\} \cup \{t \in]a,b] \mid X_t = X_a\}$$

et que la connaissance de la fin du support de $C + D$ (soit $\gamma_{a,b}$) ne peut fournir de renseignements que sur $\{t \in]a,b] \mid X_t = X_a\}$ □

On peut se demander quelles sont les fonctionnelles additives continues, à variation bornée, du mouvement brownien qui, arrêtées en $t = 1$, sont de type injectif. On a la réponse suivante :

Théorème 4 *Soit* μ *une mesure de Radon sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$V_t = \int_{\mathbb{R}} L_{t\wedge 1}^x \, d\mu(x) \ ;$$

V a la propriété d'injectivité si et seulement si le support de μ est d'intérieur vide.

Démonstration. Soit F le support de la mesure μ (supposée non nulle) ;

$$\operatorname{Supp}(V) = \{t \in [0,1],\ X_t \in F\} \ ;$$

$\operatorname{Supp}(V)$ est saturé : soit R un temps d'arrêt et $]u,v[$ une composante connexe de F^c. Sur l'ensemble $\{R < \infty,\ u < X_R < v\}$, on a :

$$\mathbb{P}[\exists g \in]R,1],\ X_g \in F \mid \mathcal{G}_R] \leq \mathbb{P}[\exists g \in]R,1],\ X_g \notin]u,v[\mid \mathcal{G}_R] < 1$$

si bien que :

$$\mathbb{P}\left[\exists g \in \left]R,1\right],\ X_g \in F \mid \mathcal{G}_R\right] < 1 \text{ sur } \{R < \infty,\ X_R \notin F\}.$$

Si $\mathcal{X}$ est la filtration (dûment complétée) engendrée par X, les tribus $\mathcal{X}$-prévisible et $\mathcal{X}$-optionnelle coïncident ; l'intérieur J de Supp (V) est donc $\mathcal{X}$-prévisible et par suite $\mathcal{G}$-prévisible ; d'après la proposition *25*, V a la propriété d'injectivité si et seulement si J est évanescent. Soit $\breve{F}$ l'intérieur de F ; comme

$$J \supseteq \left\{t \in [0,1[,\ X_t \in \breve{F}\right\},$$

si J est évanescent on a, par exemple, $\mathbb{P}\left[X_{\frac{1}{2}} \in \breve{F}\right] = 0$, soit $\breve{F} = \emptyset$.

Inversement, si J n'est pas évanescent, soit R un temps d'arrêt tel que :

$$\mathbb{P}[R < 1] > 0 \text{ et } R \in J \text{ sur } \{R < 1\} \ ;$$

soit $R' = \inf\{t > R \mid t \notin J\}$; on a presque sûrement sur $\{R < 1\}$,

$$R = \inf\{t > R \mid X_t > X_R\} = \inf\{t > R \mid X_t < X_R\} < R'$$

et, par continuité de X, F contient l'intervalle (non vide)

$$\left]\inf_{R \le t < R'} X_t, \sup_{R \le t < R'} X_t\right[\qquad \square$$

Pour $x \in \left]-\infty, 1\right[$, $\frac{1}{2(1-x)} L^x_{t\wedge T_1}$ est la projection duale prévisible de $1_{\{0<\gamma_x \le \cdot\}}$ où

$$\gamma_x = \sup\{t \le T_1 \mid X_t = x\}.$$

C'est donc un processus de type injectif, porté par l'ensemble fermé, non saturé $\{t \le T_1 \mid X_t = x\}$ (son saturé est $\{t \le T_1 \mid X_t \le x\}$).

Proposition 28 *Soit ν une mesure de Radon positive sur $\left]-\infty, 1\right[$ et*

$$K^\nu_t = \int L^x_{t\wedge T_1}\, d\nu(x).$$

1) Si ν est une mesure à support fini, K^ν est de type injectif.
2) S'il existe une suite (a_n) strictement croissante dans Supp(ν), K^ν n'est pas de type injectif.
3) Si Supp(ν) $= (b_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ où (b_n) est une suite décroissante (strictement) dans $\left]-\infty, 1\right[$, K^ν a la propriété d'injectivité.

Démonstration. 1) $a < b < 1 \Rightarrow \gamma_a \le \gamma_b$; on déduit de la proposition *26* que

$$t \to L^a_{t\wedge T_1} + L^b_{t\wedge T_1}$$

est de type injectif ; si ν est une mesure à support fini $a_0 < a_1 < \ldots < a_n < 1$, on montre par récurrence - puisque $\mathrm{Supp}^g\left(\sum_{0\le j<n} L^{a_j}_{t\wedge T_1}\right) \subseteq [0, \gamma_{a_n}]$ - qu'il en est de même de K^ν.

