

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

SOPHIE MAILLE

Sur l'utilisation de processus de Markov dans le modèle d'Ising : attractivité et couplage

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 28 (1994), p. 195-235

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__195_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'UTILISATION DE PROCESSUS DE MARKOV
DANS LE MODELE D'ISING : ATTRACTIVITE ET COUPLAGE.

Sophie MAILLE

Le modèle d'Ising à spin ± 1 a été largement étudié dans la littérature durant ces vingt dernières années (ELLIS [5] ; GEORGII [7] ; LIGGETT [10]).

De nombreuses méthodes ont été développées pour étudier les transitions de phase dans ce modèle. L'une d'elles consiste à construire des processus de Markov dont les mesures réversibles sont les mesures de Gibbs du modèle étudié (cf. LIGGETT [10] et YCART [11]).

Certaines des propriétés de ces processus paraissent particulièrement importantes : l'attractivité et le couplage.

D'autre part l'utilisation de ces processus se fait souvent à travers des processus particuliers comme par exemple le processus de Glauber. L'objet de cet article est de faire le point sur ces techniques en comparant de façon exhaustive les différentes notions existantes et en isolant certaines classes de processus associés à un problème.

Dans une première partie nous rappelons les diverses notions d'attractivité qui figurent dans la littérature : attractivité d'une mesure, d'un semi-groupe, d'un générateur et nous montrons les liens entre ces notions.

En particulier nous décrivons brièvement deux démonstrations de l'équivalence entre la notion de semi-groupe attractif et celle de générateur attractif. L'une utilise un processus de Markov sur $\{-1,1\}^{\wedge} \times \{-1,1\}^{\wedge}$; ($\wedge \mathbb{Z}^d$ fini) qui est un couplage entre deux processus ; l'autre utilise un processus non Markovien sur $\{-1,1\}^{\wedge} \times \wedge$. Dans la quatrième partie nous comparons ces deux démonstrations et montrons en particulier les liens existants entre ces deux processus.

Auparavant dans la deuxième partie nous nous serons intéressés au couplage entre deux processus de Markov et surtout aux processus couplés prenant leurs valeurs sur $\{(\omega, \hat{\omega}) \in \{-1,1\}^{\wedge} \times \{-1,1\}^{\wedge} ; \omega \leq \hat{\omega}\}$. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante sur les processus initiaux pour pouvoir construire un tel processus couplé.

Puis nous étudions le cas où de plus les processus initiaux sont réversibles par rapport à des mesures données. Ceci nous

permet de récapituler tous les liens existants entre mesures associées à un processus couplé et mesures ordonnées.

Ces résultats sont prouvés dans la troisième partie.

Mots clés : Modèle d'Ising - Processus de Markov - Attractivité - couplage - mesures réversibles - mesures ordonnées.

Introduction.

En Mécanique Statistique, on modélise un morceau de fer en équilibre thermique de la façon suivante : il est constitué d'atomes de fer disposés en chaque noeud d'un réseau, chaque atome étant caractérisé par son spin. Nous ne considérerons ici que le cas où les valeurs possibles pour le spin sont +1 ou -1 (haut ou bas).

Si l'orientation d'un spin dépend de celle des spins voisins, on dit que les spins interagissent. Dans le cas contraire, on dit qu'il n'y a pas d'interaction.

Explicitons le modèle mathématique associé.

. Nous appelons site un noeud du réseau, et nous considérons comme espace des sites Λ une partie finie du réseau \mathbb{Z}^d .

. Dans le modèle physique on appelle configuration tout choix possible pour l'ensemble des spins sur Λ .

Une configuration est donc une application de Λ dans $\{-1, 1\}$. Nous notons $\Omega = \{-1, 1\}^\Lambda$ l'ensemble des configurations et ω un élément générique de Ω c'est-à-dire $\omega = (\omega_i)_{i \in \Lambda}$ où $\omega_i \in \{-1, 1\}$.

$\Phi = \{-1, 1\}$ est appelé espace des états (ou espace des phases).

Sur cet espace Ω muni de la tribu produit, nous allons considérer plusieurs mesures :

. La mesure uniforme $d\mu_0$, que l'on notera aussi $d\omega_\Lambda$:

$$d\mu_0 = \bigotimes_{i \in \Lambda} d\omega_i \quad \text{où } d\omega_i \text{ est la mesure uniforme sur } \{-1, 1\}.$$

. La mesure de Boltzmann.

Le choix de cette mesure est dicté par des considérations physiques. Définissons $H(\omega)$ l'énergie d'une configuration ω de la façon suivante : H est une application de Ω dans \mathbb{R} appelée Hamiltonien, elle s'écrit à une constante additive près :

$$H(\omega) = \sum_{\substack{A \subset \Lambda \\ |A| > 1}} J_A \omega_A + \sum_{i \in \Lambda} h_i \omega_i$$

$$\text{où } \omega_A = \prod_{i \in A} \omega_i.$$

Le terme $\sum_{\substack{A \subset \Lambda \\ |A| > 1}} J_A \omega_A$ représente l'énergie d'interaction entre les spins et le terme $\sum_{i \in \Lambda} h_i \omega_i$ représente l'action d'un champ extérieur $h = (h_i)_{i \in \Lambda}$.

Une mesure de Boltzmann est alors une distribution μ maximisant l'entropie sous la contrainte suivante : l'énergie moyenne totale est fixée ; c'est-à-dire $\int_{\Omega} H(\omega) d\mu(\omega) = C$ où C est une constante donnée.

Elle est absolument continue par rapport à la mesure uniforme de densité $\frac{e^{\beta H(\omega)}}{\int_{\Omega} e^{\beta H(\omega)} d\omega_{\Lambda}}$, β étant l'inverse de la température.

Nous travaillons par la suite à température constante, quitte à modifier l'Hamiltonien H en βH , on se ramène à $\beta=1$.

Nous notons alors cette mesure μ_H , $\langle f \rangle_{\mu_H} = \int_{\Omega} f d\mu_H$ et $\langle f \rangle_0 = \int_{\Omega} f d\omega_{\Lambda}$.

Remarquons que dans le cas où il n'y a pas d'interaction et pas de champ extérieur, la mesure de Boltzmann est la mesure uniforme.

La mesure de Boltzmann est une mesure d'équilibre physique. C'est aussi une mesure d'équilibre mathématique au sens où elle s'obtient comme mesure limite de certains processus de Markov. Ces résultats figurent par exemple dans LIGGETT [10], YCART [11], DURRETT [2].

Nous étudierons plus particulièrement les processus de Markov pour lesquels μ_H est de plus une mesure réversible, c'est-à-dire les processus de Markov dont le générateur L vérifie la propriété suivante : pour toutes fonctions f, g de Ω dans \mathbb{R} , on a :

$$\int_{\Omega} f L g d\mu_H = \int_{\Omega} g L f d\mu_H.$$

Nous dirons alors que le générateur L est symétrique par rapport à μ_H .

Nous allons donner une caractérisation des semi-groupes de Markov admettant la mesure de Boltzmann pour mesure réversible.

Λ étant fini, tout générateur L d'un processus de Markov sur Ω s'écrit de façon unique sous la forme :

$$Lf(\omega) = \sum_{\hat{\omega} \in \Omega} \hat{c}(\omega, \hat{\omega}) (f(\hat{\omega}) - f(\omega))$$

où $\hat{c} : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive.

Nous utiliserons des notations similaires à celles des dérivées partielles dans \mathbb{R} pour exprimer $f(\hat{\omega}) - f(\omega)$.

Pour cela introduisons pour tout $A \subset \Lambda$ l'opérateur $\tau_A : \Omega \rightarrow \Omega$ tel que

$$(\tau_A \omega)_i = \begin{cases} \omega_i & \text{si } i \notin A \\ -\omega_i & \text{si } i \in A \end{cases}$$

et l'opérateur ∇_A tel que : $\forall f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla_A f(\omega) = f(\tau_A \omega) - f(\omega).$$

Nous noterons aussi $\tau_A f(\omega)$ pour $f(\tau_A \omega)$.

Avec ces notations tout générateur de Markov sur Ω s'écrit de façon unique :

$$Lf(\omega) = \sum_{A \subset \Lambda} c(A, \omega) \nabla_A f(\omega)$$

où $c : P(\Lambda) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive et $P(\Lambda)$ est l'ensemble des parties de Λ .

Le processus de Markov de générateur L a le comportement suivant : si initialement le processus est en ω_0 , il reste dans cette configuration durant un temps T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\sum_{A \subset \Lambda} c(A, \omega_0)$, puis saute en la configuration $\tau_A \omega_0$ avec la probabilité $c(A, \omega_0) / \sum_{B \subset \Lambda} c(B, \omega_0)$, et ainsi de suite...

Proposition 1 : Soit μ_H la mesure de Boltzmann sur Ω associée à

$$\text{l'énergie } H : \mu_H(d\omega_\Lambda) = \frac{e^{H(\omega)} d\omega_\Lambda}{\langle e^H \rangle_0}.$$

Alors le processus de Markov sur Ω de générateur $L = \sum c(A, \cdot) \nabla_A$ admet μ_H comme mesure réversible si et seulement si :

$$\forall A \in P(\Lambda) ; \forall \omega \in \Omega ; c(A, \tau_A \omega) = c(A, \omega) e^{-\nabla_A H(\omega)}. \quad (1)$$

(Une démonstration de ce résultat figure dans la thèse de O. François dans le cas d'un réseau infini).

