SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

FRANÇOIS COQUET
JEAN MÉMIN

Vitesse de convergence en loi pour des solutions d'équations différentielles stochastiques vers une diffusion

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 28 (1994), p. 279-292
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__279_0>

VITESSE DE CONVERGENCE EN LOI POUR DES SOLUTIONS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES VERS UNE DIFFUSION

François Coquet et Jean Mémin

IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex.

Résumé. Etant donnée une suite (M^n) de martingales de carré intégrable convergeant vers un mouvement brownien, on étudie, en fonction de la vitesse de convergence des variations quadratiques de cette suite, la vitesse de convergence de solutions d'équations différentielles conduites par les M^n.

Abstract. Being given sequence of square-integrable martingales M^n converging to a Brownian motion, we study the rate of convergence for solutions of stochastic differential equations driven by the M^n's, in terms of the rate of convergence of the quadratic variations of the sequence.

I. Introduction- Enoncé du résultat principal

On considère :
-un nombre réel x_0 et un nombre réel positif T ;
-une martingale de carré intégrable M à valeurs réelles, définie sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, P)$;
-une application $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, bornée par un nombre N et lipschitzienne de coefficient L ;
-l'unique solution X de l'équation différentielle stochastique

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_{s_-})dM_s; \tag{1}$$

-un mouvement brownien standard B défini sur un espace filtré $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}, P')$, à valeurs réelles ;
-l'unique solution Y de l'équation différentielle stochastique

$$Y_t = x_0 + \int_0^t \sigma(Y_s)dB_s. \tag{2}$$

Soit $D([0,T], \mathbf{R})$ l'espace des fonctions de $[0,T]$ dans $\mathbf{R}$) continues à droite et admettant des limites à gauche, muni de la distance de Skorokhod d et de sa tribu des boréliens $\mathcal{D}$. Etant donnés deux processus X et Y à valeurs dans $D([0,T], \mathbf{R})$, la distance de Lévy-Prokhorov $\Pi(P_X, P_Y)$ (notée $\Pi(X,Y)$) entre leurs lois est définie par :

$$\Pi(X,Y) = \inf\{\epsilon > 0 : \forall A \in \mathcal{D}, P_X(A) \leq P_Y(A^\epsilon) + \epsilon\},$$

où $A^\epsilon = \{x : d(A,x) < \epsilon\}$, et $d(A,x) = \inf_{x'\in A} d(x,x')$.

Nous nous proposons dans cet article de majorer, sous nos définitions, $\Pi(X,Y)$. Dans l'article [1], écrit en commun avec L. Vostrikova, nous avons estimé $\Pi(M,B)$ notamment à partir de caractéristiques prévisibles. Nous chercherons ici à obtenir une estimation en fonction de l'écart des variations quadratiques de M et B. $[M]$ désigne la variation quadratique de M. Rappelons par ailleurs que la distance de Ky-Fan associée à la topologie de la convergence uniforme entre un processus càdlàg A et un processus continu B définis sur le même espace probabilisé s'écrit

$$\mathcal{K}(A,B) = \inf\{\epsilon : P(\|A-B\|_T \geq \epsilon) \leq \epsilon\},$$

avec la notation $\|A-B\|_T = \sup_{0\leq t\leq T} |A_t - B_t|.$.
La distance de Lévy-Prokhorov entre les lois de A et B est alors plus petite que $\mathcal{K}(A,B)$ ([1], lemme 1 p. 11).
A partir du théorème 2 de [1], il est facile de montrer qu'on a aussi

$$\Pi(M,B) \leq O(\mu^{1/9}|\ln\mu|^{1/2})$$

où $\mu = E\Big[\sup_{t\leq T} |[M]_t - t|\Big]$.

Le principal résultat de cet article est l'estimation de $\Pi(X,Y)$ en fonction de μ : plus précisément, nous obtenons le

Théorème 1. *Sous les hypothèses précédentes,*

$$\Pi(X,Y) \leq O(\mu^{1/16}). \tag{3}$$

Comme la distance de Lévy-Prokhorov métrise la topologie de la convergence en loi, nous retrouvons donc par un argument métrique un cas particulier des résultats de Słominski [11], et Mémin et Słominski [7] sur la stabilité des solutions d'équations différentielles stochastiques moyennant la condition dite "U.T.". Il est du reste facile de montrer que cette condition "U.T." est vérifiée pour une suite de martingales de carré intégrable (M^n) convergeant en loi vers un mouvement brownien, et vérifiant en outre $\mu^n \to 0$, avec $\mu^n = E\Big[\sup_{t\leq T} |[M^n]_t - t|\Big]$.

II. La preuve

La méthode utilisée est sensiblement la même que dans [1].
a. Tout d'abord, pour $\beta > 0$ (à déterminer ultérieurement), on introduit la martingale M^β obtenue par exclusion des sauts de M d'amplitude supérieure à β en valeur absolue, en d'autres termes

$$M_t^\beta = M_t - \int_0^t \int_{|x|>\beta} x d(\eta - \nu).$$

(η désigne la mesure des sauts de M, et ν son compensateur prévisible ; pour toutes ces notions, voir Jacod et Shiryaev [5]). En notant $X(\beta)$ la solution de l'équation

$$X_t(\beta) = x_0 + \int_0^t \sigma(X_{s-}(\beta) dM_s^\beta, \tag{4}$$

on majore alors, au moyen d'un lemme de type Gronwall, la distance de Ky-Fan $\mathcal{K}(X, X(\beta))$ à partir de μ.

b. Pour estimer $\Pi(M^\beta, B)$, on utilise le théorème de plongement d'une martingale de carré intégrable dans un mouvement brownien (Monroe [9], Kubilius [6]) dans la version du théorème 1 de [1]. On plonge ainsi M^β dans un mouvement brownien W défini sur un espace filtré $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, (\overline{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, \overline{P})$, à partir d'un changement de temps (τ_t), et avec notamment la propriété $\mathcal{L}((M^\beta, [M^\beta])|P) = \mathcal{L}((W_\tau, [W_\tau])|\overline{P})$. On notera E l'espérance relativement à la probabilité P sur Ω, et $\overline{E}$ relativement à probabilité $\overline{P}$ sur $\overline{\Omega}$.
Si $\overline{Y}$ désigne la solution de (2) sur l'espace $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, (\overline{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, \overline{P})$ relativement au mouvement brownien W, et $\overline{X}$ la solution de (4) sur ce même espace, on a alors à estimer les distances $\mathcal{K}(\overline{X}, \overline{Y}_\tau)$ et $\mathcal{K}(\overline{Y}_\tau, \overline{Y})$. La première estimation s'obtient en comparant les approximations discrètes de (2) et (4) ; la seconde s'appuie sur une inégalité exponentielle pour les martingales continues, et sur des estimations analogues à celles obtenues dans la démonstration du théorème 2 de [1].

