SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

STÉPHANE ATTAL
KRZYSZTOF BURDZY
MICHEL ÉMERY
YUE-YUN HU

Sur quelques filtrations et transformations browniennes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 29 (1995), p. 56-69
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1995__29__56_0>

SUR QUELQUES FILTRATIONS
ET TRANSFORMATIONS BROWNIENNES

S. Attal, K. Burdzy, M. Émery et Y. Hu

Cette étude est issue de questions posées par Marc Yor, que nous remercions pour de nombreuses conversations, une correspondance fournie et son inlassable disponibilité.

Une filtration étant donnée sur un espace probabilisé, est-il possible de reconnaître si elle est engendrée par un mouvement brownien sans construire explicitement un tel processus? Ce problème difficile, auquel nous ignorons la réponse, a fait récemment des progrès grâce à Dubins, Feldman, Smorodinsky & Tsirelson [3]. Nous n'allons pas l'attaquer ici, mais seulement, en exhibant un mouvement brownien générateur (et même plusieurs), vérifier que la filtration de Goswami-Rao, qui décrit la connaissance d'un mouvement brownien à un facteur ± 1 près, est brownienne; nous nous livrerons ensuite à des variations sur ce thème et sur les méthodes employées.

Tous les mouvements browniens considérés seront issus de l'origine et à valeurs réelles. L'espace de Wiener (unidimensionnel) sera désigné par $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sa filtration canonique par $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ et le mouvement brownien canonique des coordonnées sur Ω par B. Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et R une relation d'équivalence sur Ω telle que le saturé pour R de tout élément de $\mathcal{B}$ soit encore dans $\mathcal{B}$,[1] on notera $\mathcal{B}/R$ la sous-tribu de $\mathcal{B}$ formée des événements de $\mathcal{B}$ saturés pour R, ou plutôt la complétée pour $(\mathcal{A}, \mathbb{P})$ de cette tribu : ici et dans la suite, les sous-tribus sur Ω contiennent implicitement tous les événements négligeables. De même, on notera $\mathcal{F}/R$ la filtration prenant à l'instant t la valeur $\mathcal{F}_t/R$ si chaque $\mathcal{F}_t$ est stable par saturation pour R.

1. Cette condition n'est pas nécessaire pour définir $\mathcal{B}/R$, mais lorsqu'elle n'est pas remplie, la notation $\mathcal{B}/R$ est vraiment abusive!

Si l'on prend pour R la relation d'équivalence telle que

$$\omega_1 R \omega_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad [\, \omega_1 = \omega_2 \quad \text{ou} \quad \omega_1 = -\omega_2 \,] \ ,$$

elle vérifie cette condition et la filtration quotient $\mathcal{G} = \mathcal{F}/R$, appelée[2] *filtration de Goswami-Rao,* peut être ainsi caractérisée : les variables aléatoires mesurables pour $\mathcal{G}_t$ sont exactement les variables aléatoires mesurables pour $\mathcal{F}_t$ qui sont paires, c'est-à-dire qui prennent p. s. la même valeur en ω et $-\omega$.

Pour chaque t, il est clair que la tribu $\mathcal{G}_t$ est aussi engendrée par le processus $(B_s \operatorname{sgn} B_t\, ,\ s \in [0,t])$. Goswami & Rao ont remarqué dans [4] qu'elle l'est aussi par les variables aléatoires $|B_u - B_v|$ quand u et v décrivent $[0,t]$; en effet, ces variables aléatoires sont paires et réciproquement $B_s \operatorname{sgn} B_t$ est le produit de $|B_s| = |B_s - B_0|$ par

$$\operatorname{sgn}(B_s B_t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |B_s - B_t| = \big||B_s| - |B_t|\big|; \\ -1 & \text{si } |B_s - B_t| = |B_s| + |B_t|. \end{cases}$$

Si l'on se fixe t_1 et t_2 dans $[0,t]$ tels que $t_1 \neq t_2$, la tribu $\mathcal{G}_t$ est aussi engendrée par les processus $|B_s - B_{t_1}|$ et $|B_s - B_{t_2}|$, où s décrit $[0,t]$. Ceci peut se vérifier en retrouvant d'abord, à une symétrie par rapport à l'origine près, le couple (B_{t_1}, B_{t_2}) à partir des trois distances $|B_{t_1}|$, $|B_{t_2}|$, $|B_{t_1} - B_{t_2}|$, puis, à cette même symétrie près, B_s à partir de ses distances à B_{t_1} et B_{t_2}.

Pour $0 < s \leqslant t$, $\mathcal{F}_t$ est engendrée par la tribu $\mathcal{G}_t$ et la variable aléatoire $\operatorname{sgn} B_s$ qui est indépendante de $\mathcal{G}_t$; on peut donc dire, en un certain sens, que la filtration $\mathcal{F}$ est obtenue en grossissant $\mathcal{G}$ par un bit d'information indépendant. Mais, puisque $\mathcal{F}_0$ est égale à $\mathcal{G}_0$ (et triviale), ce supplément d'information nécessaire pour passer de $\mathcal{G}$ à $\mathcal{F}$ semble apparaître par magie à l'instant $0+$ (bien que $\mathcal{F}_{0+}$ soit aussi triviale); ceci évoque la situation de l'exemple de Tsirelson (voir Revuz & Yor [10], Yor [11] et surtout Le Gall & Yor [6], sur lequel nous reviendrons plus bas).

DÉFINITION. — *Une filtration sera dite* brownienne *si c'est la filtration naturelle d'un mouvement brownien (réel, issu de zéro).*

Dans une filtration brownienne $\mathcal{H}$, engendrée par un mouvement brownien X, tout mouvement brownien Y est de la forme $\int H\, dX$ où H est de carré 1, donc inversible. Il en résulte que Y hérite de X la propriété de représentation prévisible relativement à $\mathcal{H}$; en particulier, deux mouvements browniens pour $\mathcal{H}$ sont toujours intégrale stochastique l'un par rapport à l'autre.

Mais la réciproque est fausse : il existe des filtrations qui ne sont pas browniennes, bien qu'elles contiennent des mouvements browniens et que tous les mouvements browniens qu'elles contiennent y aient la propriété de représentation prévisible. C'est par exemple le cas de la filtration canonique sur l'espace de Wiener muni d'une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ convenablement choisie (Dubins, Feldman, Smorodinsky et Tsirelson ont montré dans [3] qu'il est possible de choisir $\mathbb{Q}$ de sorte que, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q})$, $\mathcal{F}$ ne soit pas une filtration brownienne).

DÉFINITION. — *Une sous-filtration $\mathcal{K}$ d'une filtration brownienne $\mathcal{H}$ sera dite* représentable *dans $\mathcal{H}$ si elle est engendrée par un processus qui est un mouvement brownien (réel, issu de zéro) à la fois pour $\mathcal{H}$ et pour $\mathcal{K}$.*

---

2. Par Revuz & Yor, exercice (3.22), chapitre V de la 2[e] édition de [10] (1994).

Ce nom vient de ce que, si X est n'importe quel mouvement brownien pour $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ est engendrée par un mouvement brownien de la forme $\int H\,dX$, où H est un processus prévisible pour $\mathcal{H}$ et de carré 1. Il est évident que toute sous-filtration représentable de $\mathcal{H}$ est elle-même brownienne. La réciproque est fausse; il est facile de caractériser, parmi les sous-filtrations browniennes de $\mathcal{H}$, celles qui sont représentables dans $\mathcal{H}$; c'est l'objet de la proposition suivante.