Parmi ces processus, ceux qui ont été utilisés dans la littérature sont de la forme

$$Lf(\omega) = \sum_{i \in \Lambda} c(i, \omega) \nabla_i f(\omega)$$

ou nous notons $c(i, \omega)$ pour $c(\{i\}, \omega)$ et ∇_i pour $\nabla_{\{i\}}$.

aussi nous nous restreindrons à ces processus.

La condition (1) ci-dessus s'écrit alors :

$$\forall i \in \Lambda ; \forall \omega \in \Omega ; c(i, \tau_i \omega) = c(i, \omega) e^{-\nabla_i H(\omega)}.$$

Nous donnons ci-dessous des exemples de générateurs de Markov ; remarquons qu'il sont tous de la forme $L = \sum_{i \in \Lambda} F(\nabla_i H) \nabla_i$, et que

parmi ces générateurs ceux qui sont réversibles par rapport à $d\mu_H = \frac{e^H d\omega_\Lambda}{\langle e^H \rangle_0}$ sont nécessairement de la forme $L = \sum_{i \in \Lambda} f(\nabla_i H) e^{\nabla_i H/2} \nabla_i$

où f est paire et positive.

Exemple 1 : $c(i, \omega) = e^{\nabla_i \frac{H}{2}(\omega)}$. Cet exemple est le plus simple, et n'est cependant pas utilisé car il conduit à des algorithmes de vitesse de convergence trop lente.

Exemple 2 : $c(i, \omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{\nabla_i H(\omega)}) = e^{\nabla_i \frac{H}{2}(\omega)} \text{ch}(\nabla_i \frac{H}{2}(\omega))$.

C'est l'analogue dans le cas discret du processus d'Ornstein Uhlenbeck.

Il est utilisé par D. BAKRY et D. MICHEL [1] dans une démonstration des inégalités FKG (dont nous verrons l'énoncé par la suite).

Exemple 3 : L'opérateur de Glauber.

$$c(i, \omega) = \frac{1}{1 + e^{-\nabla_i H(\omega)}} = \frac{e^{\nabla_i \frac{H}{2}(\omega)}}{2 \cosh \nabla_i \left(\frac{H(\omega)}{2} \right)}$$

Ces taux de transitions sont utilisés dans les réseaux neuronaux et dans une démonstration de l'inégalité GHS due à D. BAKRY et D. MICHEL [1].

Exemple 4 : $c(i, \omega) = e^{-(\nabla_i H(\omega))_-} = e^{\nabla_i \frac{H(\omega)}{2}} e^{-\left| \nabla_i \frac{H(\omega)}{2} \right|}.$

Ce cas est l'analogue à température constante du processus du recuit simulé quand on cherche le maximum de H.

Un problème délicat consiste à choisir tel ou tel opérateur. Par exemple, dans la démonstration des inégalités FKG due à D. BAKRY et D. MICHEL [1], on aurait pu choisir n'importe quel générateur à condition qu'il soit attractif (nous donnerons la définition de l'attractivité par la suite).

Par contre dans la démonstration de l'inégalité GHS citée plus haut, il est impératif de considérer l'opérateur de Glauber.

Il semble donc que certains opérateurs soient plus adaptés à un type de problème qu'à un autre.

Nous allons nous intéresser à une classe d'opérateurs particuliers : les opérateurs attractifs qui sont naturellement associés à une famille d'inégalités, les inégalités FKG.

1. Attractivité.

Une configuration ω peut être identifiée à l'ensemble A des sites où le spin vaut +1. L'ensemble des configurations peut donc être muni de la structure d'ordre de $P(\Lambda)$ notée ici \leq , et en particulier des deux opérations notées ici \vee et \wedge . Cela donne un sens sur Ω à la notion de fonction croissante. Celle-ci peut s'exprimer au moyen des opérateurs ∇_i introduits plus haut, ou

encore des opérateurs $D_i : D_i f(\omega) = -\omega_i \nabla_i f(\omega)$ qui est l'équivalent dans Ω des dérivées partielles dans \mathbb{R}^n . En effet, f est croissante si et seulement si les fonctions $D_i f$ sont positives.

Nous allons donner la définition de l'attractivité d'une mesure, d'un processus, d'un générateur de Markov, ainsi que les liens entre ces notions.

Cette définition mathématique de l'attractivité correspond à la propriété physique suivante : elle caractérise la tendance qu'ont des atomes disposés sur un réseau (\mathbb{Z}^2 par exemple) à tous s'orienter de la même façon : spin +1 (ou -1).

L'attractivité est fort intéressante car c'est une condition suffisante pour des inégalités de corrélations entre fonctions croissantes : les inégalités FKG dues à Fortuin, Kasteleyn et Ginibre en 1971.

1.1 Les différentes notions d'attractivité.

1.1.1. Mesure attractive.

Définition 1 : une mesure μ sur Ω est attractive si :

$$\forall \omega, \hat{\omega} \in \Omega ; \quad \mu(\omega \wedge \hat{\omega}) \mu(\omega \vee \hat{\omega}) \geq \mu(\omega) \mu(\hat{\omega}). \quad (3)$$

où $(\omega \wedge \hat{\omega})_i = \inf(\omega_i, \hat{\omega}_i)$ et $(\omega \vee \hat{\omega})_i = \sup(\omega_i, \hat{\omega}_i)$.

Lorsque μ est de la forme $d\mu = \frac{e^H d\omega_\Lambda}{\langle e^H \rangle_0}$, alors si μ est attractive on dit aussi que l'hamiltonien H est attractif.

Caractérisons les mesures attractives de cette forme avec les opérateurs ∇_i, D_i :

Lemme 1 : Soit μ une mesure de la forme $d\mu = \frac{e^H d\omega_\Lambda}{\langle e^H \rangle_0}$.

Les propositions suivantes sont équivalentes

1) μ est attractive

2) $\forall \omega \in \Omega ; \forall i, j \in \Lambda \text{ } i \neq j : D_i D_j H(\omega) \geq 0,$

$$3) \forall i \in \Lambda ; \forall \omega, \hat{\omega} \in \Omega \quad \omega \leq \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i = -1 : \nabla_i H(\omega) \leq \nabla_i H(\hat{\omega}).$$

$$4) \forall i \in \Lambda ; \forall \omega, \hat{\omega} \in \Omega ; \omega \leq \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i : D_i H(\omega) \leq D_i H(\hat{\omega}).$$

Une démonstration de ce résultat est due à D. BAKRY et D. MICHEL [1] ; c'est aussi un cas particulier d'un résultat figurant dans le livre de EATON [4] : (proposition 5.1.1).

Remarques.

1 Soit H un hamiltonien : $H(\omega) = \sum_{A \in P(\Lambda)} J_A \omega_A$ où $\omega_A = \prod_{i \in A} \omega_i$.

H est attractif équivaut à

$$\forall i, j \in \Lambda, i \neq j ; \forall \omega \in \Omega : D_i D_j H(\omega) \geq 0.$$

Ce qui équivaut à :

$$\forall i, j \in \Lambda, i \neq j ; \forall \omega \in \Omega : \left(\sum_{A \ni i, j} J_A \omega_A \right) \omega_i \omega_j \geq 0.$$

Dans le cas particulier où $H(\omega) = \sum_{i, j \in \Lambda} J_{ij} \omega_i \omega_j + \sum_{i \in \Lambda} h_i \omega_i$;

On a :

$$H \text{ est attractif équivaut à } \forall i, j \in \Lambda ; i \neq j : J_{ij} \geq 0.$$

Si de plus le champ est nul ($h_i = 0 \forall i \in \Lambda$), les configurations les plus probables pour la mesure de Boltzmann $\frac{e^{H(\omega)} d\omega_\Lambda}{\langle e^H \rangle_0}$ sont celles pour lesquelles tous les spins sont alignés : égaux à +1 (ou -1). Nous retrouvons bien la notion physique introduite plus haut.

2 Si $\Omega = \{-1, 1\}$, alors toutes les mesures positives sur Ω sont attractives.

Avant de montrer que cette propriété d'attractivité se conserve par projection, nous allons énoncer les inégalités FKG, qui sont utilisées dans cette démonstration.

Théorème 1 : Inégalités FKG.

Soit μ une mesure de probabilité sur Ω , attractive.

Alors pour toutes fonctions f et g définies sur Ω à valeurs dans

\mathbb{R} , croissantes, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\langle fg \rangle_\mu \geq \langle f \rangle_\mu \langle g \rangle_\mu.$$

cf. Eaton[4] (5.10).

Lemme 2 :

Si μ est une mesure attractive sur $\Omega = \{-1, 1\}^\Lambda$, alors ses projections sur $\{-1, 1\}^{\Lambda \setminus \{k\}}$, $k \in \Lambda$ sont attractives.

(Cf. Eaton[4] (5.14)).

Nous allons ici en donner une autre démonstration dans le cas où μ est une mesure de probabilité sur Ω de densité $\frac{e^H}{\langle e^H \rangle_0}$ par rapport à la mesure $d\omega_\Lambda$, H étant un hamiltonien attractif.

Preuve :

Soit k un élément de Λ . Nous allons montrer que la marginale de μ obtenue en intégrant par rapport à ω_k est attractive. Un raisonnement par récurrence permet ensuite d'obtenir le résultat.

Il suffit donc de montrer que $K(\omega) = \text{Log} \left\langle \frac{e^H}{\langle e^H \rangle_0} \right\rangle_k$ est attractive.

$\langle \cdot \rangle_k$ désigne $\langle \cdot \rangle_{d\omega_k}$.