Les sous-paragraphes 1., 2. et 3. ci-dessous donnent le détail de ces différentes étapes ; le sous-paragraphe 4. recolle les morceaux en déterminant le choix optimal de β.

1. Estimation de $\mathcal{K}(X, X(\beta))$.

Posons $U_t = \|X - X(\beta)\|_t$ et $A_t = [M^\beta]_t$.
Nous commençons par démontrer le lemme de type Gronwall suivant, en calquant la démonstration sur celles de Jacod et Mémin [4], ou Métivier et Pellaumail [8], paragraphe 29:

Lemme 1. *S'il existe des constantes K et γ telles que $A_T \leq K$ p.s. et $\|\Delta A\|_T \leq \frac{1}{8\gamma^2}$, et s'il existe de plus une constante positive α telle que, pour tout temps d'arrêt $\tau \leq T$,*

$$E(U_\tau) \leq \gamma E\Big(\Big(\int_0^\tau U_{s-}^2\, dA_s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big) + \alpha,$$

alors

$$E(U_\tau) \leq 2\alpha \sum_{0\leq i\leq m} (2\gamma K^{1/2})^i, \tag{5}$$

où m est la partie entière de $8\gamma^2 K - 1$.

Preuve. On pose $S_0 = 0$ et, pour $0 \leq k \leq m$, $S_{k+1} = \inf\{t > S_k, A_t - A_{s_k} \geq 1/8\gamma^2\} \wedge T$; si $x_k = E(U_{S_k})$, on obtient, sous les hypothèses du lemme,

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &\leq \alpha + \gamma E\Big[\Big(\int_0^{S_k} U_{s-}^2\, dA_s + \int_{S_k}^{S_{k+1}} U_{s-}^2\, dA_s\Big)^{1/2}\Big] \\
&\leq \alpha + \gamma E\Big[\Big(\int_0^{S_k} U_{s-}^2\, dA_s\Big)^{1/2} + \Big(U_{S_{k+1}}^2 (A_{S_{k+1}} - A_{S_k})\Big)^{1/2}\Big] \\
&\leq \alpha + \gamma \mathcal{K}^{1/2} x_k + \frac{1}{2} x_{k+1}
\end{aligned}$$

(le dernier terme provenant du fait que

$$A_{S_{k+1}} - A_{S_k} \leq \frac{1}{8\gamma^2} + \Delta A_{S_{k+1}} \leq \frac{1}{4\gamma^2}.)$$

On en déduit donc

$$x_{k+1} \leq 2\alpha + 2\gamma K^{1/2} x_k$$

puis, par itération,

$$x_{k+1} \leq 2\alpha \sum_{0 \leq i \leq k} (2\gamma K^{1/2})^i.$$

Il suffit alors de remarquer que $S_m = T$ pour achever la démonstration. ∎

Nous pouvons maintenant en venir à notre estimation :

Lemme 2. *Pour* $0 < \lambda < 1/2$*, dès que* $\mu^\lambda = \beta \leq \dfrac{1}{16\sqrt{2}L}$*, on a*

$$\mathcal{K}(X, X(\beta)) \leq O(\mu^{\frac{1-2\lambda}{4} \wedge 1/16}). \tag{6}$$

Preuve. Soient $\epsilon > 0$ et S un temps d'arrêt tel que $S \leq T$; on a

$$\begin{aligned}
\epsilon P\Big[\|X - X(\beta)\|_S \geq \epsilon\Big] &\leq E\Big[\|X - X(\beta)\|_S\Big] \\
&\leq E\Big[\Big\|\int_0^{\cdot} (\sigma(X_{s-}) - \sigma(X_{s-}(\beta)))dM_s^\beta\Big\|_S\Big] + E\Big[\Big\|\int_0^{\cdot} (\sigma(X_{s-})d(M_s - M_s^\beta)\Big\|_S\Big] \\
&\leq 4LE\Big[\Big(\int_0^S |X_{s-} - X_{s-}(\beta)|^2 d[M^\beta]\Big)^{1/2}\Big] + NE\Big[[M - M^\beta]_T^{1/2}\Big],
\end{aligned}$$

où l'on a appliqué l'inégalité de Burkholder-Gundy (voir Dellacherie et Meyer [2] p.303) pour la dernière inégalité.
Maintenant, on a uniformément en t $|\Delta M_t^\beta| \leq 2\beta$, d'où $\Delta[M^\beta]_t \leq 4\beta^2$, et les hypothèses du lemme 1 sont donc vérifiées si on prend $\beta^2 \leq \dfrac{1}{128L^2}$ et $\gamma = 4L$, et si on suppose que $[M^\beta]_T$ est plus petit qu'une certaine constante K.
Le lemme 1 donne alors

$$E\Big[\|X - X(\beta)\|_T\Big] \leq NRE\Big[[M - M^\beta]_T^{1/2}\Big] \tag{7}$$

où $R = 2 \sum_{0 \leq i \leq m} (8LK^{1/2})^i$.
Afin de se passer de l'hypothèse $[M^\beta] \leq K$, on se donne K (que l'on précisera plus tard), et on introduit le temps d'arrêt $\tau = \inf\{t, [M^\beta]_t \geq K - 1/128L^2\}$. Sur $\{\tau \geq T\}$, $(M^\beta)^\tau$ (processus arrêté en τ) satisfait les hypothèses du lemme 1. Par suite, en notant $X^{(\tau)}$ (resp. $X^{(\tau)}(\beta)$ la solution de (1) (resp. (4)) conduite par M^τ (resp. $(M^\beta)^\tau$), on a, en tenant compte de (7),

$$\begin{aligned}
P\Big[\|X - X(\beta)\|_T \geq \epsilon\Big] &\leq P\Big[\|X^{(\tau)} - X^{(\tau)}(\beta)\|_T \geq \epsilon\Big] + P(\tau < T) \\
&\leq \frac{1}{\epsilon} NRE\Big[[M - M^\beta]_T^{1/2}\Big] + P\Big([M^\beta]_T > K\Big).
\end{aligned} \tag{8}$$