2) Supposons qu'il existe une suite (a_n) strictement croissante dans Supp(ν) et soit $a_\infty = \sup_n a_n$; sur $\{T_{a_0} < T_1\}$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ L^{a_n}_{T_{a_\infty}} - L^{a_n}_{T_{a_0}} > 0$$

et il existe une suite (u_n) de réels positifs avec $\sum_n u_n \left(L^{a_n}_{T_{a_\infty}} - L^{a_n}_{T_{a_0}}\right) = \infty$;

$$R = \inf\left\{s > T_{a_0} \mid \sum\nolimits_{n\geq 0} u_n \left(L^{a_n}_t - L^{a_n}_{T_{a_0}}\right) \geq 1\right\}$$

est tel que le processus

$$1_{\{T_{a_0}<T_1\}} \sum\nolimits_{n\geq 0} u_n \left(L^{a_n}_{t\wedge R} - L^{a_n}_{T_{a_0}}\right)$$

n'a pas la propriété d'injectivité. D'après le théorème *2*, K^ν n'a pas non plus la propriété d'injectivité.

3) Supposons enfin : Supp$(\nu) = (b_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ où (b_n) est une suite décroissante†[8] (strictement) dans $]-\infty, 1[$. Si K^ν n'était pas injectif, il existerait des temps d'arrêt S et T tels que $\mathbb{P}[S < \infty] > 0$ et,

$$\text{sur } \{S < \infty\},\ S < T < T_1,\ T \in \text{Supp}^g(K^\nu).$$

Toujours sur $\{S < \infty\}$ on a

$$X_T \in \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ et } T < \gamma_{b_0} = \sup\{t < T_1 \mid X_t = b_0\} \ ;$$

la projection duale prévisible de $1_{\{\gamma_{b_0}\leq \cdot\}}$ est $\frac{1}{2(1-b_0)} L^{b_0}_{t\wedge T_1}$ et, comme dans la démonstration de la proposition *26*, on obtient :

$$]S, T] \cap \text{Supp}^g\left(L^{b_0}\right) = \emptyset.$$

La condition : $T \in \text{Supp}^g(K^\nu)$ a pour conséquence :

$$\mathbb{P}[S < \infty,\ X_T = b_0] = 0.$$

Par récurrence, on a : $\forall n,\ \mathbb{P}[S < \infty,\ X_T = b_n] = 0$ ...!
Ainsi, K^ν a la propriété d'injectivité □

Proposition 29 *Soit ν une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}$; on suppose qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) de réels de Supp(ν), (a_n) étant strictement croissante et (b_n) strictement décroissante, de limites respectives a_∞ et b_∞ vérifiant $b_\infty < 0 < a_\infty$.*

$$t \rightarrow \int L^x_{t\wedge T_{a_\infty}\wedge T_{b_\infty}}\, d\nu(x)$$

ne vérifie pas la propriété d'injectivité.

[8] Le cas $\inf_n b_n = -\infty$ n'est pas exclu.

Démonstration. Soit en effet pour y, $x \in]b_\infty, a_\infty[$, avec $y < 0 < x$,

$$\gamma_{x,y}^{a_\infty, b_\infty} = \sup \{t \leq T_{a_\infty} \wedge T_{b_\infty} \mid X_t \in \{x, y\}\} \ ;$$

la surmartingale d'équilibre associée à $\gamma_{x,y}^{a_\infty, b_\infty}$ est $\phi\left(X_{t \wedge T_{a_\infty} \wedge T_{b_\infty}}\right)$ où

$$\phi(u) = 1_{\{u \leq y\}} \frac{u - b_\infty}{y - b_\infty} + 1_{\{y < u \leq x\}} + 1_{\{x \leq u\}} \frac{a_\infty - u}{a_\infty - x} \ ;$$

la projection duale prévisible de $1_{\left\{0 < \gamma_{x,y}^{a_\infty, b_\infty} \leq \cdot\right\}}$ est donc le processus :

$$t \to \frac{1}{2(y - b_\infty)} L^y_{t \wedge T_{a_\infty} \wedge T_{b_\infty}} + \frac{1}{2(a_\infty - x)} L^x_{t \wedge T_{a_\infty} \wedge T_{b_\infty}}.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $b_n < 0 < a_n$