PROPOSITION 1. — *Soit $\mathcal{K}$ une sous-filtration brownienne d'une filtration brownienne $\mathcal{H}$. Les cinq assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *$\mathcal{K}$ est représentable dans $\mathcal{H}$;*

(ii) *toute martingale pour $\mathcal{K}$ en est aussi une pour $\mathcal{H}$;*

(iii) *tout mouvement brownien pour $\mathcal{K}$ en est aussi un pour $\mathcal{H}$;*

(iv) *il existe un mouvement brownien pour $\mathcal{K}$ qui en soit aussi un pour $\mathcal{H}$ et ait la propriété de représentation prévisible dans $\mathcal{H}$;*

(v) *tout mouvement brownien pour $\mathcal{K}$ en est aussi un pour $\mathcal{H}$ et a la propriété de représentation prévisible dans $\mathcal{H}$;*

(vi) *pour tout t, les tribus $\mathcal{H}_t$ et $\mathcal{K}_\infty$ sont conditionnellement indépendantes étant donnée $\mathcal{K}_t$.*

DÉMONSTRATION. — (i) $\Rightarrow$ (iv) : Il existe par hypothèse un mouvement brownien X engendrant $\mathcal{H}$ et un mouvement brownien Y engendrant $\mathcal{K}$ tel que $Y = \int H\,dX$ avec $H^2 = 1$; et toute martingale pour $\mathcal{H}$ est de la forme $\int K\,dX$, c'est-à-dire $\int KH\,dY$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) : Puisque deux mouvements browniens pour $\mathcal{K}$ sont toujours intégrale stochastique l'un de l'autre dans $\mathcal{K}$, si l'un vérifie l'hypothèse (iv), il en va de même de l'autre; d'où (v).

(v) $\Rightarrow$ (iii) est trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Toute martingale pour $\mathcal{K}$, intégrale stochastique par rapport à un mouvement brownien pour $\mathcal{K}$, donc pour $\mathcal{H}$, est aussi une martingale pour $\mathcal{H}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Martingale pour $\mathcal{K}$, un mouvement brownien engendrant $\mathcal{K}$ en est aussi une pour $\mathcal{H}$, donc, grâce à la caractérisation de Lévy, un mouvement brownien pour $\mathcal{H}$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (vi) : Cette équivalence ne nécessite pas que les filtrations considérées soit browniennes. Elle est mentionnée dans [10] (exercice (4.16) du chapitre V) et résulte facilement du critère suivant : *Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont des sous-tribus telles que $\mathcal{D} \subset \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont conditionnellement indépendantes étant donnée $\mathcal{D}$ si et seulement si leurs opérateurs d'espérance conditionnelle vérifient* $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}\mathbb{E}^{\mathcal{C}} = \mathbb{E}^{\mathcal{D}}$. Ceci est laissé au lecteur, qui n'éprouvera aucune difficulté à le vérifier directement, ou à le déduire du théorème II-51 de Meyer [8]. ∎

La condition (vi) implique en particulier que $\mathcal{K}_t = \mathcal{K}_\infty \cap \mathcal{H}_t$. En conséquence, dans une filtration brownienne, une sous-filtration représentable $\mathcal{K}$ est déterminée de façon unique par sa tribu terminale $\mathcal{K}_\infty$. (Ceci est aussi un cas particulier du lemme 1 ci-dessous.) Mais nous ne voyons pas comment caractériser, parmi les sous-tribus de $\mathcal{H}_\infty$, les tribus terminales des sous-filtrations représentables.

Une autre conséquence de (ii) est la transitivité : si $\mathcal{K}$ est représentable dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$ représentable dans $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ est représentable dans $\mathcal{H}$. Réciproquement, si $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$

sont deux sous-filtrations représentables d'une même filtration brownienne et si $\mathcal{L}$ est incluse dans $\mathcal{K}$, alors $\mathcal{L}$ est représentable dans $\mathcal{K}$.

PROPOSITION 2. — *La filtration de Goswami-Rao $\mathcal{G}$ est représentable dans $\mathcal{F}$; c'est en particulier une filtration brownienne.*

D'après la remarque qui précède, ceci entraîne par exemple que toute martingale pour $\mathcal{G}$ peut être écrite comme une intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien de Lévy $\beta = \int \operatorname{sgn} B \, dB$. (La filtration naturelle de ce dernier est strictement incluse dans $\mathcal{G}$, puisque c'est $\mathcal{F}/\tilde{R}$, où la relation d'équivalence $\tilde{R}$, donnée par

$$\omega_1 \tilde{R} \, \omega_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\omega_1| = |\omega_2| ,$$

est strictement moins fine que R. Par exemple, la variable aléatoire $\operatorname{sgn} B_{t/2} \operatorname{sgn} B_t$ est mesurable pour $\mathcal{G}_t$ mais n'est pas une fonctionnelle de β.)

Nous allons donner de cette proposition trois démonstrations, consistant chacune à exhiber un processus H prévisible pour $\mathcal{F}$, de carré 1, tel que le mouvement brownien $\int H \, dB$ engendre $\mathcal{G}$. Nous regroupons auparavant dans des lemmes les éléments communs à ces trois démonstrations.

LEMME 1. — *Soit X un mouvement brownien pour une filtration $\mathcal{H}$. Si le processus X est adapté à une sous-filtration $\mathcal{K}$ de $\mathcal{H}$ et engendre la tribu $\mathcal{K}_\infty$, il engendre la filtration $\mathcal{K}$.*

Ce résultat est faux si, au lieu de supposer que le mouvement brownien X est une martingale pour $\mathcal{H}$, on le suppose seulement adapté à $\mathcal{H}$. Un contre-exemple est donné par $\mathcal{K} = \mathcal{H} = \mathcal{F}$ et $X_t = 2B_{t/4}$; un autre contre-exemple, à la filtration beaucoup plus intéressante, est le processus

$$X_t = B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s} \, ds$$

étudié par Jeulin et Yor dans [5] et par Meyer dans [9].

DÉMONSTRATION DU LEMME 1. — La filtration naturelle $\tilde{\mathcal{K}}$ de X est incluse dans $\mathcal{K}$; il s'agit de montrer l'inverse. Fixons $A \in \mathcal{K}_t$. Le processus $M_s = \mathbb{P}[A|\tilde{\mathcal{K}}_s]$ est une martingale pour $\tilde{\mathcal{K}}$, donc une intégrale stochastique par rapport à X, donc une martingale pour $\mathcal{H}$. Comme $M_\infty = \mathbb{P}[A|\tilde{\mathcal{K}}_\infty] = \mathbb{P}[A|\mathcal{K}_\infty] = \mathbb{1}_A$ est mesurable pour $\mathcal{K}_t$, donc pour $\mathcal{H}_t$, on a $M_t = M_\infty = \mathbb{1}_A$ et A est donc dans $\tilde{\mathcal{K}}_t$. ∎