Il reste donc à estimer les deux termes du membre de droite de (8).
D'une part, on a en reprenant la preuve du lemme 2 de [1],

$$E\Big[[M-M^\beta]_T^{1/2}\Big] \le E[[M-M^\beta]_T^{1/2}\mathbf{1}_{||\Delta M||_T\le\beta}] + E[[M-M^\beta]_T^{1/2}\mathbf{1}_{||\Delta M||_T>\beta}]$$
$$\le E\Big[\big(\sum_{s\le T}(\int x\mathbf{1}_{|x|>\beta}\nu(\{s\},dx))^2\big)^{1/2}\Big] + [[M-M^\beta]_T]^{1/2}P[||\Delta M||_T>\beta]^{1/2}. \quad (9)$$

Estimons le premier terme du côté droit de (9). Pour alléger l'écriture, on note $A(\alpha)$ l'ensemble $\Big\{\int_0^T\int_{|x|>\beta}|x|\nu(ds,dx)\le\alpha\Big\}$.

$$E\Big[\Big(\sum_{s\le T}(\int x\mathbf{1}_{|x|>\beta}\nu(\{s\},dx))^2\Big)^{1/2}\Big] \le E\Big[\Big(\sum_{s\le T}(\int x\mathbf{1}_{|x|>\beta}\nu(\{s\},dx))^2\Big)^{1/2}\mathbf{1}_{A(\alpha)^c}\Big]$$
$$+E\Big[\Big(\sum_{s\le T}(\int x\mathbf{1}_{|x|>\beta}\nu(\{s\},dx))^2\Big)^{1/2}\mathbf{1}_{A(\alpha)}\Big]$$
$$\le E\Big[\Big(\sum_{s\le T}(\int x\mathbf{1}_{|x|>\beta}\nu(\{s\},dx))^2\Big)\Big]^{1/2}P(A(\alpha)^c)^{1/2}+\beta^{1/2}\alpha^{1/2}$$
$$\le E([M]_T)^{1/2}P(A(\alpha)^c)^{1/2}+\beta^{1/2}\alpha^{1/2}. \quad (10)$$

En utilisant l'inégalité de Lenglart-Rebolledo ([5] p. 35), on obtient :

$$P(A(\alpha)^c)\le\frac{\eta}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}E\Big(||\Delta M||_T\mathbf{1}_{||\Delta M||_T>\beta}\Big)+P\Big(\sum_{t\le T}|\Delta M_t|\mathbf{1}_{||\Delta M||_T>\beta}>\eta\Big)$$
$$\le\frac{1}{\alpha}E\Big(||\Delta M||_T\mathbf{1}_{||\Delta M||_T>\beta}\Big)+P[||\Delta M||_T>\beta]$$
$$\le\frac{1}{\alpha}E[||\Delta M||_T^2]^{1/2}P(||\Delta M||_T>\beta)^{1/2}+P(||\Delta M||_T>\beta). \quad (11)$$

Enfin, on a facilement :

$$E([M-M^\beta]_T)^{1/2}\le 2E([M]_T)^{1/2}. \quad (12)$$

En définitive, compte tenu de (10), (11) et (12) on obtient :

$$E([M-M^\beta]_T^{1/2})\le E([M]_T)^{1/2}\Big(\frac{1}{\alpha}E[||\Delta M||_T^2]^{1/2}P[||\Delta M||_T>\beta]^{1/2}+P[||\Delta M||_T>\beta]\Big)^{1/2}$$
$$+2E([M]_T)^{1/2}P[||\Delta M||_T>\beta]^{1/2}+(\beta\alpha)^{1/2}$$
$$\le E([M]_T)^{1/2}\Big(\frac{E[||\Delta M||_T^2]^{1/4}}{\alpha^{1/2}}P[||\Delta M||_T>\beta]^{1/4}+P[||\Delta M||_T>\beta]^{1/2}\Big)$$
$$+2E([M]_T)^{1/2}P[||\Delta M||_T>\beta]^{1/2}+(\beta\alpha)^{1/2}. \quad (13)$$

Maintenant,

$$P\Big(||\Delta M||_T>\beta\Big)\le P\Big(||[M]-Id||_T>\beta^2/2\Big)\le 2\mu/\beta^2.$$

On a donc, en prenant β de la forme $\beta = \mu^\lambda$, avec $0 < \lambda < 1/2$,

$$P\Big(\|\Delta M\|_T > \beta\Big) \leq 2\mu^{1-2\lambda}, \tag{14}$$

et (13) devient donc

$$\begin{aligned} E\Big([M - M^\beta]_T\Big) \leq & \mu^{\lambda/2}\alpha^{1/2} + E([M]_T)^{1/2}\big(E[\|\Delta M\|_T^2]^{1/4}\frac{\mu^{1/4-\lambda/2}}{\alpha^{1/2}} + \mu^{1/2-\lambda}\big) \\ & + 2E([M]_T)^{1/2}\mu^{1/2-\lambda}. \end{aligned}$$

On pose alors $\alpha^{1/2} = \mu^{-a}$, en choisissant a pour minimiser la partie principale du membre de droite ci-dessus. On obtient $a = \lambda/2 - 1/8$, d'où :

$$E[[M - M^\beta]_T^{1/2}] \leq \mathcal{O}(\mu^{1/8\wedge(1/2-\lambda)}). \tag{15}$$