$$\frac{1}{2(b_n - b_\infty)} L^{b_n}_{T_{a_\infty} \wedge T_{b_\infty}} + \frac{1}{2(a_\infty - a_n)} L^{a_n}_{T_{a_\infty} \wedge T_{b_\infty}}$$

suit une loi exponentielle de paramètre 1 et est presque sûrement strictement positive. Il existe donc des suites (u_n) et (v_n) de réels positifs avec

$$\sum\nolimits_n u_n L^{b_n}_{T_{a_\infty} \wedge T_{b_\infty}} + \sum\nolimits_n v_n L^{a_n}_{T_{a_\infty} \wedge T_{b_\infty}} = \infty.$$

Le temps d'arrêt R défini par

$$R = \inf \left\{t \mid \sum\nolimits_n u_n L^{b_n}_t + \sum\nolimits_n v_n L^{a_n}_t \geq 1\right\}$$

est majoré par $T_{a_\infty} \wedge T_{b_\infty}$ et

$$t \to \sum\nolimits_n u_n L^{b_n}_{t \wedge R} + \sum\nolimits_n v_n L^{a_n}_{t \wedge R}$$

n'est pas de type injectif. Le théorème *2* permet à nouveau de conclure □

Corollaire 30 *La somme de deux processus de type injectif n'est pas nécessairement un processus de type injectif.*

Démonstration. Avec les notations de la proposition *29*, le processus

$$t \to \sum\nolimits_n u_n L^{b_n}_{t \wedge R} + \sum\nolimits_n v_n L^{a_n}_{t \wedge R}$$

n'a pas la propriété d'injectivité, contrairement (appliquer la proposition *28-3*)) aux processus

$$t \to \sum\nolimits_n u_n L^{b_n}_{t \wedge R} \quad \text{et} \quad t \to \sum\nolimits_n v_n L^{a_n}_{t \wedge R} \quad \square$$

6 Représentations de variables aléatoires.

Revenons sur les propriétés de densité *3*) et *4*) du théorème *1* : dans tout le paragraphe, L est fin d'un ensemble prévisible, telle que $\mathbb{P}[0 < L < \infty] = 1$; A est la projection duale prévisible de $1_{\{0<L\leq \cdot\}}$. Comparons d'abord les deux sous-ensembles denses dans $L^2(\mathcal{G}_{L-})$

$$\left\{(U \cdot A)_\infty \mid U \text{ prévisible, } U_L \in L^2\right\} \text{ et } \mathcal{M}^2_{L-} = \left\{X_{L-} \mid X \in L^2(\mathcal{G}_\infty)\right\}.$$

Notons, pour $t \geq 0$,

$$\lambda_t = \sup\{s \leq t \mid s \in \text{Supp}^g(A)\}$$

et désignons par Z^L la projection optionnelle de $1_{]0,L]}$; $M^L = Z^L - 1 + A$ est une martingale (de $\mathcal{BMO}(\mathcal{G})$).

Soit U un processus prévisible, borné ; A étant porté par $\left\{Z^L_- = 1\right\}$, d'après la formule de balayage (voir la remarque *9-2*)),

$$U_{\lambda_t}\left(1 - Z^L_t\right) = -\int_{]0,t]} U_{\lambda_s}\, dM^L_s + (U \cdot A)_t$$

$U_\lambda \cdot M^L$ est une martingale de variable terminale $U_L - (U \cdot A)_L$. En utilisant l'inégalité de Doob et le lemme *13*, on a, pour $r > 1$,

$$\left\|\sup_t \left|\left(U_\lambda \cdot M^L\right)_t\right|\right\|_r \leq \frac{r^2}{r-1} \|U_L\|_r$$

inégalité se prolongeant à U prévisible quelconque. Ainsi,

$$\left(1 - Z^L_{t-}\right) U_{\lambda_t} - \int_{]0,t[} U_s\, dA_s = -\left(U_\lambda \cdot M^L\right)_{t-}$$

et

$$(U \cdot A)_{L-} = \left(U_\lambda \cdot M^L\right)_{L-}.$$

$\left\{\int_{]0,L]} U_s\, dA^c_s \mid U \text{ prévisible avec } U_L \in L^2\right\}$ est donc contenu dans $\mathcal{M}^2_{L-}$.
La réciproque est en général fausse, comme le montre l'exemple suivant :
X est un mouvement brownien réel, Y un processus de Poisson indépendant de X. $\mathcal{G}$ est la filtration (dûment complétée) engendrée par le processus (X, Y) et

$$L = \inf\{t \mid Y_t = 1\}.$$

On a : $A_t = \inf(t, L)$. X_L n'est pas de la forme $\int_0^L U_s\, ds$ pour un processus $\mathcal{G}$-prévisible U avec $\int_0^L |U_s|\, ds < \infty$ (sinon X serait à variation finie ...).
Dans le cas général,

$$(U \cdot A)_\infty \in \mathcal{M}^2_{L-} \Leftrightarrow U_L \Delta A_L \in \mathcal{M}^2_{L-}.$$

