PASCALE MONAT

Remarques sur les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 28 (1994), p. 92-97
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__92_0>

REMARQUES SUR LES INEGALITES DE BURKHOLDER-DAVIS-GUNDY

par P. Monat

Laboratoire de Mathématiques, URA CNRS 741, 16 Route de Gray, 25030 Besançon Cedex.

Les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy donnent un encadrement de $||\,[M,M]_\infty^{1/2}\,||_p$ par $||sup\{|M_t|\ /\ t \geq 0\}||_p$ où M est une martingale. Ces inégalités sont vraies pour tout p strictement positif si la martingale est continue. En revanche, si la martingale n'est pas continue, il est bien connu que les inégalités sont fausses pour p strictement compris entre 0 et 1. Toutefois, il est assez difficile de trouver des contre-exemples dans la littérature : nous sommes partis d'un article de E. Lenglart, D. Lépingle et M. Pratelli paru dans le Séminaire de Probabilités XIV **[4]**, qui citait en référence un article de D. Burkholder et R. Gundy **[1]** datant de 1970, qui lui-même renvoyait à un article de J. Marcinkiewicz et A. Zygmund **[5]** datant de 1938 ! C'est pourquoi nous avons jugé utile de les rappeler afin que les lecteurs du Séminaire de Probabilités disposent d'une référence bibliographique plus accessible.
Dans une seconde partie, nous allons nous intéresser au rapport entre la convergence en probabilité vers 0 du crochet droit et de la borne supérieure d'une suite de martingales. Dans le cas continu, ces deux convergences sont équivalentes. Mais dans le cas discontinu, ce résultat ne se généralise pas. Ce problème a été soulevé par F. Delbaen et W. Schachermayer. Il était déjà sous-jacent dans un article de M. Emery paru dans le Séminaire de Probabilités XIV **[2]**. Nous allons donner deux contre-exemples construits à partir de ceux de la première partie et montrant qu'aucune des convergences en probabilité n'implique l'autre dans le cas discontinu.

I. Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy

1. Quelques rappels et notations

Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy
Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale continue définie sur un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ vérifiant les conditions habituelles. Soit $p > 0$. Alors il existe deux constantes c_p et C_p, $0 < c_p < C_p < +\infty$, telles que :

(1) $c_p||M^*_\infty||_p \leq ||\,[M,M]_\infty^{1/2}\,||_p$ et **(2)** $||\,[M,M]_\infty^{1/2}\,||_p \leq C_p||M^*_\infty||_p$

où $M^*_t = sup\{|M_s|\ /\ 0 \leq s \leq t\}$

Dans le cas où la martingale n'est pas continue, les inégalités **(1)** et **(2)** ne restent valables que si $p \geq 1$. Les deux contre-exemples suivants sont dus à J. Marcinkiewicz et A. Zygmund **[5]**.

2. Un contre-exemple de l'inégalité (1) (cas où $0 < p < 1$ et M discontinue)

Soit $0 < p < 1$ et pour tout $n \geq 1$, soit $(M_k^n)_{k \geq 0}$ une martingale, nulle en zéro, telle que ses accroissements $\left(M_k^n - M_{k-1}^n\right)_{k \geq 1}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, égales à 1 avec probabilité $1 - \frac{1}{n+1}$ et à $-n$ avec probabilité $\frac{1}{n+1}$.

Par définition, $[M^n, M^n]_k = \sum_{l=1}^k \left(M_l^n - M_{l-1}^n\right)^2$, donc $[M^n, M^n]_k = k$ avec probabilité $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k$ et sur l'ensemble complémentaire, $0 \leq [M^n, M^n]_k \leq kn^2$.
Par conséquent, $\| \, [M^n, M^n]_k^{1/2} \, \|_p^p \leq k^{p/2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k + (kn^2)^{p/2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k\right)$.
D'autre part, $|M_k^n| = \left|\sum_{l=1}^k \left(M_l^n - M_{l-1}^n\right)\right| = |k_1 - k_2 n|$ *P.p.s.* avec $k_1 + k_2 = k$.