D'autre part,

$$P\Big([M^\beta]_T > K\Big) \leq P\Big([M^\beta]_T - [M]_T > K/3\Big) + P\Big([M]_T - T > K/3\Big) + P(T > K/3).$$

En choisissant $K > 3T$, le dernier terme est nul ; par ailleurs,

$$P\Big([M]_T - T > K/3\Big) \leq 3\mu/K.$$

Enfin, en utilisant successivement (11), (14) et (15), on a

$$\begin{aligned} P\Big(\|[M^\beta] - [M]\|_T > K/3\Big) \leq & P\Big(\{\|[M^\beta] - [M]\|_T > K/3\} \cap \{\|\Delta M\|_T \leq \beta\}\Big) \\ & + P\Big(\|\Delta M\|_T > \beta\Big) \\ & \leq P[|x|\mathbf{1}_{|x|>\beta} * \nu > \frac{K}{9\beta}] + 2\mu^{1-2\lambda} \\ \leq \frac{9\beta}{K} E[\|\Delta M\|_T^2]^{1/2} & P[\|\Delta M\|_T > \beta]^{1/2} + P[\|\Delta M\|_T > \beta] + 2\mu^{1-2\lambda} \\ & \leq \mathcal{O}(\mu^{1/2}) + 2\mu^{1-2\lambda}. \end{aligned} \tag{16}$$

D'où, en définitive, dès que $\beta = \mu^\lambda$, (8), (15) et (16) donnent donc

$$P\Big[\|X - X(\beta)\|_T \geq \epsilon\Big] \leq \frac{1}{\epsilon}\Big(\mathcal{O}(\mu^{1/8}) + \mathcal{O}(\mu^{1/2-\lambda})\Big)$$

dès que $0 < \lambda < 1/2$, $\mu^\lambda = \beta \leq \dfrac{1}{16\sqrt{2}L}$.

Le lemme 2 s'en déduit immédiatement. ∎

2. Estimation de $\overline{P}\Big(\|\overline{X}-\overline{Y}_{\tau.}\|_T \geq \epsilon\Big)$.

Comme indiqué précédemment, on va plonger M^β dans un mouvement brownien. On se place sur l'espace filtré $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, (\overline{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, \overline{P})$, avec le mouvement brownien standard W et le changement de temps (τ_t) qui vérifient les hypothèses du théorème de plongement (voir par exemple [1], [6] ou [9]). Notons $\overline{X}$ la solution de

$$\overline{X}_t = x_0 + \int_0^t \sigma(\overline{X}_{s-})dW_{\tau_s}. \tag{17}$$

$\overline{X}$ a alors la même loi que $X(\beta)$. Soit enfin $\overline{Y}$ la solution de

$$\overline{Y}_t = x_0 + \int_0^t \sigma(\overline{Y}_s)dW_s. \tag{18}$$

M^β n'étant pas, en principe, une martingale continue, τ n'est pas continu et W n'est pas adapté à (τ_t) (au sens de Jacod [3], p. 315). On n'a donc pas égalité de $\overline{X}_t$ et $\overline{Y}_{\tau_t}$ pour $t \geq 0$, et nous allons donc estimer la distance de Ky-Fan entre $\overline{X}$ et $\overline{Y}_{\tau}$.

Lemme 3. *On a, pour tout* $0 < \alpha < 1$ *:*

$$\overline{P}\Big(\|\overline{X}-\overline{Y}_{\tau.}\|_T > \epsilon\Big) \leq K/\epsilon^2\Big(\mu + \alpha + \overline{P}(\|\tau - Id\|_T > \alpha)\Big), \tag{19}$$

où K *est une constante qui dépend de* T.

Preuve. Nous commençons par écrire une approximation d'Euler de la solution de (17) : pour n entier fixé, on pose $\overline{X}_0^n = x$ et, pour $0 \leq k \leq n$, on définit $\overline{X}_t^n$ sur $]kT/n, (k+1)T/n]$ par

$$\overline{X}_t^n = \overline{X}_{kT/n}^n + \sigma(\overline{X}_{kT/n}^n)(W_{\tau_t} - W_{\tau_{kT/n}}).$$

Il est assez intuitif que $\overline{X}^n$ est aussi une "approximation" de $\overline{Y}_\tau$, d'autant meilleure que $\sup_{t\leq T}|\tau_t - t|$ est petit. Nous allons suivre cette idée.

Considérons tout d'abord la subdivision $\{\tau_{kT/n}\}_{0\leq k\leq n}$ de l'intervalle $[0, \tau_T]$. On pose $\overline{Y}_0^n = x_0$ et, pour $\tau_{kT/n} < t \leq \tau_{(k+1)T/n}$,

$$\overline{Y}_t^n = \overline{Y}_{\tau_{kT/n}}^n + \sigma(\overline{Y}_{\tau_{kT/n}}^n)(W_t - W_{\tau_{kT/n}}),$$

de sorte que $\overline{Y}_{\tau_t}^n = \overline{X}_t^n$ pour tout t.
Nous pouvons alors écrire, pour $\epsilon > 0$,

$$\overline{P}\Big(\|\overline{X}-\overline{Y}_{\tau.}\|_T > \epsilon\Big) \leq \overline{P}\Big(\Big\|\overline{X}-\overline{X}^n\Big\|_T > \epsilon/2\Big) + \overline{P}\Big(\Big\|\overline{Y}_{\tau.}^n - \overline{Y}_{\tau.}\Big\|_T > \epsilon/2\Big)$$

et, comme

$$\overline{P}\Big(\|\overline{Y}_{\tau_\cdot} - \overline{Y}^n_{\tau_\cdot}\|_T > \epsilon\Big) \le \overline{P}\Big(\|\overline{Y} - \overline{Y}^n\|_{\tau_T} > \epsilon\Big)$$
$$\le \overline{P}\Big(\|\overline{Y} - \overline{Y}^n\|_{\tau_T \wedge (T+\alpha)} > \epsilon\Big) + \overline{P}(\tau_T > T + \alpha), \quad (20)$$

on a

$$\overline{P}\Big(\|\overline{X} - \overline{Y}_{\tau_\cdot}\|_T > \epsilon\Big) \le 4/\epsilon^2\Big(\overline{E}\Big(\|\overline{X} - \overline{X}^n\|_T^2\Big) + \overline{E}\Big[\|\overline{Y} - \overline{Y}^n\|^2_{\tau_T \wedge (T+\alpha)}\Big]\Big)$$
$$+ \overline{P}(\tau_T > T + \alpha). \quad (21)$$

On va maintenant estimer successivement chacun des deux premiers termes du membre de droite de (21).