Une condition équivalente est : $(U\Delta A) \cdot A = X_- \cdot A$ ou,

$$U\Delta A = X_- \text{ sur } \{\Delta A \neq 0\} \text{ et } X_- = 0 \text{ sur } \text{Supp}^g(A^c) ;$$

en particulier, on doit avoir $U_L = 0$ sur $\{\Delta A_L \neq 0\}$ si L n'est pas isolé dans $\{\Delta A \neq 0\}$. Le lecteur se convaincra en utilisant l'exemple de Dellacherie [D] que toutes les situations sont possibles pour

$$\mathcal{M}^2_{L-} \cap \left\{\sum\nolimits_{0<s} U_s \,\Delta A_s \mid U \text{ prévisible, } U_L \in L^2\right\}.$$

Pour C processus prévisible à variation finie (nul en 0), on cherche à étudier l'appartenance de certaines variables à l'ensemble

$$\mathcal{J}_C = \left\{(U \cdot C)_\infty \mid U \text{ prévisible, } \int_{]0,\infty[} |U_s| \, |dC_s| < \infty\right\}.$$

Supposons dorénavant A *continu* (en conséquence λ est continu à gauche) et apportons quelques précisions sur $\mathcal{J}_A$. D'après la proposition 15, les supports des lois des variables de $\mathcal{J}_A$ sont des intervalles contenant 0 ; il est donc facile d'exhiber des variables $\mathcal{G}_{L-}$ mesurables qui ne sont pas dans $\mathcal{J}_A$, par exemple $1_{\{A_\infty>1\}}$ (on rappelle que A_∞ suit une loi exponentielle). Un exemple moins trivial est le suivant : soit ν une mesure bornée sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{R}_+)$, diffuse, étrangère à la mesure de Lebesgue ; le processus $N = \nu\,[\,[0, A]\,]$ est étranger à A, de type injectif ; ainsi $\mathcal{J}_N \cap \mathcal{J}_A$ est réduit à 0.

De façon plus précise, soit C un processus croissant, *continu*, prévisible, avec

$$\mathrm{Supp}^g(C) \subseteq \mathrm{Supp}^g(A) \;;$$

soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $h(C_\infty) \in \mathcal{J}_C$; soit Z un processus prévisible, avec $\int_0^\infty |Z_s| \, dC_s < \infty$, et $h(C_\infty) = (Z \cdot C)_\infty$; le fermé prévisible

$$\{t \mid h(C_t) = (Z \cdot C)_t\},$$

contenant $[L]$, contient aussi $\mathrm{Supp}(A)$ et $h(C) = (Z \cdot C)$ sur $\mathrm{Supp}(C)$. Ainsi $h(0) = 0$ et, avec $\tau_v = \inf\{t > 0 \mid C_t > v\}$, on a, sur $\{C_\infty > v\}$:

$$h(v) = h(C_{\tau_v}) = (Z \cdot C)_{\tau_v} = \int_0^v Z_{\tau_s} \, ds \;;$$

le support de la loi de C_∞ est un intervalle I contenant 0 et la fonction h est donc absolument continue sur I.

Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\varphi(L)$ appartienne à $\mathcal{J}_A$. Il existe donc Z prévisible avec $\int_0^\infty |Z_s| \, dA_s < \infty$ et $\varphi(L) = (Z \cdot A)_\infty$; comme ci-dessus on a presque sûrement

$$\forall t \in \mathrm{Supp}(A), \;(Z \cdot A)_t = \varphi(t) = \varphi(\lambda_{t+}),$$

si bien que $t \to \varphi(\lambda_{t+})$ est à variation finie, et est absolument continu par rapport à A (donc continu) ; en particulier,

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } \sum\nolimits_t |\varphi(\lambda_{t+}) - \varphi(\lambda_t)| = 0 \;;$$