LEMME 2. — *Sur l'espace de Wiener, soit H un processus prévisible impair, c'est-à-dire tel que $H(-\omega) = -H(\omega)$, ne prenant que les valeurs 1 et -1.*

a) *Le mouvement brownien $\tilde{B} = \int H \, dB$ est adapté à $\mathcal{G}$.*

b) *Pour que $\tilde{B}$ engendre $\mathcal{G}$, il suffit qu'il existe une variable aléatoire ε sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et une fonction mesurable ϕ de $\Omega \times \{-1, 1\}$ dans Ω telles que $B = \phi(\tilde{B}, \varepsilon)$ p. s.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. — a) La variable aléatoire $\tilde{B}_t = \int_0^t H_s\,dB_s$ est mesurable pour $\mathcal{F}_t$; elle est paire car H peut être approché par des processus prévisibles simples impairs ; $\tilde{B}$ est donc adapté à $\mathcal{G}$.

b) En appliquant le lemme 1, il suffit de vérifier que $\tilde{B}$ engendre la tribu $\mathcal{G}_\infty$, c'est-à-dire que toute variable aléatoire paire Z s'exprime en fonction de $\tilde{B}$. En remplaçant ω par $-\omega$ dans l'égalité p. s. $B(\omega) = \phi\big(\tilde{B}(\omega),\varepsilon(\omega)\big)$, on obtient $-B(\omega) = \phi\big(\tilde{B}(\omega),\varepsilon(-\omega)\big)$, d'où $\varepsilon(-\omega) \neq \varepsilon(\omega)$ puisque $B \neq -B$ p. s. Ainsi l'ensemble à deux éléments $\{B(\omega), -B(\omega)\}$ est égal à $\big\{\phi\big(\tilde{B}(\omega),1\big), \phi\big(\tilde{B}(\omega),-1\big)\big\}$; et, Z étant paire, $Z(\omega) = Z\circ\phi\big(\tilde{B}(\omega),1\big)$ p. s. ne dépend que de $\tilde{B}$. ∎

LEMME 3. — *Toute suite* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{Z}}$ *s'exprime comme fonction borélienne de* u_0 *et de la suite* v *définie par* $v_n = u_{n-1}u_n$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3. — On a $u_n = u_0 \prod_{n<i\leqslant 0} v_i$ pour $n \leqslant 0$ et $u_n = u_0 \prod_{0<i\leqslant n} v_i$ pour $n \geqslant 0$. ∎

DÉFINITION. — *Nous appellerons ici* subdivision *toute famille* $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *telle que* $0 < t_n < t_{n+1}$ *pour tout* n *et que* $\inf_n t_n = 0$, $\sup_n t_n = \infty$. (On pourrait sans inconvénient remplacer $\mathbb{Z}$ par $-\mathbb{N}$ dans cette définition ; l'important est seulement l'accumulation des t_n vers zéro.)

PREMIÈRE DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2. — Une subdivision $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ étant fixée, on pose $\varepsilon_n = \operatorname{sgn}(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ et on définit un processus prévisible impair de carré 1 par $H^1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_n \mathbb{1}_{]t_n,t_{n+1}]}$. Pour établir que le mouvement brownien $B^1 = \int H^1\,dB$ engendre $\mathcal{G}$, nous allons appliquer le lemme 2 et reconstruire B à partir de ε_0 et B^1. Il suffit pour cela de reconstruire chacun des processus $Z^n = \big(B_{t_n+t} - B_{t_n}\,,\ t \in [0, t_{n+1}-t_n]\big)$. Mais, par définition de B^1, $Z^n = \varepsilon_n \tilde{Z}^n$ où $\tilde{Z}^n = \big(B^1_{t_n+t} - B^1_{t_n}\,,\ t \in [0, t_{n+1}-t_n]\big)$ est un morceau de B^1 ; il suffit donc d'exprimer ε_n en fonction de B^1 et de ε_0. La définition de B^1 entraîne que $\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n$ est égal à $\operatorname{sgn}(B^1_{t_n} - B^1_{t_{n-1}})$ et le lemme 3 permet de conclure. ∎

REMARQUE. — Dans [6], Le Gall et Yor étudient le même couple (B, B^1), mais vu sous un autre angle : se donnant B^1 a priori, ils s'intéressent à la solution B de l'équation $dB = H^1(B)\,dB^1$. (Elle n'a pas de solution forte, puisque B^1 a une filtration strictement incluse dans celle de B.)

DEUXIÈME DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2. — La subdivision $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ restant fixée, on définit comme ci-dessus un processus prévisible impair de carré 1 par $H^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \eta_n \mathbb{1}_{]t_n,t_{n+1}]}$, où l'on a posé cette fois-ci $\eta_n = \operatorname{sgn} B_{t_n}$. Toujours grâce au lemme 2, il nous suffit de retrouver B à partir de $B^2 = \int H^2\,dB$ et de η_0. Comme précédemment, il suffit de retrouver les signes η_n, qui transforment les morceaux $\big(B^2_{t_n+t} - B^2_{t_n}\,,\ t \in [0, t_{n+1}-t_n]\big)$ du brownien B^2 en les morceaux Z^n de B ; selon le lemme 3, les η_n s'expriment à l'aide de η_0 et des produits $\eta_{n-1}\eta_n$ et il suffit donc d'écrire ces produits à partir de B^2. Or

$$\begin{aligned}\eta_{n-1}\eta_n &= \operatorname{sgn}(\eta_{n-1}B_{t_n}) = \operatorname{sgn}\big(\eta_{n-1}B_{t_{n-1}} + \eta_{n-1}(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})\big)\\ &= \operatorname{sgn}\big(|B_{t_{n-1}}| + (B^2_{t_n} - B^2_{t_{n-1}})\big) ;\end{aligned}$$

il ne reste donc qu'à exprimer $|B_{t_n}|$ en termes du nouveau brownien B^2.

À cette fin, remarquons que $B_{t_n} = \eta_{n-1}\big((B^2_{t_n} - B^2_{t_{n-1}}) + |B_{t_{n-1}}|\big)$, donc

$$|B_{t_n}| = \big|(B^2_{t_n} - B^2_{t_{n-1}}) + |B_{t_{n-1}}|\big| = \Phi_1\big(B^2_{t_n} - B^2_{t_{n-1}}\,,\ |B_{t_{n-1}}|\big)\ ,$$

où l'on a posé $\Phi_1(x,y) = |x+y|$. En définissant pour $p \geqslant 1$ des fonctions Φ_p par

$$\Phi_{p+1}(x_1,\ldots,x_p,x_{p+1},y) = \Phi_p\big(x_1,\ldots,x_p,\Phi_1(x_{p+1},y)\big)\ ,$$

en posant $\Delta_n = B^2_{t_{n+1}} - B^2_{t_n}$ et en utilisant $|B_{t_{n-p}}| = \Phi_1(\Delta_{n-p-1}\,,\ |B_{t_{n-p-1}}|)$, on obtient de proche en proche

$$|B_{t_n}| = \Phi_p\big(\Delta_{n-1},\ldots,\Delta_{n-p}\,,\ |B_{t_{n-p}}|\big)\ .$$

Mais les fonctions Φ_p vérifient $\big|\Phi_p(x_1,\ldots,x_p,y) - \Phi_p(x_1,\ldots,x_p,0)\big| \leqslant |y|$ (cela se vérifie immédiatement par récurrence sur p). On peut donc écrire

$$\big||B_{t_n}| - \Phi_p\big(\Delta_{n-1},\ldots,\Delta_{n-p}\,,\ 0\big)\big| \leqslant |B_{t_{n-p}}|$$

et il en résulte que $\Phi_p\big(\Delta_{n-1},\ldots,\Delta_{n-p}\,,\ 0\big)$ tend, quand p tend vers l'infini, vers $|B_{t_n}|$, qui est donc une fonction mesurable du processus B^2. ∎