Tout d'abord, notons, pour un élément x de l'espace de Skorokhod, $\sigma^n(x_t) = \sigma(x_{kT/n})$ si $t \in [kT/n, (k+1)T/n[$.On a alors (en utilisant Burkholder pour la deuxième ligne ci-dessous),

$$\overline{E}\Big(\|\overline{X} - \overline{X}^n\|_T^2\Big) = \overline{E}\Big(\Big\|\int_0^\cdot (\sigma(\overline{X}_{s-}) - \sigma^n(\overline{X}^n_{s-}))dW_{\tau_s}\Big\|_T^2\Big)$$
$$\le 4\overline{E}\Big(\int_0^T (\sigma(\overline{X}_{s-}) - \sigma^n(\overline{X}^n_{s-}))^2 d[W_\tau]_s\Big)$$
$$\le 4\overline{E}\Big(\int_0^T (\sigma(\overline{X}_{s-}) - \sigma^n(\overline{X}^n_{s-}))^2 d(\sup_{u\le s}|[W_\tau]_u - u|)\Big) + 4\overline{E}\Big(\int_0^t (\sigma(\overline{X}_s) - \sigma^n(\overline{X}^n_s))^2 ds\Big)$$
$$\le 16N^2 E\Big(\|[M] - Id\|_T\Big) + 8\int_0^T \overline{E}\Big((\sigma(\overline{X}_s) - \sigma(\overline{X}^n_s))^2\Big)ds$$
$$+ 8\int_0^T \overline{E}\Big((\sigma(\overline{X}^n_s) - \sigma^n(\overline{X}^n_s))^2\Big)ds$$
$$\le 16N^2\mu + 8L^2\int_0^T \overline{E}\Big(\|\overline{X} - \overline{X}^n\|_s^2\Big)ds$$
$$+ 8\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT/n}^{(k+1)T/n} \overline{E}\Big((\sigma(\overline{X}^n_s) - \sigma(\overline{X}^n_{kT/n}))^2\Big)ds. \quad (22)$$

De plus,

$$8\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT/n}^{(k+1)T/n} \overline{E}\Big((\sigma(\overline{X}^n_s) - \sigma(\overline{X}^n_{kT/n}))^2\Big)ds$$
$$\le 8L^2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT/n}^{(k+1)T/n} \overline{E}\Big((\overline{X}^n_s - \overline{X}^n_{kT/n})^2\Big)ds$$
$$= 8L^2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT/n}^{(k+1)T/n} \overline{E}\Big(\sigma^2(\overline{X}^n_{kT/n})(W_{\tau_s} - W_{\tau_{kT/n}})^2\Big)ds,$$

si bien que

$$8\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT/n}^{(k+1)T/n}\overline{E}\Big((\sigma(\overline{X}^n_s)-\sigma(\overline{X}^n_{kT/n}))^2\Big)ds$$

$$\leq 8L^2N^2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT/n}^{(k+1)T/n}\overline{E}\Big((W_{\tau_s}-W_{\tau_{kT/n}})^2\Big)ds$$

$$\leq 8L^2N^2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT/n}^{(k+1)T/n}E\Big([M]_s-[M]_{kT/n}\Big)ds$$

$$\leq 8L^2N^2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT/n}^{(k+1)T/n}E\Big(([M]_s-s)-([M]_{kT/n}-kT/n)\Big)ds$$

$$+8L^2N^2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT/n}^{(k+1)T/n}(s-kT/n)ds$$

$$\leq 16L^2N^2T\mu+4L^2N^2T^2/n.$$

On a donc en définitive

$$\overline{E}\Big(\|\overline{X}-\overline{X}^n\|_T^2\Big)\leq 16N^2(L^2T+1)\mu+4L^2N^2T^2/n+8L^2\int_0^T\overline{E}\Big(\|\overline{X}-\overline{X}^n\|_s^2\Big)ds,$$

d'où, par l'inégalité de Gronwall,

$$\overline{E}\Big(\|\overline{X}-\overline{X}^n\|_T^2\Big)\leq O(\mu+1/n). \tag{23}$$

Nous nous proposons maintenant d'estimer $\overline{E}\Big[\|\overline{Y}-\overline{Y}^n\|^2_{\tau_T\wedge(T+\alpha)}\Big]$.

$$\overline{E}\Big[\|\overline{Y}-\overline{Y}^n\|^2_{\tau_T\wedge(T+\alpha)}\Big]$$

$$\leq\overline{E}\Big[\Big\|\int_0^{\cdot}\sigma(\overline{Y}_s)dW_s-\sum_{k=0}^{n-1}\sigma(\overline{Y}^n_{\tau_{kT/n}})(W_{\tau_{(k+1)T/n}\wedge\cdot}-W_{\tau_{kT/n}\wedge\cdot})\Big\|^2_{\tau_T\wedge(T+\alpha)}\Big]$$

$$\leq 2\overline{E}\Big[\Big\|\int_0^{\cdot}(\sigma(\overline{Y}_s)-\sigma(\overline{Y}^n_s))dW_s\Big\|^2_{\tau_T\wedge(T+\alpha)}\Big]$$

$$+2\overline{E}\Big[\Big\|\int_0^{\cdot}\sigma(\overline{Y}^n_s)dW_s-\sum_{k=0}^{n-1}\sigma(\overline{Y}^n_{\tau_{kT/n}})(W_{\tau_{(k+1)T/n}\wedge\cdot}-W_{\tau_{kT/n}\wedge\cdot})\Big\|^2_{\tau_T\wedge(T+\alpha)}\Big]. \tag{24}$$