L'attractivité de K découle des inégalités FKG appliquées aux fonctions $\omega \rightarrow \exp(\nabla_i H(\omega))$; $\omega \rightarrow \exp(\nabla_j H(\omega))$ et à la mesure ν sur

$$\{-1, 1\} \text{ définie par : } d\nu_\omega(\omega_k) = \frac{\exp(H(\omega)) d\omega_k}{\langle e^{H(\omega)} \rangle_k}.$$

En effet les propositions suivantes 1, 2, 3, 4, 5 sont équivalentes.

1) K est attractive

2) $\forall i, j \in \Lambda \setminus \{k\}$; $i \neq j$; $\forall \omega \in \Omega$: $D_i D_j K(\omega) \geq 0$ (Lemme 1).

3) $\forall i, j \in \Lambda \setminus \{k\}$; $i \neq j$; $\forall \omega \in \Omega$; $\omega_i = \omega_j = -1$: $\nabla_i \nabla_j K(\omega) \geq 0$.

4) $\forall i, j \in \Lambda \setminus \{k\}$; $i \neq j$; $\forall \omega \in \Omega$; $\omega_i = \omega_j = -1$: $\text{Log} \frac{\langle e^{H(\tau_{ij}\omega)} \rangle_k \langle e^{H(\omega)} \rangle_k}{\langle e^{H(\tau_i\omega)} \rangle_k \langle e^{H(\tau_j\omega)} \rangle_k} \geq 0$

5) $\forall i, j \in \Lambda \setminus \{k\}$; $i \neq j$; $\forall \omega \in \Omega$; $\omega_i = \omega_j = -1$;

$$\frac{\langle e^{H(\tau_i, j, \omega)} \rangle_k}{\langle e^{H(\omega)} \rangle_k} \geq \frac{\langle e^{H(\tau_i, \omega)} \rangle_k}{\langle e^{H(\omega)} \rangle_k} \frac{\langle e^{H(\tau_j, \omega)} \rangle_k}{\langle e^{H(\omega)} \rangle_k}$$

Nous introduisons alors la mesure ν_ω mentionnée ci-dessus :

K est attractive équivaut à

$$\forall i, j \in \Lambda, i \neq j; \forall \omega \in \Omega; \omega_i = \omega_j = -1 :$$

$$\langle e^{H(\tau_i, j, \omega) - H(\omega)} \rangle_{\nu_\omega} \geq \langle e^{H(\tau_i, \omega) - H(\omega)} \rangle_{\nu_\omega} \langle e^{H(\tau_j, \omega) - H(\omega)} \rangle_{\nu_\omega}$$

ce qui équivaut à

$$\forall i, j \in \Lambda, i \neq j; \forall \omega \in \Omega; \omega_i = \omega_j = -1 :$$

$$\langle e^{\nabla_i \nabla_j H(\omega) + \nabla_i H(\omega) + \nabla_j H(\omega)} \rangle_{\nu_\omega} \geq \langle e^{\nabla_i H(\omega)} \rangle_{\nu_\omega} \langle e^{\nabla_j H(\omega)} \rangle_{\nu_\omega}.$$

Comme H est attractif, on sait que $\nabla_i \nabla_j H(\omega) \geq 0$ si $\omega_i = \omega_j = -1$,

$$\text{donc } \langle e^{\nabla_i \nabla_j H(\omega) + \nabla_i H(\omega) + \nabla_j H(\omega)} \rangle_{\nu_\omega} \geq \langle e^{\nabla_i H(\omega) + \nabla_j H(\omega)} \rangle_{\nu_\omega}.$$

Une condition suffisante pour que K soit attractive est donc que :

$$\forall i, j \in \Lambda, i \neq j; \forall \omega \in \Omega; \omega_i = \omega_j = -1$$

$$\langle e^{\nabla_i H(\omega) + \nabla_j H(\omega)} \rangle_{\nu_\omega} \geq \langle e^{\nabla_i H(\omega)} \rangle_{\nu_\omega} \langle e^{\nabla_j H(\omega)} \rangle_{\nu_\omega}.$$

Nous remarquons qu'il s'agit d'une inégalité FKG avec :

1°) ν_ω qui est une mesure sur l'ensemble $\{-1, 1\}$. Elle est donc attractive (cf. la remarque 2).

2°) $\omega_{\Lambda \setminus \{k\}}$ étant une configuration donnée sur $\Lambda \setminus \{k\}$; les fonctions : $\omega_k \rightarrow \nabla_i H(\omega)$ et $\omega_k \rightarrow \nabla_j H(\omega)$ qui sont croissantes sur $\{\omega \in \Omega; \omega_i = \omega_j = -1\}$ car $i, j \neq k$. Ceci provient de la seconde condition du Lemme 1.

1.1.2. Semi groupe attractif. Générateur attractif.

Définition 2 :

un semi-groupe de Markov $(P_t)_{t \geq 0}$ est dit attractif si

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ croissante $\Rightarrow P_t f$ croissante.

Nous allons maintenant traduire cette propriété sur le générateur.

Théorème 2 : Soit L un générateur de Markov de la forme $L = \sum_{i \in \Lambda} c(i, \cdot) \nabla_i$ associé au semi-groupe de Markov P_t .

P_t est attractif $\Leftrightarrow \forall i, j \in \Lambda ; i \neq j ; \forall \omega \in \Omega : \omega_i \omega_j \nabla_j c(i, \omega) \geq 0$

Autrement dit P_t est attractif équivaut à :

la fonction $\omega \rightarrow c(i, \omega)$ est $\begin{cases} \text{croissante sur } \{\omega \in \Omega | \omega_i = -1\} \\ \text{décroissante sur } \{\omega \in \Omega | \omega_i = +1\} \end{cases}$

Un tel générateur est dit attractif.

Nous décrivons brièvement deux démonstrations de ce théorème dans le paragraphe 1.2.

Exemple 1 : Soit $d\mu_H = \frac{e^H}{Z_H} d\omega_\Lambda$ une mesure attractive ($Z_H = \int_\Omega e^H d\omega_\Lambda$).

Soit $c(i, \omega) = f(\nabla_i \frac{H(\omega)}{2}) e^{\frac{\nabla_i H(\omega)}{2}}$ où f est paire et positive et

telle que $F : x \rightarrow e^x f(x)$ est croissante.

Alors $L = \sum_{i \in \Lambda} c(i, \cdot) \nabla_i$ est un générateur attractif et symétrique par rapport à μ_H .

Preuve :

. L est symétrique par rapport à μ_H : ceci vient de la proposition 1 et du fait que f est paire.

. L est attractif ; en effet :

L est attractif équivaut à :

$$\forall i, j \in \Lambda ; i \neq j ; \forall \omega \in \Omega : \omega_i \omega_j \nabla_j F(\nabla_i \frac{H(\omega)}{2}) \geq 0$$

ce qui équivaut à

$$\forall i \in \Lambda : \omega \rightarrow F(\nabla_i \frac{H(\omega)}{2}) \text{ est } \begin{cases} \text{croissante sur } \{\omega \in \Omega ; \omega_i = -1\}. \\ \text{décroissante sur } \{\omega \in \Omega ; \omega_i = 1\} \end{cases}$$

ce qui est encore équivalent à :

$$\forall i \in \Lambda ; \omega_i F(\nabla_i \frac{H(\omega)}{2}) \geq \hat{\omega}_i F(\nabla_i \frac{H(\hat{\omega})}{2}) \quad \text{si } \omega \leq \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i.$$

Or ici H étant attractif : $\omega_i \nabla_i H(\omega) \geq \hat{\omega}_i \nabla_i H(\hat{\omega})$ si $\omega \leq \hat{\omega}$ et $\omega_i = \hat{\omega}_i$.
 F étant de plus croissante, on en déduit que :

$$\begin{cases} F(\nabla_i \frac{H(\omega)}{2}) \leq F(\nabla_i \frac{H(\hat{\omega})}{2}) & \text{si } \omega \leq \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i = -1 \\ F(\nabla_i \frac{H(\omega)}{2}) \geq F(\nabla_i \frac{H(\hat{\omega})}{2}) & \text{si } \omega \leq \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i = +1 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\omega_i F(\nabla_i \frac{H(\omega)}{2}) \geq \hat{\omega}_i F(\nabla_i \frac{H(\hat{\omega})}{2}) \quad \text{si } \omega \leq \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i$$

d'où le résultat.

En particulier les exemples 1.2.3.4 de générateurs de la forme

$$L = \sum_{i \in \Lambda} f(\nabla_i H) e^{\nabla_i \frac{H}{2}} \nabla_i, \text{ où } f \text{ est paire et positive, sont attractifs.}$$

Exemple 2 : Soit H un hamiltonien attractif.

$$\text{Posons } \begin{cases} c(i, \omega) = 1 & \text{si } \omega_i = -1 \\ c(i, \omega) = e^{\nabla_i H(\omega)} & \text{si } \omega_i = 1 \end{cases}$$

Le générateur $L = \sum_{i \in \Lambda} c(i, \cdot) \nabla_i$ est alors attractif et symétrique.

Il est utilisé par LIGGETT [10] pour la démonstration de l'inégalité FKG, et par B. YCART [12].

1.2. Liens entre ces diverses notions.

1.2.1. Hamiltonien attractif et générateur de Markov attractif.

Proposition 2 :

Soit $\mu_H(d\omega) = e^{H(\omega)} d\omega_\Lambda$ une mesure sur Ω avec $H(\omega) = \sum_{R \in \Lambda} J_R \omega_R$.

L'hamiltonien H est attractif si et seulement si il existe un générateur L de la forme $L = \sum_{i \in \Lambda} c(i, \cdot) \nabla_i$ symétrique par rapport à μ_H , attractif.