REMARQUES. — a) Ce résultat montre que l'analogie syntaxique entre la formule définissant B^2 et la transformation de Lévy est trompeuse : en un sens, B^2 ressemble bien plus à B^1 qu'à β et sa construction ne doit pas être interprétée comme une sorte de transformation de Lévy discrète.

b) Au vu des deux démonstrations qui précèdent, on pourrait espérer qu'en prenant n'importe quelles variables aléatoires σ_n de carré 1, impaires et respectivement mesurables pour $\mathcal{F}_{t_n}$ et en posant $H = \sum_n \sigma_n \mathbb{1}_{]t_n,t_{n+1}]}$ et $\tilde{B} = \int H\,dB$, on obtiendrait toujours un mouvement brownien engendrant $\mathcal{G}$. Cela ne marche pas, comme on peut s'en convaincre par exemple en itérant la transformation $T : B \mapsto B^1$ de l'espace de Wiener. Son carré $T\circ T$ est du type indiqué, avec

$$\sigma_n = \operatorname{sgn}(B^1_{t_n} - B^1_{t_{n-1}})\ \operatorname{sgn}(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})\ ,$$

mais la filtration obtenue, celle des processus dépendant de façon paire de B^1, est strictement incluse dans celle de B^1. Ceci suggère d'étudier la suite décroissante des filtrations obtenues à l'aide des puissances de la transformation T; nous y reviendrons avec la proposition 3.

TROISIÈME DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2. — Appelons H^3_t la variable aléatoire égale au signe de la plus longue excursion de B avant t, ou, plus précisément, avant l'instant $G_t = \sup\{s \in [0,t[\ :\ B_s = 0\}$. Le processus H^3 est prévisible (car adapté et continu à gauche) et impair; pour établir que $B^3 = \int H^3\,dB$ engendre $\mathcal{G}$, il suffit, grâce au lemme 2, de montrer que $B = \phi(B^3, H^3_1)$.

Puisque $H^3_t = H^3_{G_t}$, la formule du balayage donne $B^3 = \int H^3\,dB = H^3 B$, d'où $|B^3| = |B|$; ainsi B^3 a les mêmes zéros et, aux signes près, les mêmes excursions que B. Comme $B = H^3 B^3$, nous devons exprimer H^3 à l'aide de B^3 et de H^3_1.

Soit $]U_0, V_0[$ l'intervalle portant la plus longue excursion avant G_1; pour $n < 0$ on définit inductivement des variables aléatoires U_n et V_n en appelant $]U_n, V_n[$ l'intervalle qui porte la plus longue excursion de B avant U_{n+1}; pour $n > 0$ on appelle $]U_n, V_n[$ l'intervalle qui porte la première excursion plus longue que $V_{n-1} - U_{n-1}$ (donc plus longue que toutes les excursions antérieures). On notera e_n le signe de B sur $]U_n, V_n[$; avec ces notations, $H^3 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n \mathbb{1}_{]V_n,V_{n+1}]}$. Puisque les U_n et V_n

peuvent aussi bien être définis à partir de B^3 que de B, il nous suffit de retrouver les e_n à partir de B^3 et de $H_1^3 = e_0$. D'après le lemme 3, il suffit pour cela de savoir exprimer les produits $e_n e_{n+1}$ à l'aide de B^3. Mais sur l'intervalle $]U_{n+1}, V_{n+1}[$ on a d'une part $B = e_n B^3$ (c'est vrai sur tout l'intervalle $]V_n, V_{n+1}]$) et d'autre part $\operatorname{sgn} B = e_{n+1}$, donc aussi $\operatorname{sgn} B^3 = e_n e_{n+1}$, d'où le résultat. ∎

REMARQUES. — a) Une démonstration en tout point semblable à cette dernière permet d'établir le même résultat lorsque l'on prend pour H_t le signe de l'excursion la plus haute (en valeur absolue) avant G_t.

Mais on ne peut pas prendre pour H_t le signe de n'importe quelle excursion choisie canoniquement dans l'intervalle $[0, G_t]$. Par exemple, nous verrons plus bas (dans la démonstration de la proposition 4) que si l'on prend H_t égal au signe de la plus longue excursion entre $V(t)$ et G_t, où $V(t)$ désigne la fin de la plus longue excursion avant G_t, la filtration obtenue est strictement plus petite que $\mathcal{G}$.

b) Les deux premières démonstrations faisaient intervenir le choix arbitraire d'une subdivision; la troisième est plus intrinsèque. Plus précisément, pour tout $\lambda > 0$, la transformation $B \mapsto B^3$ de Ω dans lui-même commute avec la dilatation $B \mapsto \left(\frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t}\right)_{t \geqslant 0}$, de sorte que celle-ci opère non seulement sur B, mais sur le couple (B, B^3). Bien entendu, pour $\lambda < 0$, cette commutation n'a plus lieu et est au contraire remplacée par une anticommutation.

DÉFINITIONS. — *Nous appellerons* transformation brownienne *toute application mesurable de Ω dans lui-même* (définie partout ou seulement presque partout) *qui préserve la mesure de Wiener* $\mathbb{P}$. Dans ce cas, $B \circ T$ est un mouvement brownien sur l'espace de Wiener.

Une transformation brownienne T sera dite adaptée *si le nouveau brownien $B \circ T$ est adapté à $\mathcal{F}$; elle sera dite* représentable *si $B \circ T$ est en outre un mouvement brownien pour $\mathcal{F}$.*

Dans ce dernier cas, T est caractérisée par le processus H prévisible pour $\mathcal{F}$, de carré 1, tel que $B \circ T = \int H \, dB$; nous le noterons H^T. La composée $U = T \circ S$ de deux transformations adaptées est adaptée (car $B \circ U$ est adapté à la filtration naturelle de $B \circ T$, qui est incluse dans $\mathcal{F}$); si en outre S et T sont toutes deux représentables, il en va de même de U, avec $H^U = H^S \, H^T \circ S$.

Le choix de l'adjectif représentable se justifie d'une part par le lien avec les filtrations représentables (explicité dans le paragraphe suivant) et d'autre part parce que ces transformations peuvent toutes être décrites à l'aide d'intégrales stochastiques d'opérateurs dans le cadre du calcul stochastique non commutatif (voir [2]).

Si T est une transformation brownienne adaptée (respectivement représentable), la filtration naturelle de $B \circ T$ est une sous-filtration brownienne (respectivement représentable) de $\mathcal{F}$, que nous noterons $\mathcal{F}^T$; les itérées T^n de T sont aussi des transformations browniennes adaptées (respectivement représentables) et les $\mathcal{F}^{T^n}$ forment donc une suite décroissante de sous-filtrations browniennes (respectivement représentables) de $\mathcal{F}$, strictement décroissante si $\mathcal{F}^T$ est une sous-filtration stricte de $\mathcal{F}$. Nous appellerons $\mathcal{F}^{T^\infty}$ la limite des $\mathcal{F}^{T^n}$ (elle est automatiquement continue à droite comme intersection de filtrations continues à droite). Cette filtration limite est parfois difficile à décrire : lorsque T est la transformation de Lévy (transformation représentable donnée par $H = \operatorname{sgn} B$), $\mathcal{F}^{T^\infty}$ n'est pas connue (on peut conjecturer que c'est la filtration triviale; ceci impliquerait l'ergodicité de la transformation de Lévy).