Si on note $2A$ le dernier terme du membre de droite de (24), on a

$$
\begin{aligned}
A =&\overline{E}\Big[\Big\|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\tau_{kT/n}\wedge\cdot}^{\tau_{(k+1)T/n}\wedge\cdot}(\sigma(\overline{Y}^n_s)-\sigma(\overline{Y}^n_{\tau_{kT/n}}))dW_s\Big\|^2_{\tau_T\wedge(T+\alpha)}\Big]\\
\leq&4\overline{E}\Big[\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\tau_{kT/n}\wedge(T+\alpha)}^{\tau_{(k+1)T/n}\wedge(T+\alpha)}(\sigma(\overline{Y}^n_s)-\sigma(\overline{Y}^n_{\tau_{kT/n}}))^2ds\Big]\\
\leq&4\overline{E}\Big[\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\tau_{kT/n}\wedge(T+\alpha)}^{\tau_{(k+1)T/n}\wedge(T+\alpha)}(\sigma(\overline{Y}^n_s)-\sigma(\overline{Y}^n_{\tau_{kT/n}}))^2ds\mathbf{1}(\|\tau-Id\|_T\leq\alpha)\Big]\\
&+16N^2\overline{E}\Big[\mathbf{1}(\|\tau-Id\|_T>\alpha)\tau_T\wedge(T+\alpha)\Big]\\
\leq&4L^2\overline{E}\Big[\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\tau_{kT/n}\wedge(T+\alpha)}^{\tau_{(k+1)T/n}\wedge(T+\alpha)}|\overline{Y}^n_s-\overline{Y}^n_{\tau_{kT/n}}|^2ds\mathbf{1}(\|\tau-Id\|_T\leq\alpha)\Big]\\
&+16(T+\alpha)N^2\overline{P}(\|\tau-Id\|_T>\alpha)\\
\leq&4L^2\sum_{k=0}^{n-1}\overline{E}\Big[\int_{\tau_{kT/n}\wedge(T+\alpha)}^{\tau_{(k+1)T/n}\wedge(T+\alpha)}\sigma(\overline{Y}^n_{\tau_{kT/n}})^2(W_s-W_{\tau_{kT/n}})^2\mathbf{1}(\|\tau-Id\|_T\leq\alpha)\Big]ds\\
&+16(T+\alpha)N^2\overline{P}(\|\tau-Id\|_T>\alpha)\\
\leq&16L^2N^2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT/n-\alpha}^{(k+1)T/n+\alpha}\sup_{kT/n-\alpha\leq u\leq s}\overline{E}\Big[(W_u-W_{kT/n-\alpha})^2\Big]ds\\
&+16(T+\alpha)N^2\overline{P}(\|\tau-Id\|_T>\alpha)\\
\leq&64L^2N^2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT/n-\alpha}^{(k+1)T/n+\alpha}(s-kT/n+\alpha)ds+16(T+\alpha)N^2\overline{P}(\|\tau-Id\|_T>\alpha),
\end{aligned}
$$

d'où

$$
A\leq 32L^2N^2n(2\alpha+T/n)^2+16(T+\alpha)N^2\overline{P}(\|\tau-Id\|_T>\alpha). \tag{25}
$$

Par ailleurs on a, pour le premier membre du terme de droite de (24),

$$
\overline{E}\Big[\Big\|\int_0^{\cdot}(\sigma(\overline{Y}_s)-\sigma(\overline{Y}^n_s))dW_s\Big\|^2_{\tau_T\wedge(T+\alpha)}\Big]\leq4L^2\overline{E}\Big[\int_0^{\tau_T\wedge(T+\alpha)}|\overline{Y}_s-\overline{Y}^n_s|^2ds\Big].\tag{26}
$$

(24) devient donc, compte tenu de (25) et (26),

$$
\begin{aligned}
\overline{E}\Big[\|\overline{Y}-\overline{Y}^n\|^2_{\tau_T\wedge(T+\alpha)}\Big]\leq&8L^2\overline{E}\Big[\int_0^{\tau_T\wedge(T+\alpha)}|\overline{Y}_s-\overline{Y}^n_s|^2ds\Big]+64L^2N^2n(2\alpha+T/n)^2\\
&+32(T+\alpha)N^2\overline{P}(\|\tau-Id\|_T>\alpha),
\end{aligned}
$$

ce qui s'écrit aussi

$$
\begin{aligned}
\overline{E}\Big[\|\overline{Y}^{\tau_t}-\overline{Y}^{n,\tau_t}\|^2_{T+\alpha}\Big]\leq&8L^2\overline{E}\Big[\int_0^{T+\alpha}|\overline{Y}^{\tau_t}_s-\overline{Y}^{n,\tau_t}_s|^2ds\Big]+64L^2N^2n(2\alpha+T/n)^2\\
&+32(T+\alpha)N^2\overline{P}(\|\tau-Id\|_T>\alpha),
\end{aligned}
$$

et donc, d'après le lemme de Gronwall,

$$\overline{E}\Big[\|\overline{Y}-\overline{Y}^n\|^2_{\tau_T\wedge(T+\alpha)}\Big] \leq K\Big(n(2\alpha+T/n)^2+(T+\alpha)\overline{P}(\|\tau-Id\|_T>\alpha)\Big) \quad (27)$$

pour une constante K adéquate (qui pourra varier de place en place).