Preuve :

Sens direct : Considérons le générateur de Markov défini par :

$$Lf(\omega) = \sum_{i \in \Lambda} \exp(\nabla_i \frac{H(\omega)}{2}) \nabla_i f(\omega).$$

L est symétrique par rapport à μ_H ; attractif et $\exp \nabla_i \frac{H}{2} > 0$.

Sens réciproque : Soit L un générateur symétrique par rapport à μ_H , attractif et de la forme : $Lf(\omega) = \sum_{i \in \Lambda} c(i, \omega) \nabla_i f(\omega)$

avec

$$c(i, \tau_i \omega) = c(i, \omega) e^{-\nabla_i H(\omega)} \quad (\text{symétrique})$$

$$\omega \rightarrow c(i, \omega) \text{ est } \begin{cases} \text{croissante sur } \{\omega \in \Omega / \omega_i = -1\} \\ \text{décroissante sur } \{\omega \in \Omega / \omega_i = +1\} \end{cases} \quad (\text{attractivité}).$$

Alors $\forall i, j \in \Lambda ; i \neq j ; \forall \omega \in \Omega : D_i D_j H(\omega) > 0$; en effet :

$$\omega \rightarrow \frac{c(i, \tau_i \omega)}{c(i, \omega)} = e^{-\nabla_i H(\omega)} \text{ est } \begin{cases} \text{croissante sur } \{\omega \in \Omega / \omega_i = 1\} \\ \text{décroissante sur } \{\omega \in \Omega / \omega_i = -1\} \end{cases}$$

Ce qui équivaut à $D_i D_j H(\omega) > 0$, c'est-à-dire à H attractif.

(Remarquons que les taux $c(i, \cdot) i \in \Lambda$ sont strictement positifs).

1.2.2. Equivalence entre semi-groupe et générateur attractif.

Cette équivalence est donnée par le théorème 2.

Une preuve de ce théorème figure dans le livre de T. LIGGETT [10] (Théorème 2.2, p.134).

Cette démonstration utilise la notion de couplage que nous allons étudier au paragraphe 2 et dont nous donnons ici une brève description.

Soit L le générateur d'un processus de Markov sur Ω , attractif. On construit un processus de Markov sur $\Omega \times \Omega$ dont les processus marginaux admettent L comme générateur et dont la loi est portée par $\{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega ; \omega \leq \hat{\omega}\} = \Sigma_2$, ce processus est dit processus couplé.

Montrons ainsi que le semi-groupe est bien attractif ; c'est-à-dire que si f est croissante alors $P_t f$ est croissante, en effet :

$$\text{Soit } \omega \leq \hat{\omega} ; \quad P_t f(\hat{\omega}) - P_t f(\omega) = E_{\omega, \hat{\omega}}(f(\hat{\omega}_t) - f(\omega_t))$$

où $(\omega_t, \hat{\omega}_t)$ est le processus couplé issu de $(\omega, \hat{\omega})$

donc $f(\hat{\omega}_t) - f(\omega_t) \geq 0$, p.s.

d'où $P_t f(\hat{\omega}) - P_t f(\omega) \geq 0$ si $\omega \leq \hat{\omega}$.

Une autre démonstration de ce résultat (pour le sens réciproque) est due à D. BAKRY et D. MICHEL [1].

Elle consiste à montrer que la fonction $\omega \rightarrow -\omega_i \nabla_i P_t f(\omega)$ est positive ; pour cela on va écrire $F(\omega, i, t) = -\omega_i \nabla_i P_t f(\omega)$ sous la forme :

$$F(\omega, i, t) = e^{t(L_1 + V)} F(\omega, i, 0)$$

où $L_1 + V$ est un opérateur sur $\Omega \times \Lambda$ non markovien, mais qui est la somme d'un générateur de Markov L_1 sur $\Omega \times \Lambda$ et d'un opérateur de multiplication V sur $\Omega \times \Lambda$.

On vérifie que cet opérateur préserve la positivité car il suffit pour cela que les coefficients hors diagonaux de $L_1 + V$ soient positifs.

On a :

$$\begin{aligned} (L_1 + V)F(\omega, i, t) = & \sum_{j \neq i} \tau_j c(j, \omega) \nabla_j F(\omega, i, t) + \sum_{j \neq i} \omega_j \nabla_j c(j, \omega) (F(\omega, j, t) - F(\omega, i, t)) \\ & + \left(\sum_{j \neq i} \omega_j \nabla_j c(j, \omega) - c(i, \tau_i \omega) - c(i, \omega) \right) F(\omega, i, t). \end{aligned}$$

Remarque : Soit (ω_t, i_t) le processus de Markov de générateur L_1 .

Ni ω_t , ni i_t ne sont en général des processus de Markov, mais le résultat suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que $(\omega_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ soit un processus de Markov et une condition nécessaire et suffisante pour qu'on retrouve le processus initial.

Proposition 3 :

Soit $(b_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R})_{i \in \Lambda}$ une famille de fonctions strictement positives et définissons l'opérateur $D_i^{b_i}$ ainsi :

$$\forall f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad D_i^{b_i} f(\omega) = -\omega_i b_i(\omega) \nabla_i f(\omega).$$

Soit H un hamiltonien, soit $L = \sum_{i \in \Lambda} c(i, \cdot) \nabla_i$ un générateur de Markov attractif, symétrique par rapport à la mesure μ_H , $\exp H(\omega) d\omega_\Lambda$, $d\mu_H(\omega) = \frac{\exp H(\omega) d\omega_\Lambda}{\langle \exp H(\omega) \rangle_0}$, et dont les taux de transitions $c(i, \cdot)$, $i \in \Lambda^d$, sont strictement positifs, et soit P_t le semi-groupe associé.

Alors :

1. $\omega \rightarrow D_i P_t f(\omega)$ est positive équivaut à $\omega \rightarrow D_i^{b_i} P_t f(\omega)$ est positive

$$2. D_i^{b_i} P_t f(\omega) = e^{t(\tilde{L} + \tilde{V})} D_i^{b_i} f(\omega)$$

où \tilde{L} est un opérateur de Markov sur $\Omega \times \Lambda$, \tilde{V} est un opérateur de multiplication sur $\Omega \times \Lambda$

3. Soit (ω_t, i_t) le processus de Markov de générateur \tilde{L} alors ω_t est un processus de Markov si et seulement si

$$* L = \sum_{i \in \Lambda} e^{\nabla_i \frac{H}{2}(\omega)} (\lambda_i + \mu_i \omega_{\Lambda \setminus \{i\}}) \nabla_i \text{ avec } \lambda_i > |\mu_i|$$

* $b_i(\omega) = (\alpha_i + \beta_i \omega_i) f(\omega) e^{\nabla_i \frac{H}{2}(\omega)}$ où $\alpha_i > |\beta_i|$ et f est une fonction strictement positive.

4. De plus le générateur de ω_t est le générateur initial L si et seulement si

$$* L = \sum_{i \in \Lambda} e^{\nabla_i \frac{H}{2}(\omega)} \lambda_i \nabla_i \quad \text{où } \forall i \in \Lambda ; \lambda_i \in \mathbb{R}^{+*}.$$

$$* b_i(\omega) = (\alpha_i + \beta_i \omega_i) e^{\nabla_i \frac{H}{2}(\omega)} \quad \text{où } \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \alpha_i > |\beta_i|$$

Preuve :

2. Notons $L = \sum_{i \in \Lambda} c(i, \cdot) \nabla_i$ et $F(t, i, \omega) = D_i^{b_i} P_t f(\omega)$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(t, i, \omega) &= \sum_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} \omega_{ij} \frac{b_i(\omega)}{b_j(\omega)} \nabla_i c(j, \omega) (F(t, j, \omega) - F(t, i, \omega)) \\ &+ \sum_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} \frac{b_i(\omega)}{\tau_j b_i(\omega)} \tau_i c(j, \omega) \nabla_j F(t, i, \omega) - [\tau_i c(i, \omega) + c(i, \omega)] F(t, i, \omega) \\ &+ \sum_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} [-\omega_i b_i(\omega) \nabla_j \left(\frac{-1}{\omega_i b_i(\omega)} \right) \tau_i c(j, \omega) + \omega_{ij} \frac{b_i(\omega)}{b_j(\omega)} \nabla_i c(j, \omega)] F(t, i, \omega) \\ &= (\tilde{L} + \tilde{V}) F(t, i, \omega). \end{aligned}$$

En effet l'attractivité de L et la positivité des b_i assurent la positivité de $\omega_{ij} \frac{b_i(\omega)}{b_j(\omega)} \nabla_i c(j, \omega)$ et de $\frac{b_i(\omega)}{\tau_j b_i(\omega)} \tau_i c(j, \omega)$.

3. Pour que ω_t soit de Markov il faut et il suffit que $\frac{b_i(\omega)}{\tau_j b_i(\omega)} \tau_i c(j, \omega)$ ne dépende pas de i ; c'est-à-dire que :

$$\forall i, k \in \Lambda \setminus \{j\} ; \frac{b_i(\omega)}{\tau_j b_i(\omega)} \tau_i c(j, \omega) = \frac{b_k(\omega)}{\tau_j b_k(\omega)} \tau_k c(j, \omega).$$

Utilisons maintenant le fait que $c(i, \cdot)$ est symétrique par rapport à μ_H , il existe donc $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ positive telle que $\tau_i f_i = f_i$ et

$c(i, \cdot) = e^{\nabla_i \frac{H}{2}(\cdot)} f_i$. L'égalité précédente s'écrit alors :

$$\frac{b_i(\omega)}{b_k(\omega)} e^{\tau_i \nabla_j \frac{H}{2}(\omega)} \tau_i f_j(\omega) = \tau_j \left(\frac{b_i(\omega)}{b_k(\omega)} \right) e^{\tau_k \nabla_j \frac{H}{2}(\omega)} \tau_k f_j(\omega). \quad (5)$$

En écrivant maintenant cette expression en $\tau_j \omega$ et en multipliant terme à terme l'égalité obtenue et l'égalité ci-dessus, nous obtenons que :

$$\tau_i f_j(\omega) = \tau_k f_j(\omega)$$

Nous montrerons dans le lemme 4 que de telles fonctions satisfaisant de plus $\tau_j f_j = f_j$ sont de la forme :

$$f_j(\omega) = \lambda_j + \mu_j \omega_{\Lambda \setminus \{j\}} ; \lambda_j, \mu_j \in \mathbb{R}.$$

L'hypothèse $c(j, \cdot) > 0$ s'écrit alors $\lambda_j > |\mu_j|$.