Toute sous-filtration représentable de $\mathcal{F}$ est de la forme $\mathcal{F}^T$ pour une transformation représentable T qui est, bien sûr, très loin d'être unique (le choix d'une telle T équivaut au choix de l'un des mouvements browniens qui engendrent cette sous-filtration). Les trois démonstrations de la proposition 2 ont consisté à exhiber trois transformations représentables T pour lesquelles $\mathcal{F}^T$ soit la filtration de Goswami-Rao $\mathcal{G}$. Pour la première et la troisième de ces trois transformations, la filtration limite $\mathcal{F}^{T^\infty}$ peut être décrite explicitement comme un quotient de $\mathcal{F}$ et est représentable; ceci fera l'objet des deux prochaines propositions.

PROPOSITION 3. — *Étant donnée une subdivision $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, si l'on note T la transformation représentable associée au processus prévisible*

$$H^1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})\, \mathbb{1}_{]t_n, t_{n+1}]}\ ,$$

la filtration $\mathcal{F}^{T^\infty}$ n'est autre que $\mathcal{F}/R'$, où R' est la relation qui lie ω_1 et ω_2 si et seulement si, pour chaque n, les trajectoires $\big(\omega_1(s)-\omega_1(t_n)\,,\ t_n \leqslant s \leqslant t_{n+1}\big)$ et $\big(\omega_2(s)-\omega_2(t_n)\,,\ t_n \leqslant s \leqslant t_{n+1}\big)$ sont les mêmes à un facteur ± 1 près. En outre, cette filtration est représentable dans $\mathcal{F}$.

Rappelons un lemme de Lindvall & Rogers [7] qui résulte de la préservation des martingales lors d'un grossissement indépendant.

LEMME 4. — *Étant donné un espace probabilisé, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux sous-tribus indépendantes, $(\mathcal{B}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(\mathcal{C}^k)_{k\in\mathbb{N}}$) une suite décroissante de sous-tribus de $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{C}$) et $\mathcal{B}^\infty$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty$) la limite $\bigcap_k \mathcal{B}^k$ (respectivement $\bigcap_k \mathcal{C}^k$). On a $\bigcap_k (\mathcal{B}^k \vee \mathcal{C}^k) = \mathcal{B}^\infty \vee \mathcal{C}^\infty$.*

En particulier, $\bigcap_k (\mathcal{B}^k \vee \mathcal{C}) = \mathcal{B}^\infty \vee \mathcal{C}$.

LEMME 5. — *Soient $E = (E_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite indépendante de variables aléatoires de même loi uniforme dans $\{-1,1\}$ et τ l'application de $\{-1,1\}^{\mathbb{Z}}$ dans lui-même qui transforme $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en $(e'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, où $e'_n = e_{n-1}e_n$. La suite décroissante des tribus $\sigma(\tau^k \circ E)$ a une intersection dégénérée.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 5. — En itérant l'opération τ, on voit facilement, par récurrence, que lorsque k est une puissance de 2, τ^k transforme E_n en $E_{n-k}E_n$. En conséquence, pour un tel k, la tribu $\mathcal{B}^k = \sigma(\tau^k \circ E)$ est engendrée par les variables aléatoires $E_{n-k}E_n$, et consiste en les fonctionnelles de la suite E qui sont invariantes par chacune des k transformations consistant à changer en bloc le signe de toute une sous-suite $(E_{kn+i})_{n\in\mathbb{Z}}$. Cette tribu $\mathcal{B}^k$ est donc indépendante de $\sigma(E_n, n\in A)$ pour tout A n'ayant dans chacune de ces sous-suites qu'un élément au plus. Donc, si A est une partie finie de $\mathbb{Z}$, la variable aléatoire $E_A = \prod_{n\in A} E_n$ est indépendante de $\mathcal{B}^k$ lorsque k est une puissance de 2 assez grande (supérieure au diamètre de A). Ceci entraîne que $\mathbb{E}[E_A|\mathcal{B}^k] = \mathbb{E}[E_A]$ et à la limite $\mathbb{E}[E_A|\bigcap_k \mathcal{B}^k] = \mathbb{E}[E_A]$. Le lemme en découle puisque les E_A forment une base orthonormée de $\mathcal{B}^0$. ∎

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3. — Pour chaque n, à partir du mouvement brownien $Z^n = \big(B_{t_n+s} - B_{t_n}\,,\ s \in [0, t_{n+1} - t_n]\big)$, la proposition 2 permet de construire un mouvement brownien $X^n = (X^n_s\,,\ s \in [0, t_{n+1} - t_n])$ qui engendre la filtration de Goswami-Rao de Z^n et qui soit de la forme $X^n_s = \int_0^s H^n_u\, dZ^n_u$ où H^n est prévisible pour Z^n. Les X^n étant, comme les Z^n, indépendants, on peut définir un nouveau mouvement brownien B' par $B'_t - B'_{t_n} = X^n_{t-t_n}$ pour $t_n < t \leqslant t_{n+1}$; il vérifie $B' = \int H'\, dB$, où le processus H' prévisible pour $\mathcal{F}$ est défini par $H'_t = H^n_{t-t_n}$ pour $t_n < t \leqslant t_{n+1}$. Par construction de B', sa filtration naturelle $\mathcal{G}'$ est $\mathcal{F}/R'$, qui est donc une sous-filtration représentable de $\mathcal{F}$. Il reste à établir que $\mathcal{F}^{T^\infty} = \mathcal{G}'$. Par le lemme 1 appliqué à $\mathcal{K} = \mathcal{F}^{T^\infty}$, $\mathcal{H} = \mathcal{F}$ et $X = B'$, il suffit pour cela de vérifier que $\mathcal{F}^{T^\infty}_\infty = \mathcal{G}'_\infty$.

La tribu $\mathcal{A}$ sur l'espace de Wiener est engendrée par les processus Z^n ; elle est donc aussi engendrée par les X^n et la suite ε des signes $\varepsilon_n = \operatorname{sgn}(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$; ces ingrédients sont indépendants. La tribu $\mathcal{B} = \sigma(\varepsilon)$ est donc indépendante de $\mathcal{G}'_\infty$ et telle que $\mathcal{A} = \mathcal{G}'_\infty \vee \mathcal{B}$.

La transformation T laisse invariante toute la tribu $\mathcal{G}'_\infty$ et opère sur la suite ε par la transformation τ qui remplace chaque ε_n par $\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n$. Les tribus $\mathcal{B}^k = \sigma(\tau^k \circ \varepsilon)$ forment une filtration inverse, indépendante de $\mathcal{G}'_\infty$; on a $\mathcal{F}^{T^k}_\infty = \mathcal{G}'_\infty \vee \mathcal{B}^k$ et à la limite $\mathcal{F}^{T^\infty}_\infty = \bigcap_k (\mathcal{G}'_\infty \vee \mathcal{B}^k)$. Le lemme 4 dit que cette tribu est engendrée par $\mathcal{G}'_\infty$ et par la tribu asymptotique $\bigcap_k \mathcal{B}^k$; cette dernière étant dégénérée par le lemme 5, $\mathcal{F}^{T^\infty}_\infty$ est égale à $\mathcal{G}'_\infty$. ∎

REMARQUE. — Si dans cette proposition on remplace H^1 par le processus $H^2 = \sum_n \operatorname{sgn}(B_{t_n}) \mathbb{1}_{]t_n, t_{n+1}]}$, il est clair que la filtration asymptotique $\mathcal{F}^{T^\infty}$ contient $\mathcal{G}'$ (qui est invariante par T) mais nous ne savons pas s'il y a égalité.