Compte tenu de (23) et (27), (21) devient

$$\overline{P}\Big(\|\overline{X}-\overline{Y}_{\tau_\cdot}\|_T>\epsilon\Big) \leq K/\epsilon^2\Big(\mu+1/n+n(2\alpha+T/n)^2+\overline{P}(\|\tau-Id\|_T>\alpha)\Big),$$

soit, en prenant $n=[1/\alpha]$, le résultat annoncé. ∎

<u>3. Majoration de</u> $\overline{P}\Big(\|\overline{Y}_{\tau_\cdot}-\overline{Y}\|_T>\epsilon\Big)$.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de démontrer le

Lemme 4. *Pour* $0<\lambda<1/2$ *et* $\beta=\mu^\lambda$

$$\overline{P}\Big(\|\overline{Y}_{\tau_\cdot}-\overline{Y}\|_T>\epsilon\Big) \leq [1+2T/\alpha](2e^{-\frac{\epsilon^2}{12n^2\alpha}})+\frac{160\mu^{2\lambda}}{(T+\alpha/2)\alpha^2}$$
$$+\frac{640\mu^{4\lambda}}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\mathcal{O}(\mu^{1/2})+4\mu^{1-2\lambda}+8\mu/\alpha. \quad (28)$$

Preuve. Nous effectuerons ce calcul en deux temps, en remarquant que

$$\begin{aligned}\overline{P}\Big(\|\overline{Y}_{\tau_\cdot}-\overline{Y}\|_T>\epsilon\Big) &\leq \overline{P}\Big(\|\overline{Y}_{\tau_\cdot}-\overline{Y}\|_T\geq\epsilon, \|\tau-Id\|_T\leq\alpha\Big)+\overline{P}\Big(\|\tau-Id\|_T>\alpha\Big)\\ &\leq \overline{P}\Big(\sup_{|t-s|\leq\alpha}|\overline{Y}_t-\overline{Y}_s|>\epsilon\Big)+\overline{P}\Big(\|\tau-Id\|_T>\alpha\Big) \quad (29)\end{aligned}$$

et en majorant chacun des termes du membre de droite de (29).
Premièrement, il est facile de voir que

$$\Big\{\sup_{|t-s|\leq\alpha}|\overline{Y}_t-\overline{Y}_s|>\epsilon\Big\} \subset \bigcup_{i\leq[1+2T/\alpha]}\Big\{\sup_{i\alpha/2\leq t<(i+3)\alpha/2}|\overline{Y}_t-\overline{Y}_{i\alpha/2}|>\epsilon/2\Big\}. \quad (30)$$

On utilise maintenant l'inégalité exponentielle pour les martingales locales continues (voir [10], p. 145, ex. 3.16) pour obtenir pour tout $\eta>0$,

$$\overline{P}\Big(\sup_{i\alpha/2\leq t<(i+3)\alpha/2}|\overline{Y}_t-\overline{Y}_{i\alpha/2}|>\epsilon/2\Big) \leq 2e^{-\epsilon^2/8\eta}+\overline{P}\Big(\int_{i\alpha/2}^{(i+3)\alpha/2}\sigma^2(\overline{Y}_s)ds>\eta\Big).$$

Mais

$$\int_{i\alpha/2}^{(i+3)\alpha/2}\sigma^2(\overline{Y}_s)ds \leq 3N^2\alpha/2,$$

et (30) donne donc, si on prend $\eta = 3N^2\alpha/2$,

$$\overline{P}\Big(\sup_{|t-s|\leq\alpha} |\overline{Y}_t - \overline{Y}_s| > \epsilon\Big) \leq [1 + 2T/\alpha](2e^{-\frac{\epsilon^2}{12N^2\alpha}}). \tag{31}$$

Il reste donc à estimer $\overline{P}\Big(\|\tau - Id\|_T > \alpha\Big)$.

Compte tenu des propriétés de notre plongement dans le mouvement brownien, on écrit :

$$\begin{aligned}\overline{P}\Big(\|\tau - Id\|_T > \alpha\Big) \leq &\overline{P}\Big(\|\tau - [W_\tau]\|_T > \alpha/2\Big) + \overline{P}\Big(\|[W_\tau] - Id\|_T > \alpha/2\Big)\\ \leq &\overline{P}\Big(\|\tau - [W_\tau]\|_T > \alpha/2) + P\Big(\|[M^\beta] - [M]\|_T > \alpha/4\Big)\\ &+ P\Big(\|[M] - Id\|_T > \alpha/4\Big).\end{aligned} \tag{32}$$

Mais, en réutilisant la majoration (15),

$$P\Big(\|[M^\beta] - [M]\|_T > \alpha/4\Big) \leq (1/\alpha)\mathcal{O}(\mu^{1/2}) + 2\mu^{1-2\lambda}. \tag{33}$$

Par ailleurs, il résulte du théorème 1 de [1] que $(\tau_t - [W_\tau]_t)_{t\geq 0})$ est une $\overline{P}$-martingale, dont le carré est dominé au sens de Lenglart par sa variation quadratique

$$\big[\tau - [W_\tau]\big]_. = \sum_{0<t\leq .} \big(\Delta\tau_t - (\Delta W_{\tau_t})^2\big)^2 \leq 2 \sum_{0<t\leq .} \big((\Delta\tau_t)^2 + (\Delta W_{\tau_t})^4\big).$$

Mais ce dernier processus est à son tour dominé au sens de Lenglart par le processus $10 \sum_{0<t\leq .} (\Delta W_{\tau_t})^4 \leq 40\beta^2[W_\tau]_.$, puisque W_τ et M^β ont la même loi. De plus, on a l'inégalité $E\big[\sup_{t\leq T}\Delta[W_\tau]_t\big] \leq 4\beta^2$. D'après l'inégalité de Lenglart-Rebolledo, pour tout $\eta > 0$,

$$\begin{aligned}\overline{P}(\|\tau - [W]_\tau\|_T > \alpha/2) &\leq 4\eta/\alpha^2 + 640\beta^4/\alpha^2 + \overline{P}(40\beta^2[W_\tau]_T \geq \eta)\\ &= 4\eta/\alpha^2 + 640\beta^4/\alpha^2 + P(40\beta^2[M^\beta]_T \geq \eta).\end{aligned} \tag{34}$$

En prenant $\eta = 40\beta^2/(T + \alpha/2)$, on trouve

$$\begin{aligned}P(40\beta^2[M^\beta]_T \geq \eta) \leq &P\Big(\big|[M^\beta]_T - T\big| \geq \alpha/2\Big)\\ \leq &P\Big(\big|[M^\beta]_T - [M]_T\big| \geq \alpha/4\Big) + P\Big(\big\|[M] - Id\big\| \geq \alpha/4\Big).\end{aligned} \tag{35}$$