Si $k_2 = 0$, alors $k_1 = k$ donc $|M_k^n| = k$ *P.p.s.*
Si $k_2 \neq 0$ et si $n > 2k$, alors $|M_k^n| = k_2 n - k_1 \geq n - k \geq k$ *P.p.s.*
Donc, dans tous les cas, $\| \, (M^n)_k^* \, \|_p^p \geq k^p$.

Si l'égalité **(1)** était vérifiée, on aurait :

$$c_p^p k^p \leq k^{p/2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k + \left(kn^2\right)^{p/2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k\right)$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient :

$$\forall k \geq 1, \ \lim_{n \to +\infty} (kn^2)^{p/2} \left(1 - \left(1 - \tfrac{1}{n+1}\right)^k\right) = 0 \text{ car } 0 < p < 1.$$

Donc, à la limite, on aurait : $\forall k \geq 1, \ c_p^p k^p \leq k^{p/2}$, ce qui établit la contradiction.

3. Un contre-exemple de l'inégalité (2) (cas où $0 < p < 1$ et M discontinue)

Soit $0 < p < 1$ et $(M^n)_{n \geq 1}$ une suite de martingales telle que :

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, M_0^n = 0 \ ; \ \left((-1)^{k-1} \left(M_k^n - M_{k-1}^n\right)\right)_{k \geq 1} \textit{ est une suite i.i.d.} \\ P\left((-1)^{k-1} \left(M_k^n - M_{k-1}^n\right) = 1\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \ ; \ P\left((-1)^{k-1} \left(M_k^n - M_{k-1}^n\right) = -n\right) = \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

Par définition, $[M^n, M^n]_k = \sum_{l=1}^k \left(M_l^n - M_{l-1}^n\right)^2$, donc $[M^n, M^n]_k$ est à valeurs dans $\{k - l + l\, n^2 \ / \ 0 \leq l \leq k\}$, et comme $\left((-1)^{k-1} \left(M_k^n - M_{k-1}^n\right)\right)_{k \geq 1}$ est une suite i.i.d., on peut calculer $\| \, [M^n, M^n]_k^{1/2} \, \|_p$, ce qui donne :

$$\| \, [M^n, M^n]_k^{1/2} \, \|_p^p = k^{p/2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k + \sum_{l=1}^k \left(\sqrt{k - l + ln^2}\right)^p C_k^l \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{k-l} \left(\frac{1}{n+1}\right)^l$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} || [M^n, M^n]_k^{1/2} ||_p^p = k^{p/2}$, car $0 < p < 1$ donc, pour tout $l \geq 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{k - l + ln^2}\right)^p C_k^l \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{k-l} \left(\frac{1}{n+1}\right)^l = 0$$

D'autre part,

$$(M^n)_k^* = sup\{|M_l^n| \ / \ 0 \leq l \leq k\} = sup\left\{ |\sum_{j=1}^{l} \left(M_j^n - M_{j-1}^n\right)| \ / \ 0 \leq l \leq k \right\}$$

Donc, $(M^n)_k^* = 1$ si et seulement si $\forall l \in \{1, ..., k\}$ $(-1)^{l-1}\left(M_l^n - M_{l-1}^n\right) = 1$.
Par conséquent, $(M^n)_k^* = 1$ avec probabilité $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k$, et lorsque $(M^n)_k^* \neq 1$, on a $(M^n)_k^* \leq kn$, ce qui nous donne l'inégalité suivante :

$$|| (M^n)_k^* ||_p^p \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k + k^p n^p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k\right)$$

Comme $0 < p < 1$, $\lim_{n\to+\infty} k^p n^p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k\right) = 0$, donc si l'inégalité **(2)** était vérifiée, on aurait à la limite :

$\forall k \geq 1$, $\left(\sqrt{k}\right)^p \leq C_p^p$, ce qui établit la contradiction.

II. Convergence en probabilité du crochet et de la borne supérieure

1. Cas continu

Si M^n est une suite de martingales continues, alors $(M^n)_\infty^*$ converge en probabilité vers zéro si et seulement si $[M^n, M^n]_\infty$ converge aussi en probabilité vers zéro. Ce résultat est bien connu (voir, par exemple, D. Revuz et M. Yor **[6]**). Soucieux de présenter un résultat complet, nous allons dans un premier temps donner une démonstration de ce théorème.