Comme pour tout $t > 0$,

$$\lambda_{t+} > \lambda_t \Leftrightarrow \lambda_t < t \in \mathrm{Supp}(A),$$

si Supp $(A) \neq [0, L]$ avec probabilité positive, $\varphi(L) \notin \mathcal{J}_A$ si φ est une fonction continue strictement croissante. Plaçons nous à nouveau dans le cadre brownien du paragraphe *5*, et prenons

$$L = g_1 = \sup\{s \leq 1 \mid X_s = 0\}.$$

Alors, pour $t \in [0,1]$, $\lambda_t = g_t = \sup\{s < t \mid X_s = 0\}$ suit la loi de l'arc-sinus sur $[0,t]$; si $t \to \varphi(g_{t+})$ est continue sur $[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}\left[\sum_{0<s<1} |\varphi(g_{s+}) - \varphi(g_s)|\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{0<s<1} 1_{\{g_s<s\}} \frac{|\varphi(s) - \varphi(g_s)|}{(s-g_s)} \Delta g_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 \frac{|\varphi(s) - \varphi(g_s)|}{2(s-g_s)} 1_{\{g_s<s\}}\, ds\right], \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de la propriété de martingale de $\left(g_{t+} - \frac{t}{2},\, t \geq 0\right)$ (pour un développement systématique du calcul stochastique relatif à la martingale d'Azéma, voir par exemple [AY2]).

Ainsi $\displaystyle\int_{0<y<u<1} |\varphi(u) - \varphi(y)|\, dudy = 0$ et φ est constante.

Finalement, si φ est continue sur $[0,1]$, non identiquement nulle, $\varphi(g_1) \notin \mathcal{J}_A$.

Bibliographie.

[A] AZEMA J. : Quelques applications de la théorie générale des processus. Inventiones Math. 18,293-336,1972.

[AY1] AZEMA J., YOR M : Sur les zéros des martingales continues. Séminaire de Probabilités XXVI, Lect. Notes in Math.1526, 248-306, Springer 1992.

[AY2] AZEMA J., YOR M : Etude d'une martingale remarquable. Séminaire de Probabilités XXVI, Lect. Notes in Math.1526, 248-306, Springer 1992.

[AJKY] AZEMA J., JEULIN T., KNIGHT F.B., YOR M : Le théorème d'arrêt en une fin d'ensemble prévisible. Séminaire de Probabilités XXVII, Lect. Notes in Math.1557, 133-158, Springer 1993.

[AMY] AZEMA J., MEYER P.A., YOR M. : Martingales relatives. Séminaire de Probabilités XXIII, Lect. Notes in Math.1372, 88-130, Springer 1989.

[D] DELLACHERIE C. : Un exemple de la théorie générale des processus. Séminaire de Probabilités IV. Lect. Notes in Math. 124, 60-70, Springer 1970.

[DM] DELLACHERIE C., MEYER P.A. : Probabilités et potentiel. Chapitres V à VIII. Théorie des martingales. Hermann, 1980.

[DMM] DELLACHERIE C., MAISONNEUVE B., MEYER P.A. : Probabilités et potentiel. Chapitres XVII à XXIV. Processus de Markov (fin). Compléments de Calcul stochastique. Hermann, 1992.

[DMSSS] DELBAEN S., MONAT P., SCHACHERMAYER W., SCHWEIZER M., STRICKER C. : Weighted norm inequalities and closedness of a space of stochastic integrals. Preprint, 1996. A paraître dans Finance and Stochastics.

[J] JEULIN T. : Semi-martingales et grossissement d'une filtration. Lect. Notes in Math.833, Springer 1980.

7 Appendices.

Dans la section *7.1*, on rassemble des résultats sur les fermés gauches. Dans la section *7.2*, on présente des variantes des résultats du paragraphe *3*.

7.1 Compléments sur les fermés gauches.

Soit M un ensemble progressif. Avec la convention $\sup(\emptyset) = -\infty$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ les processus croissants :

$$\begin{aligned} L_t^M &= \sup\{s < t \mid s \in M\}, \\ \tilde{L}_t^M &= \sup\left(L_t^M, t1_M(t)\right), \\ \ell_t^M &= \sup\{s < t \mid M \cap [s,t] \text{ n'est pas dénombrable}\}. \end{aligned}$$

On a $\ell_t^M \leq L_t^M = \tilde{L}_{t-}^M$.