Comme $P\Big(\big\|[M] - Id\big\| \geq \alpha/4\Big) \leq 4\mu/\alpha$, les inégalités (32) à (35) donnent

$$\overline{P}\Big(\|\tau - Id\|_T > \alpha\Big) \leq \frac{160\beta^2}{(T + \alpha/2)\alpha^2} + \frac{640\beta^4}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\mathcal{O}(\mu^{1/2}) + 4\mu^{1-2\lambda} + 8\mu/\alpha. \tag{36}$$

Finalement, (29), (31) et (36) donnent le lemme 4. ∎

4. Conclusion.

Si l'on reprend les lemmes 2, 3 et 4, en remarquant que, dans (19),

$$\overline{P}(\tau_T > T+\alpha)\Big) \leq \overline{P}\Big(\|\tau - Id\|_T > \alpha\Big),$$

et en réutilisant alors (36), on arrive au système constitué de (6) et de l'inéquation suivante (K désigne cette fois encore une constante adéquate) :

$$\begin{aligned}\overline{P}\Big(\|\overline{X}-\overline{Y}\|_T \geq \epsilon\Big) \leq &(1+K/\epsilon^2)\Big(\frac{\beta^2}{(T+\alpha/2)\alpha^2} + \beta^4/\alpha^2 + \mu^{1-2\lambda} + \mu/\alpha + \mu^{1/2}/\alpha\Big) \\ &+ (K/\epsilon^2)(\mu+\alpha) + (1+2T/\alpha)e^{\frac{-\epsilon^2}{48N^2\alpha}}. \qquad (37)\end{aligned}$$

Choisissons α, λ et ϵ de telle sorte que

$$\overline{P}\Big(\|\overline{X}-\overline{Y}\|_T \geq \epsilon\Big) \leq \epsilon.$$

On remplace β par μ^λ ; en posant $\alpha = K\mu^\delta$ et $\epsilon = K\mu^{(\delta-\gamma)/2}$ pour un γ plus petit que δ, et avec K adéquat, on voit que le membre de droite de (37) est de l'ordre de

$$\begin{aligned}&\mu^{2\lambda-2\delta} + \mu^{4\lambda-2\delta} + \mu^{1-2\lambda} + \mu^{1-\delta} + \mu^{1/2-\delta} + \mu^{2\lambda-\delta+\gamma-2\delta} + \mu^{4\lambda-\delta+\gamma-2\delta} \\ &\quad + \mu^{1-2\lambda-\delta+\gamma} + \mu^{1-\delta+\gamma-\delta} + \mu^{1/2-\delta+\gamma-\delta} + \mu^{1-\delta+\gamma} + \mu^\gamma + \mu^{-\delta}e^{-K(\mu^{-\gamma})} \qquad (38)\end{aligned}$$

Chaque exposant dans (38) doit donc être supérieur à $(\delta-\gamma)/2$, et, si possible, le plus petit de ces exposants doit être égal à $(\delta-\gamma)/2$. Par ailleurs, le résultat obtenu sera d'autant meilleur que l'exposant de μ sera plus grand, assurant ainsi une plus grande vitesse de convergence. Pour cela, il faut un compromis entre les vitesses obtenues en (6) et en (37), ce qui conduit à imposer la contrainte supplémentaire $(1-2\lambda)/4 \wedge 1/16 = (\delta-\gamma)/2$. Cela se traduit par un système d'inéquations maintenant élémentaire, et dont nous faisons grâce au lecteur. Sa résolution montre que le choix optimal est $\delta = 3\gamma$, en essayant ensuite de maximiser γ. Tous calculs effectués, il vient $\lambda = 3/8$, d'où $\gamma = 1/12$, $\delta = 1/4$ et $\epsilon = \mu^{1/12}$, d'où, compte tenu du lemme 2, le résultat final pour le théorème. ∎

Remarque. Si M est une martingale continue, les calculs ci-dessus se simplifient considérablement : la partie 1. (exclusion des grands sauts) disparait ; de plus, le changement de temps τ est maintenant continu, et W est donc adapté à (τ_t) ; par suite, on a égalité de $\overline{X}$ et $\overline{Y}_\tau$, et la probabilité estimée au 2. est donc égale à 0 ; enfin, pour la même raison, $\tau = [W_\tau]$, et il ne reste plus de (33) que le terme $8\mu/\alpha$ obtenu par l'inégalité de Markov. Toute notre majoration se résume donc à ce dernier terme et à l'inégalité exponentielle (31). Il est alors facile de vérifier que le facteur limitant est celui de l'inégalité de Markov, ce qui donne , dans ce cas $\Pi(X,Y) = O(\mu^{1/3}|\ln\mu|)$.

Références.

[1] F. Coquet, J. Mémin, L. Vostrikova : *Rate of convergence in the functional limit theorem for likelihood processes*, preprint de l'IRMAR, 1992.
[2] C. Dellacherie, P.A. Meyer : **Probabilités et potentiel 2**, Hermann, Paris, 1980.
[3] J. Jacod : **Calcul stochastique et problèmes de martingales.** Lect. Notes in Math. 714, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1979.
[4] J. Jacod, J. Mémin : *Weak and strong solutions of stochastic differential equations : existence and stability*, Comptes rendus du congrès de Durham, Lec. Notes in Maths 851, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1981.
[5] J. Jacod, A. N. Shiryaev : **Limit theorems for stochastic processes.** Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1987.
[6] K. Kubilius : *Rate of convergence in the functionnal central limit theorem for semimartingales*, Liet. Mat. Rink. XXV, 84-96, 1985.
[7] J. Mémin, L. Słominski : *Condition UT et stabilité en loi des solutions d'équations différentielles stochastiques*, Lec. Notes in Maths 1485, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1991.
[8] M. Métivier, J. Pellaumail : **Stochastic Integration**, Acad. press, New York, 1980.
[9] I. Monroe : *On embedding right-continuous martingales in Brownian motion*, Ann. Math. Stat. 43, 1293-1311, 1972.
[10] D. Revuz, M. Yor : **Continuous martingales and Brownian motion**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1991.
[11] L. Słominski : *Stabillity of strong solutions of stochastic differential equations*, Stoch. Processes Appl. 31, 173-202, 1989.