En utilisant le fait que $\tau_i f_j = \tau_k f_j$ et que b_i peut s'écrire sous

la forme $b_i(\omega) = e^{\nabla_i^H \frac{\omega}{2}} \bar{b}_i(\omega)$ car $\exp \nabla_i^H \frac{\omega}{2} > 0$, et en reportant cela dans (5) nous obtenons l'égalité suivante :

$$\frac{\bar{b}_i(\omega)}{\bar{b}_k(\omega)} = \tau_j \left(\frac{\bar{b}_i(\omega)}{\bar{b}_k(\omega)} \right)$$

Lemme 3 : Soit $(\bar{b}_i)_{i \in \Lambda}$ une famille de fonctions strictement positives vérifiant $\frac{\bar{b}_i(\omega)}{\bar{b}_k(\omega)} = \tau_j \left(\frac{\bar{b}_i(\omega)}{\bar{b}_k(\omega)} \right)$ pour $i \neq j$ et $k \neq j$, alors il existe une fonction f de Ω dans \mathbb{R} strictement positive et $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$; $\alpha_i > |\beta_i|$ tels que $\bar{b}_i(\omega) = (\alpha_i + \beta_i \omega_i) f(\omega)$.

Ce lemme permet donc d'achever la démonstration de cette proposition 4.3.

Preuve du lemme 3.

Soit k un élément quelconque de Λ . Quel que soit $i \in \Lambda \setminus \{k\}$, $\frac{\bar{b}_i}{\bar{b}_k}$ est une fonction strictement positive ne dépendant que de ω_i et ω_k ; il existe donc $A_{ik} : \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$; $B_{ik} : \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\frac{\bar{b}_i}{\bar{b}_k}(\omega) = A_{ik}(\omega_i) + B_{ik}(\omega_i) \omega_k$ et $A_{ik}(\cdot) > |B_{ik}(\cdot)|$.

Ecrivons maintenant que $\forall j \in \Lambda \setminus \{k\}$; $\frac{\bar{b}_i}{\bar{b}_j} = \frac{\bar{b}_i}{\bar{b}_k} \frac{\bar{b}_k}{\bar{b}_j}$ et que cette fonction ne dépend que de ω_i et ω_j .

$$\frac{\bar{b}_i(\omega)}{\bar{b}_j(\omega)} = \frac{[A_{ik}(\omega_i) + B_{ik}(\omega_i)\omega_k][A_{jk}(\omega_j) - B_{jk}(\omega_j)\omega_k]}{A_{jk}^2(\omega_j) - B_{jk}^2(\omega_j)} = A_{ij}(\omega_i) + B_{ij}(\omega_i)\omega_j$$

d'où

$$A_{ik}(\omega_i)B_{jk}(\omega_j) - A_{jk}(\omega_j)B_{ik}(\omega_i) = 0$$

Comme $A_{ik} > 0$; $A_{jk} > 0$ cette égalité équivaut à :

$$\frac{B_{jk}(\omega_j)}{A_{jk}(\omega_j)} = \frac{B_{ik}(\omega_i)}{A_{ik}(\omega_i)}.$$

C'est donc une égalité entre une fonction de ω_j et une fonction de ω_i , et on peut écrire de telles égalités pour tout i et j éléments de $\Lambda \setminus \{k\}$, on en déduit qu'il existe une constante c_k telle que :

$$\frac{B_{jk}(\omega_j)}{A_{jk}(\omega_j)} = c_k.$$

Donc $\bar{b}_j(\omega) = A_{jk}(\omega_j)(1 + c_k\omega_k)\bar{b}_k(\omega) \quad \forall j \neq k.$

Notons que $|c_k| < 1$ pour assurer la positivité de \bar{b}_j , et soit

$$f(\omega) = (1 + c_k\omega_k)\bar{b}_k(\omega) ;$$

alors $\bar{b}_j(\omega) = A_{jk}(\omega_j)f(\omega) \quad \forall j \neq k$
 $\quad \quad \quad = A_j(\omega_j)f(\omega) \quad \forall j \neq k.$

$$\text{et } \bar{b}_k(\omega) = \frac{1 - c_k\omega_k}{1 - c_k^2} f(\omega) = A_k(\omega_k) f(\omega).$$

Ceci achève cette démonstration.

Lemme 4 :

Soit f une fonction de Ω dans \mathbb{R} telle que :

$$\frac{f(\omega) e^{\nabla_i \frac{H}{2}(\omega)}}{\tau_j f(\omega) e^{\tau_j \nabla_i \frac{H}{2}(\omega)}} e^{\tau_i \nabla_j \frac{H}{2}(\omega)} (\lambda_j - \mu_j \omega_{\Lambda \setminus \{j\}}) = e^{\nabla_j \frac{H}{2}(\omega)} (\lambda_j + \mu_j \omega_{\Lambda \setminus \{j\}}).$$

Ce qui équivaut à :

$$\frac{f(\omega)}{\tau_j f(\omega)} (\lambda_j - \mu_j \omega_{\Lambda \setminus \{j\}}) = (\lambda_j + \mu_j \omega_{\Lambda \setminus \{j\}}).$$

En écrivant cette expression de $\tau_j \omega$, nous obtenons que

$$\frac{\tau_j f(\omega)}{f(\omega)} (\lambda_j - \mu_j \omega_{\Lambda \setminus \{j\}}) = (\lambda_j + \mu_j \omega_{\Lambda \setminus \{j\}}).$$

On en déduit donc que :

$$f(\omega) = \tau_j f(\omega).$$

En écrivant ceci pour tout $j \in \Lambda$, on en conclut que f est constante.

$$\lambda_j - \mu_j \omega_{\Lambda \setminus \{j\}} = \lambda_j + \mu_j \omega_{\Lambda \setminus \{j\}} \quad \text{donc } \mu_j = 0.$$

2. Processus couplé.

2.1. Processus couplé général. Processus couplé de Vaserhtein.

Etant donnés deux processus de Markov X_1, X_2 sur Ω , on appelle processus couplé tout processus de Markov sur $\Omega \times \Omega$ dont les lois marginales sont les lois de X_1, X_2 .

Nous allons décrire tous ces processus, puis nous donnerons brièvement la description d'un processus couplé particulier : le couplage de Vaserhtein. C'est le processus couplé $(\omega_t, \hat{\omega}_t)$ pour lequel la probabilité de modifier à la fois ω et $\hat{\omega}$ est la plus grande. Nous étudierons ensuite les conditions nécessaires et suffisantes sur les processus initiaux pour construire un processus couplé dont la loi est portée par $\{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega ; \omega \neq \hat{\omega}\} = \Sigma_2$. Nous verrons alors que cette condition est l'attractivité dans le cas où les deux processus initiaux ont même générateur (cf. par exemple LIGGETT [10]).

$$\forall i, k \in \Lambda \quad \tau_i f = \tau_k f$$

alors $f(\omega) = \lambda + \mu \omega_\lambda$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Preuve du lemme 4 :

Nous pouvons par exemple montrer ce résultat par récurrence sur $|\Lambda|$.
On vérifie ce résultat pour $|\Lambda|=1$; on le suppose vrai si $|\Lambda|=n-1$
et montrons le par exemple pour $\Lambda = \{1, \dots, n\}$.
Une fonction f peut toujours s'écrire sous la forme :

$$f(\omega) = g(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) + h(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})\omega_n.$$

En fixant successivement $\omega_n = +1$ et $\omega_n = -1$ et en écrivant que

$$\tau_i f = \tau_j f \quad \forall i, j \in \Lambda \setminus \{n\}, \text{ on en déduit que}$$

$$\tau_i g = \tau_j g \text{ et } \tau_i h = \tau_j h.$$

En appliquant notre hypothèse de récurrence on en déduit qu'il existe $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2$ et μ_2 appartenant à \mathbb{R} tels que :

$$f(\omega) = \lambda_1 + \mu_1 \omega_{\Lambda \setminus \{n\}} + (\lambda_2 + \mu_2 \omega_{\Lambda \setminus \{n\}})\omega_n.$$

En écrivant enfin que $\tau_1 f = \tau_n f$ on en déduit que $\mu_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$

$$\text{donc} \quad f(\omega) = \lambda_1 + \mu_2 \omega_\Lambda = \lambda + \mu \omega_\Lambda.$$

Remarque : Si on impose de plus à f d'être strictement positive, nous obtenons la condition $\lambda > |\mu|$.

Preuve de la proposition 3.4.

D'après le point 3) de la proposition 4, nous savons que L est un

$$\text{opérateur de la forme } L = \sum_{i \in \Lambda} e^{\nabla_i \frac{H}{2}(\omega)} (\lambda_i + \mu_i \omega_{\Lambda \setminus \{i\}}) \nabla_i \text{ où } \lambda_i > |\mu_i|$$

et que $b_i(\omega) = (\alpha_i + \beta_i \omega_i) f(\omega) e^{\nabla_i \frac{H}{2}(\omega)}$ où $\alpha_i > |\beta_i|$ et f est une fonction strictement positive.