▷ L^M est adapté, continu à gauche, donc prévisible et

$$\overline{M}^g = \left\{t \geq 0 \mid \tilde{L}_t^M = t\right\},$$

l'adhérence de M pour la topologie gauche sur $\mathbb{R}_+$ est progressive ; si M est de plus optionnel (resp. prévisible), $\overline{M}^g$ est optionnel (resp. prévisible).

$$\overline{M} = \left\{t \geq 0 \mid L_{t+}^M = t\right\},$$

l'adhérence de M pour la topologie usuelle est optionnelle.

$$\overline{M} - \overline{M}^g = \left\{t \mid L_{t+}^M = t > \tilde{L}_t^M\right\}$$

est à coupes [au plus] dénombrables (il est optionnel si M est optionnel).

▷ Soit $F \subseteq \mathbb{R}_+$ un ensemble fermé sans point isolé (i.e. un ensemble *parfait*). Comme conséquence du théorème de Baire, on a :

$$\forall x \in F,\ \forall U \text{ ouvert},\ x \in U \Rightarrow U \cap F \text{ est non dénombrable}$$

(tout point de F est *point de condensation* de F).

Soit $G \subseteq \mathbb{R}_+$ un ensemble fermé gauche, sans point isolé à gauche (i.e. un ensemble *parfait gauche*). $\overline{G}$ est un ensemble parfait. De plus si $x \in G$, pour tout $\varepsilon > 0$ $]x-\varepsilon, x[\, \cap G$ est non vide, $]x-\varepsilon, x[\, \cap \overline{G}$ n'est pas dénombrable, de même que $]x-\varepsilon, x] \cap G$ puisque $\overline{G} - G$ est au plus dénombrable. Tout point de G est *point de condensation à gauche de G.*

Lemme 31 *Soit H un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$, borélien, non dénombrable.*
i) H contient un sous-ensemble parfait.
ii) L'ensemble des points de condensation à gauche de H est non vide.

Démonstration.
Si $\mathcal{H}$ est la tribu borélienne de H, $(H, \mathcal{H})$ est isomorphe à $(\mathbb{R}_+, \mathcal{R}_+)$ (théorème de Kuratowski) et porte donc une probabilité diffuse ν. Il existe K compact avec

$$K \subseteq H \text{ et } \nu[K] > 0 ;$$

quitte à remplacer ν par $\frac{1}{\nu[K]}1_K.\nu$, on peut supposer ν portée par K ; le support de ν est parfait, contenu dans K. Soit, pour $x \in]0,1[$,

$$\tau_\nu(x) = \inf\{t > 0 \mid \nu[[0,t]] \geq x\} \;;$$

$\tau_\nu(x)$ est un point de $\mathrm{Supp}^g(\nu)$. Si $t \in \mathrm{Supp}^g(\nu)$, $t = \tau_\nu(\nu[[0,t]])$ et

$$]t-\varepsilon, t[\supseteq \{\tau_\nu(y) \mid y \in]\nu[[0,t-\varepsilon]], \nu[[0,t]][\} \ \square$$

$\triangleright$ ℓ^M est adapté (voir [D] VI-Théorème *20*) et continu à gauche : il suffit de montrer (l'autre cas est trivial) :

$$\ell_t^M = t \Rightarrow \ell_{t-}^M = t;$$

or $\alpha = \ell_{t-}^M < t \Rightarrow \forall s \in]\alpha,t[,\ M \cap [\alpha,t]$ est dénombrable et $\ell_t^M \leq \alpha$.

Lemme 32 $\left\{t \mid \ell_t^M = t\right\}$ *est prévisible, fermé pour la topologie gauche, contenu dans* $\overline{M}^g$ *et sans point isolé à gauche ; lorsque* M *est fermé pour la topologie gauche, c'est le plus grand ensemble parfait gauche inclus dans* M.

Démonstration. Si $\ell_t^M = t > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n = \left[t - \tfrac{1}{n}, t\right] \cap M \text{ est non dénombrable}$$

donc contient un point de condensation à gauche. Pour $H \subseteq M$, $\ell_t^H \leq \ell_t^M \leq t$ et si H est parfait gauche, $\ell_t^H = L_t^H$ $\square$

Lemme 33 $\left\{t \mid \ell_{t+}^M = t\right\}$ *est optionnel, fermé (pour la topologie usuelle) contenu dans* $\overline{M}$ *et parfait ; si* M *est fermé, c'est le plus grand ensemble parfait inclus dans* M.