Théorème : Soit $(M^n)_{n\geq 1}$ une suite de martingales continues définies sur un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ vérifiant les conditions habituelles. Alors :

$$\left([M^n, M^n]_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0\right) \Longleftrightarrow \left((M^n)_\infty^* \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0\right)$$

Démonstration : Supposons que $[M^n, M^n]_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0$.
Pour tout $n > 0$, soit T_n le temps d'arrêt défini par :

$$T_n = \begin{cases} inf\,\{t \geq 0 \ / \ [M^n, M^n]_t \geq 1\} & si \ \{t \geq 0 \ / \ [M^n, M^n]_t \geq 1\} \neq \emptyset \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

Alors, $0 \leq [M^n, M^n]_{T_n} \leq 1 \wedge [M^n, M^n]_\infty$, car $(M^n)_{n\geq 1}$ est une suite de martingales continues, donc $[M^n, M^n]_{T_n}^{1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} 0$.
D'autre part, d'après les inégalités de Davis :

$$0 \leq C_1 \ E\left((M^n)_{T_n}^*\right) \leq E\left([M^n, M^n]_{T_n}^{1/2}\right)$$

Donc, $(M^n)^*_{T_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} 0$ et *a fortiori*, $(M^n)^*_{T_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0$.
Or, $(M^n)^*_\infty = (M^n)^*_{T_n}\ \mathbf{1}_{\{T_n=+\infty\}} + (M^n)^*_\infty\ \mathbf{1}_{\{T_n<+\infty\}}$, donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} 0 \leq P\left((M^n)^*_\infty \geq \varepsilon\right) &\leq P\left((M^n)^*_{T_n}\ \mathbf{1}_{\{T_n=+\infty\}} \geq \varepsilon\right) + P\left((M^n)^*_\infty\ \mathbf{1}_{\{T_n<+\infty\}} \geq \varepsilon\right) \\ &\leq P\left((M^n)^*_{T_n} \geq \varepsilon\right) + P\left(T_n < +\infty\right) \end{aligned}$$

$\lim_{n\to+\infty} P\left((M^n)^*_{T_n} \geq \varepsilon\right) = 0$ d'après la convergence en probabilité de $\left((M^n)^*_{T_n}\right)_{n\geq 1}$.
$\lim_{n\to+\infty} P\left(T_n < +\infty\right) = 0$ car :

$[M^n, M^n]_\infty$ converge en probabilité vers 0.

$$P\left(T_n < +\infty\right) = P\left(\exists t \geq 0\ t.q.\ [M^n, M^n]_t \geq 1\right) = P\left([M^n, M^n]_\infty \geq 1\right)$$

car $\left([M^n, M^n]_t\right)_{t\geq 0}$ est un processus croissant.

Donc, $(M^n)^*_\infty$ converge en probabilité vers 0, ce qui achève la démonstration de la partie directe.

L'implication réciproque se démontre de façon analogue.

Remarque : Le théorème précédent est faux lorsque les martingales ne sont pas continues. Les deux sens de l'équivalence peuvent être mis en défaut, comme le montrent les deux contre-exemples suivants.

2. Contre-exemple de $\left([M^n, M^n]_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0\right) \Longrightarrow \left((M^n)^*_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0\right)$

Soit $\left((M^n_k)_{k\geq 0}\right)_{n\geq 1}$ une suite de martingales, nulles en zéro, telles que leurs accroissements $\left(M^n_k - M^n_{k-1}\right)_{k\geq 1}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, égales à $\frac{1}{k_n}$ avec probabilité $1 - \frac{1}{n+1}$ et à $\frac{-n}{k_n}$ avec probabilité $\frac{1}{n+1}$, où $(k_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs, strictement croissante, tendant vers l'infini, que l'on précisera ultérieurement.

Par définition, $[M^n, M^n]_{k_n} = \sum_{l=1}^{k_n} \left(M^n_l - M^n_{l-1}\right)^2$, donc, $[M^n, M^n]_{k_n} = \frac{1}{k_n}$ avec probabilité $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{k_n}$.
Si on suppose, de plus, que $\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{n} = 0$ (par exemple : $k_n = \sqrt{n}$), on a :

$$[M^n, M^n]_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0$$

D'autre part, $|M^n_{k_n}| = |\sum_{l=1}^{k_n} \left(M^n_l - M^n_{l-1}\right)| = \frac{1}{k_n}|k_1 - k_2 n|$ *P.p.s.* avec $k_1 + k_2 = k_n$.