Pour que le générateur de ω_t soit L il faut de plus que :

$$\forall i, j \in \Lambda ; j \neq i ; \quad \frac{b_i(\omega)}{\tau_j b_i(\omega)} \tau_i c(j, \omega) = c(j, \omega).$$

C'est-à-dire que :

Nous caractériserons ensuite les processus couplés tels que les processus marginaux sont réversibles par rapport à deux mesures données. (Nous parlerons alors de mesures associées à un processus couplé).

Nous récapitulerons ensuite tous les liens existants entre mesures associées à un processus couplé et mesures ordonnées.

Ces différents résultats sont prouvés dans le paragraphe 3).

Cette technique du couplage est par ailleurs fort utilisée dans la littérature par exemple pour donner une condition suffisante pour que deux mesures soient ordonnées, ou dans une démonstration de la proposition 3. Nous allons d'ailleurs revenir sur cette démonstration au paragraphe 4. En effet dans la démonstration de D. BAKRY et D. MICHEL [1], on construit un générateur sur $\Omega \times \Lambda$; et dans la démonstration de LIGGETT [10] on construit un générateur couplé sur $\Omega \times \Omega$. Nous allons mettre en évidence le lien entre ces deux générateurs.

Proposition 4 :

Soient \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 deux générateurs de Markov sur Ω .
Considérons un processus de Markov sur $\Omega \times \Omega$ tel que :

1. les processus marginaux sont Markov de générateurs respectifs $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$:

$$\mathcal{L}_1 = \sum_{i \in \Lambda} \alpha(i, \cdot) \nabla_i ; \quad \mathcal{L}_2 = \sum_{i \in \Lambda} \beta(i, \cdot) \nabla_i$$

2. le processus partant de $(\omega, \hat{\omega})$ ne peut sauter que dans une des configurations suivantes : $(\tau_i \omega, \hat{\omega}) ; (\omega, \tau_i \hat{\omega}) ; (\tau_i \omega, \tau_i \hat{\omega})$.

Le générateur d'un tel processus est de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} F(\omega, \hat{\omega}) = & \sum_{i \in \Lambda} (\alpha(i, \omega) - d(i, \omega, \hat{\omega})) \nabla_i^1 F(\omega, \hat{\omega}) + \\ & \sum_{i \in \Lambda} (\beta(i, \hat{\omega}) - d(i, \omega, \hat{\omega})) \nabla_i^2 F(\omega, \hat{\omega}) + \sum_{i \in \Lambda} d(i, \omega, \hat{\omega}) \nabla_i^1{}^2 F(\omega, \hat{\omega}) \end{aligned}$$

avec $d(i, \omega, \hat{\omega}) \leq \min(\alpha(i, \omega) ; \beta(i, \hat{\omega}))$, et

$$\begin{aligned} \nabla_i^1 F(\omega, \hat{\omega}) &= F(\tau_i \omega, \hat{\omega}) - F(\omega, \hat{\omega}) \\ \nabla_i^2 F(\omega, \hat{\omega}) &= F(\omega, \tau_i \hat{\omega}) - F(\omega, \hat{\omega}) \\ \nabla_i^1{}^2 F(\omega, \hat{\omega}) &= F(\tau_i \omega, \tau_i \hat{\omega}) - F(\omega, \hat{\omega}). \end{aligned}$$

Remarque 3. Le choix le plus simple pour construire un tel processus sur $\Omega \times \Omega$ consiste à considérer deux processus indépendants sur Ω de générateurs respectifs L_1, L_2 .

Ceci revient donc à choisir $d(i, \omega, \hat{\omega}) = 0 \quad \forall i \in \Lambda ; \forall \omega, \hat{\omega} \in \Omega$.

Les deux processus ne sautent p.s. jamais ensemble.

Le processus de Vaserhtein est le processus couplé pour lequel la probabilité de modifier à la fois ω et $\hat{\omega}$ est la plus grande. Ceci revient donc à maximiser la probabilité de passer de $(\omega, \hat{\omega})$ à $(\tau_i \omega, \tau_i \hat{\omega})$; i.e. à prendre $d(i, \omega, \hat{\omega}) = \min(\alpha(i, \omega), \beta(i, \hat{\omega}))$.

Nous allons maintenant considérer un processus couplé prenant ses valeurs dans $\{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega ; \omega \hat{\omega} = \Sigma_2\}$.

Dans la suite, lorsque nous parlerons de processus couplé, c'est toujours de ce processus qu'il s'agira.

2.2. Caractérisation des générateurs L_1 et L_2 associés à un processus couplé.

Proposition 5 :

Soient L_1 et L_2 deux générateurs de Markov sur Ω

$$L_1 f(\omega) = \sum_{i \in \Lambda} \alpha(i, \omega) \nabla_i f(\omega) ; L_2 f(\omega) = \sum_{i \in \Lambda} \beta(i, \omega) \nabla_i f(\omega)$$

$\alpha(i, .)$ et $\beta(i, .)$ étant des fonctions de Ω dans \mathbb{R} positives.

On peut associer un processus couplé à L_1 et L_2 si et seulement si

$$\forall i \in \Lambda ; \alpha(i, \omega) \geq \beta(i, \hat{\omega}) \text{ sur } \{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega, \omega \hat{\omega} = 1 \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i = 1\}$$

$$\alpha(i, \omega) \leq \beta(i, \hat{\omega}) \text{ sur } \{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega ; \omega \hat{\omega} = -1 \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i = -1\}.$$

Le processus couplé est alors unique et est défini par :

$$\forall F: \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} L F(\omega, \hat{\omega}) = & \sum_{i \in \Lambda, (\omega_i, \hat{\omega}_i) = (-1, -1)} [(\beta(i, \hat{\omega}) - \alpha(i, \omega)) \nabla_i^2 + \alpha(i, \omega) \nabla_i^2] F(\omega, \hat{\omega}) \\ & + \sum_{i \in \Lambda, (\omega_i, \hat{\omega}_i) = (1, 1)} [(\alpha(i, \omega) - \beta(i, \hat{\omega})) \nabla_i^2 + \beta(i, \hat{\omega}) \nabla_i^2] F(\omega, \hat{\omega}) \\ & + \sum_{i \in \Lambda, (\omega_i, \hat{\omega}_i) = (-1, 1)} [\alpha(i, \omega) \nabla_i^2 + \beta(i, \hat{\omega}) \nabla_i^2] F(\omega, \hat{\omega}). \end{aligned}$$

Corollaire 1. Dans le cas où $L_1 = L_2 = L$, il existe un processus couplé associé à (L_1, L_2) si et seulement si L est attractif. Ce processus est alors unique, on l'appellera processus couplé associé à L .

Preuve du Corollaire :

La condition nécessaire et suffisante de la Proposition 6 s'écrit ici

$$\begin{cases} \alpha(i, \omega) > \alpha(i, \hat{\omega}) \text{ sur } \{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega ; \omega \leq \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i = 1\} \\ \alpha(i, \omega) < \alpha(i, \hat{\omega}) \text{ sur } \{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega ; \omega \leq \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i = -1\} \end{cases}$$

ce qui est bien la condition d'attractivité (Théorème 2).

Une autre description d'un processus de générateur $L = \sum_{i \in \Lambda} c(i, \cdot) \nabla_i$ permet de construire deux processus ω_t et $\hat{\omega}_t$ issus

de deux configurations initiales $\omega_0, \hat{\omega}_0$; $\omega_0 \leq \hat{\omega}_0$; ayant le même générateur attractif L , qui vérifient $\omega_t \leq \hat{\omega}_t$ (cf. R. DURRETT [3]). Nous supposons sans perte de généralité que

$$\max_{i \in \Lambda, \omega \in \Omega_\Lambda} c(i, \omega) = 1$$

Décrivons le comportement du processus ω_t de générateur L issu de ω_0 :

En chaque site i de Λ il y a deux horloges indépendantes H_1^i et H_{-1}^i qui sonnent au bout d'un temps exponentiel de paramètre 1 ; et deux variables aléatoires indépendantes U_1^i et U_{-1}^i uniformes sur $[0, 1]$. Si la configuration initiale au site i est 1 (respectivement -1) c'est l'horloge H_{-1}^i et U_1^i (respectivement H_1^i et U_{-1}^i) qu'on considère.

Si cette horloge sonne au temps t et que c' est la première à sonner, alors le processus saute en $\tau_i \omega$ si $U_{-1}^i < c(i, \omega_{-})$, et on réitère ce procédé.

Décrivons maintenant le processus $(\omega_t, \hat{\omega}_t)$ issu de $(\omega_0, \hat{\omega}_0)$; $\omega_0 \leq \hat{\omega}_0$.

En un site i tel que $\omega_i = -1$ et $\hat{\omega}_i = 1$, l'évolution du premier processus est décrite comme précédemment par H_1^i, U_1^i , celle

du second par H_1^i, U_1^i ; jusqu'au premier temps où l'un de ces deux processus saute, le processus reste bien dans Σ_2 .

Si $\omega_i = \hat{\omega}_i = -1$ l'horloge H_1^i détermine l'évolution des deux processus. Lorsque cette horloge sonne, si $U_1^i < c(i, \omega_t)$ alors le premier processus saute et si $U_1^i < c(i, \hat{\omega}_t)$, le deuxième processus saute au site i .