Démonstration. On montre facilement que $\left\{t \mid \ell_{t+}^M = t\right\}$ est fermé.
Si $\ell_{t+}^M = t$, $\forall\varepsilon > 0$, $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\cap M$ est non dénombrable, donc contient un point de condensation [à gauche] $\square$

Supposons dorénavant que M est fermé pour la topologie gauche. On a :

$$\ell^{\overline{M}} = \ell^M.$$

Notons $P^g(M) = \left\{t \mid \ell_t^M = t\right\}$, $P(M) = \left\{t \mid \ell_{t+}^M = t\right\}$.
$P^g(M) = P^g\left(\overline{M}\right)$ est le noyau parfait gauche de M, $P(M) = P\left(\overline{M}\right)$ est le noyau parfait de $\overline{M}$. $\overline{M} = P\left(\overline{M}\right) + D$ où D est [au plus] dénombrable (sinon D contiendrait un parfait K, et $P\left(\overline{M}\right) \cup K$ serait encore un sous-ensemble parfait de $\overline{M}$, ce qui contredirait le caractère maximal de $P\left(\overline{M}\right)$).

$$P\left(\overline{M}\right) - P^g(M) = \left\{t \mid \Delta\ell_t^M \neq 0\right\}$$

est à sections [au plus] dénombrables, de même que $\overline{M} - M$, $\overline{M} - P\left(\overline{M}\right)$ et $M - P^g(M)$. En particulier, $M - P^g(M)$ est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles.

Proposition 34 *Si M est fermé gauche [prévisible], sans point isolé à gauche, M est le support gauche d'un processus croissant continu [prévisible].*

Démonstration.
On reprend [D-M]-Tome 1, p.258. La mesure construite est portée par M et charge tout intervalle ouvert I tel que $M \cap I$ est non dénombrable. On a donc

$$\mathrm{Supp}^g(\nu) \subseteq M \subseteq \overline{M} = \mathrm{Supp}(\nu).$$

$M - \mathrm{Supp}^g(\nu)$ est à sections dénombrables et s'écrit comme réunion dénombrable de graphes de variables aléatoires $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$; pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\left]L_n - \frac{1}{m}, L_n\right] \cap M$ est non dénombrable, donc porte une probabilité diffuse $\rho_{n,m}$; L_n est dans le support gauche de la mesure diffuse $\sum_{m \in \mathbb{N}^*} 2^{-m} \rho_{n,m}$ et $\frac{1}{2}\left(\nu + \sum_{n,m \in \mathbb{N}^*} 2^{-(n+m)} \rho_{n,m}\right)$ a M pour support gauche ; si M est de plus prévisible, la projection duale prévisible de ν est un processus croissant continu adapté, dont le support gauche est M □

Références

[D] DELLACHERIE C. : Capacités et processus stochastiques. Springer, 1972.
[DM] DELLACHERIE C., MEYER P.A. : Probabilités et potentiel. Tome 1. Hermann, 1975.

7.2 Compléments au paragraphe 3.

On reprend les notations du paragraphe *3*.

1) Pour H optionnel avec $\mathbb{E}[H_\tau^2 ; 0 < \tau < \infty] < \infty$, introduisons les conditions suivantes :

$$iii") \quad \mathbb{E}\left[H_\tau (H \cdot \beta)_\tau ; 0 < \tau < \infty\right] = 0 \qquad \text{ou}$$
$$v') \quad \mathbb{E}\left[H_\tau \left((H \cdot \beta)_\tau + (H \cdot \beta)_{\tau-}\right) ; 0 < \tau < \infty\right] = 0.$$

Comme
$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}\left[H_\tau (H \cdot \beta)_\tau ; 0 < \tau < \infty\right] &= \mathbb{E}\left[H_\tau \left((H \cdot \beta)_\tau + (H \cdot \beta)_{\tau-}\right) + H_\tau^2 (\Delta\beta)_\tau ; 0 < \tau < \infty\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(H \cdot \beta)_\infty^2\right] + \mathbb{E}\left[H_\tau^2 (\Delta\beta)_\tau ; 0 < \tau < \infty\right] \end{aligned}$$

$$iii") \Rightarrow \begin{cases} v') & \text{et} \\ H_\tau (\Delta\beta)_\tau = 0 \text{ sur } \{0 < \tau < \infty\} \end{cases} \quad \text{tandis que } v') \Leftrightarrow (H \cdot \beta)_\infty = 0.$$

Si τ est de plus fin d'ensemble optionnel, β est constant après τ et *v'*) équivaut donc à *iii'*) ; le lemme *10-1*) montre que *iii"*) ou *v'*) sont équivalentes à *1- i*), ..., *v*) si τ est fin d'ensemble optionnel.