En revanche, pour H^3 (introduit dans la troisième démonstration de la proposition 2), la filtration asymptotique peut être caractérisée. Reprenons des notations introduites lors de cette démonstration : G_t est le dernier zéro de B avant t ; $]U_0, V_0[$ est l'intervalle de la plus longue excursion de B avant G_1 ; pour $n < 0$, $]U_n, V_n[$ porte la plus longue excursion de B avant U_{n+1} ; pour $n > 0$, $]U_n, V_n[$ porte la première excursion plus longue que $V_{n-1} - U_{n-1}$; e_n est le signe de B sur $]U_n, V_n[$.

PROPOSITION 4. — *Si l'on note S la transformation représentable associée au processus $H^3 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n \mathbb{1}_{]V_n, V_{n+1}]}$ (prévisible car H^3_t est le signe de la plus longue excursion de B sur l'intervalle $[0, G_t]$), la filtration $\mathcal{F}^{S^\infty}$ n'est autre que $\mathcal{F}/R''$, où la relation d'équivalence R'' relie ω_1 et ω_2 si et seulement si $|\omega_1| = |\omega_2|$ et, pour chaque n, les trajectoires $\big(\omega_1(s)\,,\ V_n(\omega_1) \leqslant s \leqslant V_{n+1}(\omega_1)\big)$ et $\big(\omega_2(s)\,,\ V_n(\omega_2) \leqslant s \leqslant V_{n+1}(\omega_2)\big)$ sont les mêmes à un facteur ± 1 près. En outre, cette filtration est représentable dans $\mathcal{F}$.*

Remarquer que la condition $|\omega_1| = |\omega_2|$ implique que ω_1 et ω_2 ont les mêmes zéros, donc $V_n(\omega_1) = V_n(\omega_2)$ et $V_{n+1}(\omega_1) = V_{n+1}(\omega_2)$.

DÉMONSTRATION. — Notons $\mathcal{G}''$ la filtration $\mathcal{F}/R''$. Pour $t > 0$, appelons $]U(t), V(t)[$ l'intervalle qui porte la plus longue excursion de B sur $[0, G_t]$, $]U'(t), V'(t)[$ celui qui porte la plus longue excursion sur $[V(t), G_t]$ et H''_t le signe de B sur $]U'(t), V'(t)[$. Le processus H'' est prévisible (et même continu à gauche) ;

puisque $H''_t = H''_{G_t}$, le mouvement brownien $B'' = \int H''\,dB$ est aussi égal à $H''B$ (formule du balayage). Si ω_1 et ω_2 sont liés par R'', ils ont la même trajectoire à un facteur ± 1 près sur l'intervalle $[V(t), t]$ donc $B''_t(\omega_1) = H''_t(\omega_1)B_t(\omega_1) = H''_t(\omega_2)B_t(\omega_2) = B''_t(\omega_2)$; ceci indique que B'' est adapté à $\mathcal{G}''$; il est en particulier indépendant de la suite $e = (e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Réciproquement, nous allons voir que B'' engendre la filtration $\mathcal{G}''$; en appliquant le lemme 1 à $\mathcal{K} = \mathcal{G}''$, $\mathcal{H} = \mathcal{F}$ et $X = B''$, il suffit de vérifier que B'' engendre la tribu $\mathcal{G}''_\infty = \mathcal{A}/R''$. Mais la formule $B = H''B''$ montre que $\mathcal{A}$ est engendrée par B'', les V_n et e; comme B'' a les mêmes zéros que B, les V_n sont eux-mêmes fonction de B'' et $\mathcal{A}$ est engendrée par B'' et e; toute variable aléatoire est donc de la forme $Z = \phi(B'', e)$ p. s. Si Z est mesurable pour $\mathcal{G}''_\infty$, elle est constante sur les classes d'équivalence pour R''; mais lorsque ω parcourt une classe d'équivalence, $B''(\omega)$ reste fixe et $e(\omega)$ décrit tout $\{-1,1\}^{\mathbb{Z}}$. En conséquence, en appelant μ la loi de e, on a aussi $Z = \int_{u\in\{-1,1\}^{\mathbb{Z}}} \phi(B'', u)\,\mu(du)$; comme ceci ne dépend que de B'', B'' engendre $\mathcal{G}''$.

Il reste à établir que $\mathcal{F}^{S^\infty} = \mathcal{G}''$. Appelons $M(t)$ et $M'(t)$ les milieux respectifs des intervalles $[U(t), V(t)]$ et $[U'(t), V'(t)]$, et Σ la transformation représentable $B \mapsto B''$, associée à H''. La composée $\Sigma\circ S$ est représentable, avec

$$\begin{aligned} H_t^{\Sigma\circ S} &= H''_t\circ S\; H^3_t = \operatorname{sgn}\left(B_{M'(t)}\circ S\right)\; \operatorname{sgn} B_{M(t)} = \operatorname{sgn} B^3_{M'(t)}\; \operatorname{sgn} B_{M(t)} \\ &= H^3_{M'(t)}\; \operatorname{sgn} B_{M'(t)}\; \operatorname{sgn} B_{M(t)} = \operatorname{sgn} B_{M'(t)} = H''_t\;; \end{aligned}$$

il en résulte que $\Sigma\circ S = \Sigma$, d'où $B''\circ S = B''$ et la filtration $\mathcal{G}''$, engendrée par B'', est invariante par S, donc incluse dans $\mathcal{F}^{S^\infty}$. Le mouvement brownien B'' est donc adapté à $\mathcal{F}^{S^\infty}$; pour montrer que sa filtration naturelle est $\mathcal{F}^{S^\infty}$, il suffit d'après le lemme 1 de vérifier qu'il engendre la tribu $\mathcal{F}^{S^\infty}_\infty$, c'est-à-dire que $S^{-k}(\mathcal{A})$ décroît vers $\mathcal{G}''_\infty$ quand k tend vers l'infini.

Mais $\mathcal{A}$ est engendrée par les tribus indépendantes $\mathcal{G}''_\infty$ et $\sigma(e)$; S laisse invariants les événements de $\mathcal{G}''_\infty$ et opère sur e par l'application τ du lemme 5. Le lemme 4 dit que $\bigcap_k S^{-k}(\mathcal{A}) = \mathcal{G}''_\infty \vee \bigcap_k \sigma(\tau^k\circ e)$; puisque $\bigcap_k \sigma(\tau^k\circ e)$ est dégénérée (lemme 5), $\bigcap_k S^{-k}(\mathcal{A}) = \mathcal{G}''_\infty$. ∎

La proposition 4 admet une variante, dans laquelle H^3_t est remplacé par le signe de la plus haute excursion de $|B|$ sur l'intervalle $[0, G_t]$; la démonstration, tout à fait semblable, conduit au même résultat (à condition de remplacer partout “plus longue excursion de B” par “plus haute excursion de $|B|$” dans la construction des variables aléatoires U_n et V_n).