Comme le générateur L est attractif $c(i, \omega_t) \leq c(i, \hat{\omega}_t)$ et donc si le premier processus saute au site i , alors le second processus saute aussi. Les seules configurations que l'on peut atteindre sont donc $(+1, +1)$ et $(-1, +1)$.

Le même raisonnement dans le cas où $\omega_i = \hat{\omega}_i = 1$ permet de conclure que $\forall t \geq 0, \omega_t \leq \hat{\omega}_t$.

Remarque 5.

Soit $(\omega, \hat{\omega}) \in \Sigma_2$ la configuration initiale.

Donnons dans cette remarque l'idée intuitive de la construction du processus couplé.

On raisonne conditionnellement au fait que le processus saute au site i . Deux cas se présentent alors :

- Soit $i \in A = \{i \in \Lambda / \omega_i \neq \hat{\omega}_i\}$, auquel cas seul l'un (mais un quelconque) des processus marginaux peut sauter.

On choisit alors comme dans la remarque 3) de faire évoluer chaque processus avec son propre taux.

C'est-à-dire qu'on choisit les taux

- . $\alpha(i, \omega)$ pour le passage de $(\omega, \hat{\omega})$ à $(\tau_i \omega, \hat{\omega}) \quad \forall i \in A$
- . $\beta(i, \hat{\omega})$ pour le passage de $(\omega, \hat{\omega})$ à $(\omega, \tau_i \hat{\omega}) \quad \forall i \in A$.

- Soit $i \in A^c = \{i \in \Lambda / \omega_i = \hat{\omega}_i\}$ le processus ne peut pas atteindre une configuration qui au site i vaut $(1, -1)$.

Par exemple si $\omega_i = \hat{\omega}_i = -1$ on ne peut modifier uniquement la configuration ω au site i . On pourrait être tenté comme précédemment de modifier uniquement la configuration $\hat{\omega}$ avec le taux $\beta(i, \hat{\omega})$, mais ceci ne permet pas d'obtenir les bonnes marginales. On s'autorisera donc à modifier à la fois ω et $\hat{\omega}$, ceci avec le taux de transition lié à $f_1 : \alpha(i, \omega)$. On modifiera la configuration $\hat{\omega}$ seule avec le taux de transition donnant les bonnes marginales, c'est-à-dire : $\beta(i, \hat{\omega}) - \alpha(i, \omega)$.

Pour que ce processus soit bien Markovien, il faut que $\beta(i, \hat{\omega}) - \alpha(i, \omega)$ soit positif sur $\{i \in \Lambda ; \omega_i = \hat{\omega}_i = -1\}$.
Les hypothèses sur \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 de la proposition 6) servent donc à assurer que le processus couplé est bien Markovien.

Remarque 6 : Décrivons trajectoriellement ce processus couplé.
Soient $\omega, \hat{\omega} \in \Omega$. $(\omega, \hat{\omega})$, $\hat{\omega} \leq \omega$ est la configuration initiale du processus couplé.

$$\begin{aligned} \text{Soit } S_1(\omega) &= \{i \in \Lambda ; \omega_i \neq \hat{\omega}_i\} \\ S_2(\omega) &= \{i \in \Lambda ; \omega_i = \hat{\omega}_i = -1\} \\ \text{et } S_3(\omega) &= \{i \in \Lambda ; \omega_i = \hat{\omega}_i = 1\} \end{aligned}$$

En chaque site i de Λ ; il y a deux horloges H_1^i et H_2^i .

. Si $i \in S_1(\omega)$, l'horloge H_1^i (resp. H_2^i) sonne au bout d'un temps exponentiel de paramètre $\alpha(i, \omega)$ (resp. $\beta(i, \hat{\omega})$)

Si $i \in S_2(\omega)$ ces deux horloges ont pour paramètre respectif $\beta(i, \hat{\omega}) - \alpha(i, \omega)$ et $\alpha(i, \omega)$

. Si $i \in S_3(\omega)$ ces deux horloges ont pour paramètre respectif $\alpha(i, \omega) - \beta(i, \hat{\omega})$ et $\beta(i, \hat{\omega})$.

Si H_1^i est la première horloge à sonner, et $i \in S_1(\omega)$ (respectivement $i \in S_2(\omega)$; $i \in S_3(\omega)$) alors le processus couplé passe de $(\omega, \hat{\omega})$ à $(\tau_i \omega, \hat{\omega})$ (resp. $(\omega, \tau_i \hat{\omega})$; $(\tau_i \omega, \tau_i \hat{\omega})$).

Si H_2^i est la première horloge à sonner et $i \in S_1(\omega)$ (respectivement $S_2(\omega)$; $S_3(\omega)$) alors le processus couplé passe de $(\omega, \hat{\omega})$ à $(\omega, \tau_i \hat{\omega})$ (resp. $(\tau_i \omega, \tau_i \hat{\omega})$, $(\tau_i \omega, \tau_i \hat{\omega})$).

Nous allons maintenant caractériser les processus couplés sur Σ_2 associés aux générateurs $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ tels que les processus marginaux aient pour mesure réversible des mesures données.

$$\text{Soit } \mathcal{L}_j = \sum_{i \in \Lambda} c_j(i, \omega) \nabla_i \quad j=1,2. \quad (6)$$

où $c_j(i, \cdot)$ est une fonction de Ω dans \mathbb{R} , strictement positive ;

$$\text{et } \mu_j = \frac{1}{Z_j} e^{H_j(\omega)} d\omega \quad \text{où } H_j(\omega) = \sum_{A \subset \Lambda} J_A^j \omega_A \quad j=1,2. \quad (7)$$

Proposition 6 :

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures de probabilités définies en (7)

ci-dessus. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1) on peut construire un processus couplé tel que les processus marginaux de générateurs respectifs L_1 et L_2 décrits ci-dessus (6) sont symétriques par rapport aux mesures μ_1 respectivement μ_2 décrites en (7).

2) $D_1 H_1(\omega) \leq D_1 H_2(\hat{\omega})$ si $\omega \leq \hat{\omega}$ et $\omega_1 = \hat{\omega}_1$.

3) $\forall \omega, \hat{\omega} \in \Omega \quad \mu_1(\omega \wedge \hat{\omega}) \mu_2(\omega \vee \hat{\omega}) \geq \mu_1(\omega) \mu_2(\hat{\omega})$

Remarque 7.

. La condition 3 est une condition suffisante pour que $\mu_1 \leq \mu_2$ (cf. T. LIGGETT [10], p.75, Théorème 2.9).

. Dans le cas où μ_1 est égale à μ_2 , cette condition 3 est l'attractivité de μ_1 .

Rappelons maintenant la notion d'ordre entre deux mesures sur Ω .

Définition 3 :

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures de probabilité sur Ω .
 $\mu_1 \leq \mu_2 \Leftrightarrow \forall f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ croissante} : \langle f \rangle_{\mu_1} \leq \langle f \rangle_{\mu_2}$.

Exemple :

plaçons nous sur $\{-1, 1\}$

Soit $\mu_1 = a \delta_1 + (1-a)\delta_{-1}$

$\mu_2 = b \delta_1 + (1-b)\delta_{-1}$

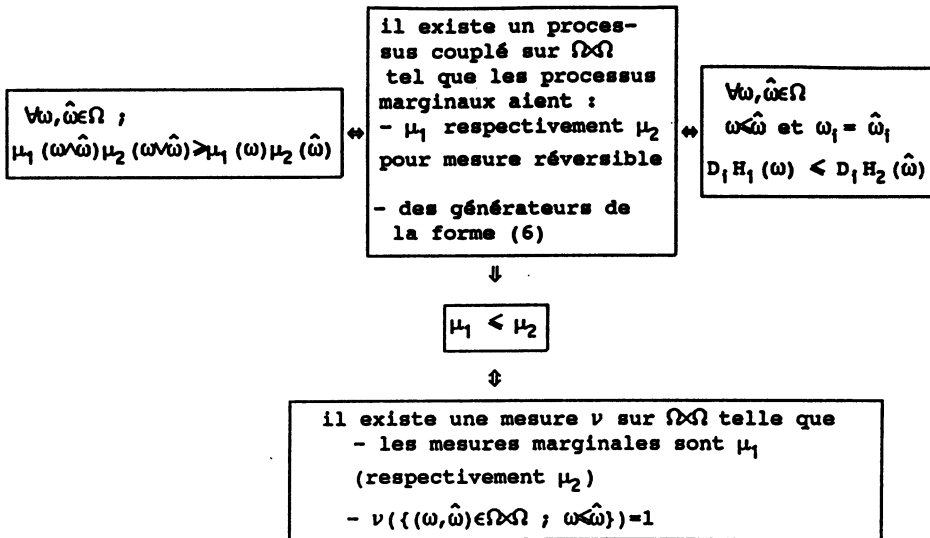
alors $\mu_1 \leq \mu_2 \Leftrightarrow a \leq b$.

En effet soit f une fonction croissante $f : \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} \langle f \rangle_{\mu_1} &= af(1) + (1-a)f(-1). \\ &= a(f(1) - f(-1)) + f(-1) \end{aligned}$$

donc $\langle f \rangle_{\mu_1} \leq \langle f \rangle_{\mu_2} \Leftrightarrow a \leq b$.

Soient μ_1, μ_2 deux mesures définies en (7) ; le schéma suivant récapitule les liens entre les mesures vérifiant la condition 3 de la proposition 6, les mesures associées à un processus couplé, les mesures ordonnées.



. Cette dernière équivalence est démontrée par T. LIGGETT [10], p.72 (Théorème 2.4).