Si $k_2 = 0$ alors $k_1 = k_n$ donc $|M^n_{k_n}| = 1$ *P.p.s.*
Si $k_2 \neq 0$ et si $n > 2k_n$ à partir d'un certain rang, par exemple si $k_n = \sqrt{n}$, alors :

$$|M^n_{k_n}| = \frac{k_2 n - k_1}{k_n} \geq \frac{n - k_n}{k_n} \geq 1\ P.p.s.$$

Donc, dans tous les cas, $(M^n)^*_{k_n} \geq 1$ *P.p.s.*
En conclusion, $\left((M^n)^*_{k_n}\right)_{n\geq 1}$ ne tend pas vers 0.

3. Contre-exemple de $\left((M^n)^*_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0\right) \Longrightarrow \left([M^n,M^n]_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0\right)$

Soit $(M^n)_{n\geq 1}$ une suite de martingales telle que :

$$\forall n \geq 1, M_0^n = 0 \; ; \; \left((-1)^{k-1}\left(M_k^n - M_{k-1}^n\right)\right)_{k\geq 1} \textit{ est une suite i.i.d.}$$

$$P\left((-1)^{k-1}\left(M_k^n - M_{k-1}^n\right) = \frac{1}{\sqrt{k_n}}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$P\left((-1)^{k-1}\left(M_k^n - M_{k-1}^n\right) = -\frac{n}{\sqrt{k_n}}\right) = \frac{1}{n+1}$$

où $(k_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs, strictement croissante, tendant vers l'infini, que l'on précisera ultérieurement.

Par définition, $[M^n,M^n]_{k_n} = \sum_{l=1}^{k_n}\left(M_l^n - M_{l-1}^n\right)^2$, donc $[M^n,M^n]_{k_n} = 1$ si et seulement si $\forall l \in \{1,...,k_n\}$, $\left(M_l^n - M_{l-1}^n\right)^2 = \frac{1}{k_n}$.
D'où $P\left([M^n,M^n]_{k_n} = 1\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{k_n}$.
Si on suppose de plus que $\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{n} = 0$ (par exemple : $k_n = \sqrt{n}$), on a :

$$[M^n,M^n]_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 1$$

D'autre part,

$$(M^n)^*_{k_n} = sup\{|M_l^n| \; / \; 0 \leq l \leq k_n\} = sup\{|\sum_{j=1}^{l}\left(M_j^n - M_{j-1}^n\right)| \; / \; 0 \leq l \leq k_n\}$$

Donc $(M^n)^*_{k_n} = \frac{1}{\sqrt{k_n}}$ si et seulement si $\forall l \in \{1,...,k_n\}$ $(-1)^{l-1}\left(M_l^n - M_{l-1}^n\right) = \frac{1}{\sqrt{k_n}}$.
D'où $P\left((M^n)^*_{k_n} = \frac{1}{\sqrt{k_n}}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{k_n}$.
Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{n} = 0$ (par exemple : $k_n = \sqrt{n}$), alors $(M^n)^*_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0$.

Bibliographie

[1] D.L. Burkholder & R.F. Gundy :
Extrapolation and Interpolation of Quasi-Linear Operators on Martingales.
Acta Math., 124 (1970), p.249-304.

[2] M. Emery :
Métrisabilité de quelques espaces de processus aléatoires.
Séminaire de Probabilités XIV, Lecture Notes in Math., 784, Springer 1978/79.

[3] J. Jacod :
Calcul stochastique et problèmes de martingales.
Lecture Notes in Math., 714, Springer 1979.

[4] E. Lenglart, D. Lépingle & M. Pratelli :
Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales.
Séminaire de Probabilités XIV, Lecture Notes in Math., 784, Springer 1978/79.

[5] J. Marcinkiewicz & A. Zygmund :
Quelques théorèmes sur les fonctions indépendantes.
Studia Math.,7 (1938), p.104-120.

[6] D. Revuz & M. Yor :
Continuous Martingales and Brownian Motion.
Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 293, Springer-Verlag 1991.