La décomposition du mouvement brownien en les signes de ses accroissements sur des intervalles aléatoires et les tribus de Goswami-Rao de ces accroissements, que nous venons d'utiliser pour étudier les propriétés asymptotiques de certaines transformations représentables, peut aussi être mise à profit pour construire des transformations représentables de période finie. La proposition suivante apporte une réponse négative à une question formulée dans [1].

PROPOSITION 5. — *Pour tout entier $p > 1$, il existe une transformation représentable T de l'espace de Wiener qui commute avec les dilatations positives et qui vérifie $T \neq \mathrm{Id}$ et $T^p = \mathrm{Id}$.*

Lorsque p est pair, cet énoncé est trivialement satisfait avec $T(\omega) = -\omega$. Dans la suite, l'entier p est fixé et impair.

Nous noterons W l'espace produit $\{-1,1\}^{\mathbb{Z}}$; nous le munirons de la loi de Rademacher μ, pour laquelle les coordonnées sont indépendantes et de même loi uniforme sur $\{-1,1\}$.

LEMME 6. — *Il existe un entier $q>0$, une famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, périodique de période q, d'applications de $\{-1,1\}^{-\mathbb{N}^*}$ dans $\{-1,1\}$ et une transformation mesurable θ de W dans lui-même, définie presque partout pour μ et préservant μ, vérifiant $\theta \neq \mathrm{Id}$ et $\theta^p = \mathrm{Id}$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et presque tout $u \in W$, le produit $u_n\,\theta(u)_n$ s'écrive $f_n\big((u_{n-k})_{k>0}\big)$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 6. — Nous allons construire une application $t \neq \mathrm{Id}$ de $\{-1,1\}^{-\mathbb{N}^*}$ dans lui-même (au lieu de $\{-1,1\}^{\mathbb{Z}}$), préservant la mesure, vérifiant $t^p = \mathrm{Id}$ et telle que $u_n\,t(u)_n$ soit de la forme $f_n\big((u_{n-k})_{k>0}\big)$ pour une suite périodique $(f_n)_{n<0}$, de période q. Le lemme s'en déduira en définissant θ sur W par la formule $\theta(u)_n = t\big((u_{aq+m})_{m<0}\big)_{n-aq}$, où a est assez grand pour que $n-aq$ soit négatif; la condition de périodicité assurera que ceci ne dépend pas du choix d'un tel a.

Remplaçons le groupe multiplicatif $\{-1,1\}$ par le groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui lui est isomorphe. La seule modification à faire est de remplacer le produit par l'addition modulo 2, que nous noterons $\dot{+}$. En associant à tout $x \in [0,1]$ son développement dyadique $\sum_{n<0} u_n\, 2^n$, identifions les espaces probabilisés $\{0,1\}^{-\mathbb{N}^*}$ et $[0,1]$ (les ambiguïtés sont négligeables). L'application τ de $[0,1]$ dans lui-même définie par $\tau(x) \equiv x + 1/p$ (modulo 1) préserve la mesure et vérifie $\tau^p = \mathrm{Id}$ et $\tau \neq \mathrm{Id}$; en la transférant à $\{0,1\}^{-\mathbb{N}^*}$, on obtient une application t ayant les mêmes propriétés.

Nous devons vérifier que $u_n \dot{+} t(u)_n$ ne dépend que des u_m pour $m<n$. Mais l'algorithme d'addition des nombres réels développés en base 2 permet d'écrire $t(u)_n = u_n \dot{+} \alpha_n \dot{+} r_{n-1}$, où les $\alpha_k \in \{0,1\}$ sont définis par $1/p = \sum_{k<0} \alpha_k\, 2^k$ et où $r_{n-1} \in \{0,1\}$ est la retenue provenant des termes de rang $<n$; donc $u_n \dot{+} t(u)_n = \alpha_n \dot{+} r_{n-1}$ est une fonctionnelle des u_m pour $m<n$.

Enfin, puisque la suite des α_k est périodique (appelons q sa période), l'algorithme donnant u_n en fonction de $(u_{n-k})_{k\geqslant 0}$ dépend aussi de façon périodique de n. ∎

DÉFINITION. — *Appelons* subdivision optionnelle *tout ensemble aléatoire optionnel de la forme $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [\![R_n]\!]$ pour des variables aléatoires R_n telles que, pour presque tout ω, la famille $\big(R_n(\omega)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une subdivision. Une telle famille $(R_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sera appelée une* numérotation croissante *de l'ensemble.*

La subdivision optionnelle est seulement la réunion des graphes des R_n, et ne comporte pas l'information supplémentaire qui consisterait en la numérotation fournie par les R_n. (Pour avoir des définitions cohérentes, nous aurions dû, dans le cas déterministe, définir une subdivision comme l'*ensemble* des t_n au lieu de la famille; ceci n'aurait pas changé grand chose.)

On n'exige pas que les R_n soient des temps d'arrêt; il peut arriver qu'une subdivision optionnelle soit impossible à numéroter par des temps d'arrêt strictement croissants. C'est le cas, par exemple, de la subdivision optionnelle union des graphes des V_n considérés plus haut : c'est l'ensemble Γ de toutes les fins des excursions qui sont plus longues que toute excursion antérieure. Le comportement de cette subdivision optionnelle Γ sous les dilatations $(D_\lambda\omega)(t) = \lambda^{-1}\omega(\lambda^2 t)$ donne lieu à une propriété d'invariance d'échelle : $\big(t, D_\lambda(\omega)\big) \in \Gamma$ si et seulement si $(\lambda^2 t, \omega) \in \Gamma$.

LEMME 7. — *Soit $q \geqslant 1$ un entier. Il existe, sur l'espace de Wiener pourvu de la filtration des zéros browniens, deux subdivisions optionnelles Γ' et Γ'' incluses dans la subdivision optionnelle Γ définie ci-dessus, vérifiant la propriété d'invariance d'échelle, telles que $\Gamma'' \subset \Gamma'$ et que deux points consécutifs de Γ'' soient toujours séparés par exactement $q-1$ points de Γ'.*

Pour $q = 1$, ce lemme est trivial : prendre $\Gamma'' = \Gamma' = \Gamma$. Pour $q \geqslant 2$, il signifie que bien qu'il ne soit pas possible de numéroter les points de Γ' de façon adaptée (par des temps d'arrêt), on peut, de façon adaptée, les numéroter cycliquement modulo q : affecter la valeur 0 aux points de Γ'', la valeur 1 aux points de Γ' qui suivent immédiatement un point de Γ'', etc.

DÉMONSTRATION DU LEMME 7. — Nous supposons $q \geqslant 2$. Reprenons des notations déjà utilisées : les intervalles portant les excursions plus longues que toute excursion antérieure sont appelés $]U_n, V_n[$, la numérotation étant choisie telle que $V_0 < 1 \leqslant V_1$; de plus, Γ est la réunion des graphes des V_n.