2) Si K est prévisible, on a De même si τ est fin d'ensemble prévisible, les conditions *2-i*), ..., *v*) sont encore équivalentes (pour les processus prévisibles K vérifiant $\mathbb{E}[K_\tau^2 ; 0 < \tau < \infty] < \infty$) aux conditions :

$$iii") \quad \mathbb{E}\left[K_\tau (K \cdot B)_\tau ; 0 < \tau < \infty\right] = 0 \quad \text{ou}$$
$$v') \quad \mathbb{E}\left[K_\tau \left((K \cdot B)_\tau + (K \cdot B)_{\tau-}\right) ; 0 < \tau < \infty\right] = 0.$$

3) Soit H processus optionnel tel que $\int_{]0,\infty[} |H_s|\, d\beta_s < \infty$;
soit en outre $r \in \mathbb{R}_+$, U optionnel borné avec $U \geq r$; on a :

$$U\,(H\cdot\beta) + (2r - U)\,(H\cdot\beta)_- = r\left((H\cdot\beta) + (H\cdot\beta)_-\right) + (U - r)\,H\Delta\beta\ ;$$

si $H_\tau\left(U_\tau\,(H\cdot\beta)_\tau + (2r - U_\tau)\,(H\cdot\beta)_{\tau-}\right) \leq 0$ sur $\{0 < \tau < \infty\}$, on a aussi

$$H_\tau\left((H\cdot\beta)_\tau + (H\cdot\beta)_{\tau-}\right) \leq 0 \text{ sur } \{0 < \tau < \infty\}\ ;$$

on a donc $H_\tau = 0$ sur $\{0 < \tau < \infty\}$ en vertu du lemme *10-1*).
3') De même, pour $r \in \mathbb{R}_+$, V prévisible borné avec $V \geq r$ et K prévisible avec $\int_{]0,\infty[} |K_s|\, dB_s < \infty$,

$$\begin{aligned} K_\tau\left(V_\tau\,(K\cdot B)_\tau + (2r - V_\tau)\,(K\cdot B)_{\tau-}\right) &\leq 0 \text{ sur } \{0 < \tau < \infty\} \\ &\Rightarrow K_\tau = 0 \text{ sur } \{0 < \tau < \infty\}\,. \end{aligned}$$

4) Soit α un processus optionnel, à variation localement intégrable (nul en 0) de projection duale prévisible A ; soit H prévisible, avec $\int_{]0,.]} |H_s|\,|d\alpha_s|$ localement intégrable ; $(H\cdot A)^2$ est la projection duale prévisible de $\int_{]0,.]} H_s\left[(H\cdot A)_s + (H\cdot A)_{s-}\right] d\alpha_s$.
Pour $r \in \mathbb{R}_+$, U prévisible borné avec $U \geq r$,

$$\begin{aligned} N = r\,(H\cdot A)^2 &+ \textstyle\sum_{0<s\leq .}\,(U_s - r)\,H_s^2\,(\Delta A_s)^2 \\ &- \int_{]0,.]}\left(U_s\,(H\cdot A)_s + (2r - U_s)\,(H\cdot A)_{s-}\right) H_s\, d\alpha_s \end{aligned}$$

est une martingale locale. Comme

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{]0,\infty[} |H_s|\,|dA_s|\right)^2\right] \leq 4\,\mathbb{E}\left[\left(\int_{]0,\infty[} |H_s|\,|d\alpha_s|\right)^2\right],$$

si $\mathbb{E}\left[\left(\int_{]0,\infty[} |H_s|\,|d\alpha_s|\right)^2\right]$ est fini, N est une martingale uniformément intégrable ; si de plus,

$$\int_{]0,\infty[}\left(U_s\,(H\cdot A)_s + (2r - U_s)\,(H\cdot A)_{s-}\right) H_s\, d\alpha_s = 0$$

N_∞ est positive et N est une martingale positive, nulle en 0, donc nulle, si bien que

$$r\,(H\cdot A)_\infty^2 + \textstyle\sum_{0<s}\,(U_s - r)\,H_s^2\,(\Delta A_s)^2 = 0\ ;$$

en particulier, $(H\cdot A)_\infty = 0$ et $(U - r)\,H\Delta A = 0$.
De même, si α est croissant et $H\left(U\,(H\cdot A) + (2r - U)\,(H\cdot A)_-\right) \leq 0$, on a $N = 0$ □