Les deux plus longues excursions de l'intervalle $[V_{n-1}, U_n]$ peuvent être classées par ordre de longueur ou par ordre chronologique; nous poserons $\xi_n = 1$ si ces deux ordres coïncident et $\xi_n = -1$ s'ils sont inverses. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, la transformation consistant à retourner le temps sur l'intervalle $[V_{n-1}, U_n]$ préserve la mesure de Wiener; il en résulte que les variables aléatoires ξ_n sont indépendantes et uniformément distribuées sur $\{-1, 1\}$. Il existe donc presque sûrement des valeurs de n arbitrairement voisines de $-\infty$ et des valeurs de n arbitrairement voisines de $+\infty$ telles que $\xi_{n-q+1} = \ldots = \xi_n = 1$ (respectivement $\xi_n = -1$); ceci permet de définir la subdivision optionnelle

$$\Gamma'' = \{t > 0 \ : \ \exists n \in \mathbb{Z} \ \ t = V_n \text{ et } \xi_{n-q} = -1, \xi_{n-q+1} = \ldots = \xi_n = 1\} \subset \Gamma$$

qui possède la propriété d'invariance d'échelle et est telle que deux points consécutifs de Γ'' sont séparés par au moins $q-1$ points de Γ. Il ne reste qu'à définir Γ' comme l'ensemble des points de Γ qui comptent un point de Γ'' parmi leurs $q-1$ prédécesseurs immédiats dans Γ. ∎

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5 — Étant donné p, le lemme 6 fournit θ et q et le lemme 7 donne Γ' et Γ''. Si $(R''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une numérotation croissante de Γ'', il existe une (unique) numérotation croissante $(R'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de Γ' telle que, pour tout n, $R''_n = R'_{qn}$. Pour $0 \leqslant \ell < q$, l'ensemble

$$A_\ell = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]\!] R'_{\ell+nq}, R'_{\ell+nq+1}]\!]$$

est formé des instants $t > 0$ tels que Γ' comporte exactement ℓ points entre $\sup(\Gamma'' \cap]0, t[)$ et t; cet ensemble A_ℓ dépend de Γ' et Γ'' et non du choix des R'_n et des R''_n. Fixant $\varepsilon > 0$, on aurait pu choisir les R''_n tels que R''_0 soit le début de $\Gamma'' \cap]\varepsilon, \infty[$; tous les R''_n pour $n \geqslant 0$ seraient alors des temps d'arrêt et $A_\ell \cap]\!] R''_0, \infty [\![$ serait donc prévisible; faisant maintenant tendre ε vers zéro, on voit que A_ℓ est prévisible comme union dénombrable de prévisibles. Il posssède en outre la propriété d'invariance d'échelle.

Chacun des instants R'_n est une fin d'excursion (car $\Gamma' \subset \Gamma$); soit $s_n = (\operatorname{sgn} B)_{R'_n -}$ le signe de cette excursion. Le processus S à valeurs dans $\{-1, 1\}^{-\mathbb{N}^*}$ qui prend la valeur $(s_{n-k})_{k>0}$ sur $]\!]R'_{n-1}, R'_n]\!]$ est prévisible (on peut raisonner comme si les R'_n étaient des temps d'arrêt par le même argument que ci-dessus). La théorie des excursions entraîne que, conditionnellement aux zéros de B, les s_n sont indépendants et de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. En utilisant le lemme 6, on peut définir un processus prévisible

$$H = \sum_{\ell=0}^{q-1} \mathbb{1}_{A_\ell}\, f_\ell \circ S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s_n\, \theta(s)_n\, \mathbb{1}_{]\!]R'_{n-1}, R'_n]\!]}$$

à valeurs dans $\{-1, 1\}$. La transformation représentable T qui lui est associée commute avec les dilatations positives (en raison de l'invariance d'échelle); pour un ω fixé, elle change en bloc le signe de B sur chacun des intervalles $]R'_{n-1}(\omega), R'_n(\omega)]$ de façon que son opération sur les s_n soit donnée par θ; il en résulte que $T \neq \mathrm{Id}$ et $T^p = \mathrm{Id}$. ∎

REMARQUE. — Si l'on n'exige pas que T commute avec les dilatations, la démonstration de la proposition 5 peut être notablement simplifiée : on peut travailler avec une subdivision fixe $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et prendre au lieu de s_n le signe de $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$; le lemme 6 se simplifie également, puisque l'on n'a plus besoin de la périodicité de l'algorithme fournissant θ. Ceci permet de ne pas traiter à part le cas où p est pair et fournit une transformation représentable T telle que $T^p = \mathrm{Id}$ et $T^{p'} \neq \mathrm{Id}$ pour tout $p' < p$.

Avec les propositions 3 et 4, nous avons étudié des suites décroissantes de filtrations browniennes obtenues par itération d'une même transformation. De façon analogue, on pourrait s'intéresser à des semi-groupes continus $(T_s)_{s\geqslant 0}$ de transformations browniennes donnant lieu à des familles strictement décroissantes de filtrations browniennes. Il est facile de donner des exemples de tels semigroupes; le plus simple est certainement le semi-groupe de dilatations défini par $T_s(\omega) = \omega'$ si $\omega'(t) = e^s\omega(te^{-2s})$; l'action de T_s sur la filtration est simplement l'homothétie de rapport e^{-2s} sur l'axe des temps.

En revanche, nous ignorons s'il existe un semi-groupe $(T_s)_{s\geqslant 0}$ de transformations browniennes *représentables* transformant $\mathcal{F}$ en une famille strictement décroissante de filtrations browniennes.

RÉFÉRENCES

[1] S. Attal. Thèse de doctorat. Université de Strasbourg, 1994.

[2] S. Attal. Représentation des endomorphismes de l'espace de Wiener qui préservent les martingales. *Ann. Inst. Henri Poincaré,* à paraître.

[3] L. E. Dubins, J. Feldman, M. Smorodinsky & B. Tsirelson. Decreasing Sequences of σ-Fields and a Measure Change for Brownian Motion. Prépublication, soumise à *Ann. Prob.*

[4] A. Goswami & B. V. Rao. Conditional Expectation of Odd Chaos given Even. *Stochastics and Stochastic Reports 35,* 213–214, 1991.

[5] T. Jeulin & M. Yor. Filtration des ponts browniens et équations différentielles stochastiques linéaires. *Séminaire de Probabilités XXIV*, Lecture Notes in Mathematics 1426, Springer 1990.

[6] J.-F. Le Gall & M. Yor. Sur l'équation stochastique de Tsirelson. *Séminaire de Probabilités XVII*, Lecture Notes in Mathematics 986, Springer 1983.

[7] T. Lindvall & L. C. G. Rogers. Coupling of Multidimensional Diffusions by Reflection. *Ann. Prob. 14*, 860–872, 1986.

[8] P.-A. Meyer. Probabilités et Potentiel. Hermann, 1966.

[9] P.-A. Meyer. Sur une transformation du mouvement brownien due à Jeulin et Yor. *Séminaire de Probabilités XXVIII*, Lecture Notes in Mathematics 1583, Springer 1994.

[10] D. Revuz & M. Yor. Continuous Martingales and Brownian Motion. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften,* Springer 1991.

[11] M. Yor. Tsirel'son's Equation in Discrete Time. *Probab. Theory Relat. Fields 91,* 135–152, 1992.

S. Attal et M. Émery
I.R.M.A., Université Louis Pasteur
Département de Mathématiques
7 rue René Descartes
67 084 Strasbourg Cedex
France

K. Burdzy(*)
Department of Mathematics
University of Washington
Seattle WA 98195
U. S. A.

Y. Hu
Université Pierre et Marie Curie
Laboratoire de Probabilités
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05
France

(*) Research supported in part by NSF grant DMS 91-00244 and AMS Centennial Research Fellowship.