. Pour vérifier que $\mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow \forall \omega, \hat{\omega} \in \Omega ; \mu_1(\omega \backslash \hat{\omega}) \mu_2(\omega \backslash \hat{\omega}) \geq \mu_1(\omega) \mu_2(\hat{\omega})$,

il suffit de considérer une mesure μ_1 qui ne soit pas attractive et de prendre $\mu_2 = \mu_1$.

3. Démonstration des résultats énoncés au §2.

3.1. Démonstration de la Proposition 4.

Remarque 8 : Le générateur d'un processus couplé est nécessairement de la forme

$$Lf(\omega, \hat{\omega}) = \sum_{i \in \Lambda} (a_i(\omega, \hat{\omega}) \nabla_i^1 + b_i(\omega, \hat{\omega}) \nabla_i^2 + c_i(\omega, \hat{\omega}) \nabla_i^{1,2}) f(\omega, \hat{\omega})$$

(Ceci vient de la condition 2 de la proposition 5).

Notation : Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous notons $a_i(-1, 1)$ pour $a_i(\omega, \hat{\omega})$ si $\omega_i = -1$ et $\hat{\omega}_i = 1$. C'est-à-dire que nous n'indiquons pas la dépendance en $\omega_j, \hat{\omega}_j$ pour $j \neq i$.

Ecrivons maintenant le fait que les processus marginaux ont pour générateurs respectifs l_1, l_2 , c'est à dire que quelles que

soient f et g deux fonctions de Ω dans \mathbb{R}

$$\begin{cases} \text{si } f(\omega, \hat{\omega}) = h(\omega) \text{ alors } \mathbb{L}f(\omega, \hat{\omega}) = \mathbb{L}_1 h(\omega) \\ \text{si } f(\omega, \hat{\omega}) = g(\hat{\omega}) \text{ alors } \mathbb{L}f(\omega, \hat{\omega}) = \mathbb{L}_2 g(\hat{\omega}) \end{cases} \quad (8)$$

Pour obtenir la condition (8), nous allons considérer une fonction f sur $\Omega \times \Omega$ ne dépendant que de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de la première configuration, c'est-à-dire qu'il existe $h_i : \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall \omega, \hat{\omega} \in \Omega ; f(\omega, \hat{\omega}) = h_i(\omega_i),$$

$$\text{alors } \mathbb{L}f(\omega, \hat{\omega}) = (a_i(\omega, \hat{\omega}) + c_i(\omega, \hat{\omega})) \nabla_i h_i(\omega_i).$$

$$\text{Donc (8)} \Rightarrow \alpha(i, \omega) = a_i(\omega, \hat{\omega}) + c_i(\omega, \hat{\omega})$$

On obtient de même :

$$(9) \Rightarrow \beta(i, \hat{\omega}) = b_i(\omega, \hat{\omega}) + c_i(\omega, \hat{\omega}).$$

$$\text{Ce qui donne bien : } a_i(\omega, \hat{\omega}) = \alpha(i, \omega) - c_i(\omega, \hat{\omega}) \quad (10)$$

$$b_i(\omega, \hat{\omega}) = \beta(i, \hat{\omega}) - c_i(\omega, \hat{\omega}). \quad (11)$$

De plus pour que \mathbb{L} soit Markovien, il faut que a_i et b_i soient des fonctions positives de $\Omega \times \Omega$ dans \mathbb{R} , ce qui donne :

$$c_i(\omega, \hat{\omega}) \leq \min(\alpha(i, \omega), \beta(i, \hat{\omega})) \quad (12)$$

on vérifie de plus que ces conditions sont bien suffisantes.

Remarque 9 :

Pour le cas du processus de Vaserhtein, on a simplement pris $c_i(\omega, \hat{\omega}) = \min(\alpha(i, \omega), \beta(i, \hat{\omega}))$.

3.2 Démonstration de la Proposition 5.

3.2.1. Au préalable, caractérisons les générateurs de processus de Markov sur $\Omega \times \Omega$ dont les lois des marginales soit portées par Σ_2 i.e. tels que

$$\forall t \geq 0 ; P(\{(\omega_t, \hat{\omega}_t) ; \omega_t \leq \hat{\omega}_t\} / (\omega_0, \hat{\omega}_0) = (\omega, \hat{\omega})) = 1 \quad \text{dès que } \omega \leq \hat{\omega}.$$

Lemme 3 :

Notons $\mathcal{A} = \{f : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ positives, nulles sur } \Sigma_2\}$.

Soit $(\omega_t, \hat{\omega}_t)$ un processus de Markov sur $\Omega \times \Omega$, de générateur L , de semi-groupe P_t .

Alors les conditions suivantes sont équivalentes. :

- 1) $\forall \omega \leq \hat{\omega} ; \forall t \geq 0 \quad P(\omega_t \leq \hat{\omega}_t / (\omega_0, \hat{\omega}_0) = (\omega, \hat{\omega})) = 1.$
- 2) $\forall t \geq 0 ; \quad P_t(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$
- 3) $L(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$

Preuve du Lemme 3.

1) \Leftrightarrow 2).

sens direct.

Soit $f \in \mathcal{A}$;

$$\begin{aligned} \text{alors : } P_t f(\omega, \hat{\omega}) &= E(f(\omega_t, \hat{\omega}_t) / (\omega_0, \hat{\omega}_0) = (\omega, \hat{\omega})) \\ &= 0 \quad \forall (\omega, \hat{\omega}) \in \Sigma_2. \end{aligned}$$

car $(\omega_t, \hat{\omega}_t) \in \Sigma_2$ p.s. et f est nulle sur Σ_2 .

Sens réciproque :

Montrons que : $\omega \leq \hat{\omega} \Rightarrow P(\omega_t \leq \hat{\omega}_t / (\omega_0, \hat{\omega}_0) = (\omega, \hat{\omega})) = 1$

Soit $f = \mathbb{1}_{(\Sigma_2)^c} ; f \in \mathcal{A}$

donc $P_t f(\omega, \hat{\omega}) = 0 \quad \forall (\omega, \hat{\omega}) \in \Sigma_2$

$$\begin{aligned} \text{or } P_t f(\omega, \hat{\omega}) &= E(\mathbb{1}_{(\Sigma_2)^c}(\omega_t, \hat{\omega}_t) / (\omega_0, \hat{\omega}_0) = (\omega, \hat{\omega})) \\ &= 1 - P(\omega_t \leq \hat{\omega}_t / (\omega_0, \hat{\omega}_0) = (\omega, \hat{\omega})) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2) \Leftrightarrow 3)

Sens direct : \mathcal{A} est un sous-espace de l'ensemble des fonctions de $\Omega \times \Omega$ dans \mathbb{R} .

De plus $Lf(\omega, \hat{\omega}) = \lim_{t \rightarrow 0} (P_t f(\omega, \hat{\omega}) - f(\omega, \hat{\omega})) / t.$

donc $(f \in \mathcal{A} \Rightarrow P_t f \in \mathcal{A}) \Rightarrow (f \in \mathcal{A} \Rightarrow Lf \in \mathcal{A}).$

sens réciproque : comme on est en dimension finie, L s'identifie à une matrice de $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$, P_t à une exponentielle de matrice et f à un vecteur de $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$. $P_t f = e^{tL} f$, on en déduit que $(L\mathcal{A} \subset \mathcal{A}) \Rightarrow (P_t \mathcal{A} \subset \mathcal{A}).$

3.2.2. Preuve de la proposition 5 : sens direct.

Nous allons traduire le fait que la loi du processus couplé est portée par Σ_2 , puis nous utiliserons les conditions obtenues pour que les processus marginaux aient pour générateurs L_1, L_2 .

Nous déduirons ainsi les coefficients $a_i(\dots)$; $b_i(\dots)$; $c_i(\dots)$.

* Ecrivons la condition $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$

Pour cela considérons la fonction f suivante :

$f : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; telle que $f(\omega, \hat{\omega}) = \mathbb{1}_{\omega_i > \hat{\omega}_i}$; donc $f \in \mathcal{A}$

alors :

$$\mathcal{L} f(\omega, \hat{\omega}) = a_i(\omega, \hat{\omega}) \nabla_i^1 f(\omega, \hat{\omega}) + b_i(\omega, \hat{\omega}) \nabla_i^2 f(\omega, \hat{\omega}) + c_i(\omega, \hat{\omega}) \nabla_i^{1,2} f(\omega, \hat{\omega})$$

Envisageons les différents cas possibles pour $(\omega_i, \hat{\omega}_i)$.

$$\text{. Si } (\omega_i, \hat{\omega}_i) = (-1, -1) \text{ alors } \mathcal{L} f(\omega, \hat{\omega}) = 0 = a_i(-1, -1) \quad (13)$$

$$\text{. Si } (\omega_i, \hat{\omega}_i) = (1, 1) \text{ alors } \mathcal{L} f(\omega, \hat{\omega}) = 0 = b_i(1, 1) \quad (14)$$

$$\text{. Si } (\omega_i, \hat{\omega}_i) = (-1, 1) \text{ alors } \mathcal{L} f(\omega, \hat{\omega}) = c_i(-1, 1)$$

* Nous rajoutons maintenant les conditions nécessaires et suffisantes pour que les processus marginaux aient pour générateur \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 , i.e. :

$$a_i(\omega, \hat{\omega}) + c_i(\omega, \hat{\omega}) = \alpha(i, \omega) \quad (10)$$

$$b_i(\omega, \hat{\omega}) + c_i(\omega, \hat{\omega}) = \beta(i, \hat{\omega}) \quad (11)$$

En écrivant ces deux équations pour tous les couples $(\omega_i, \hat{\omega}_i)$ nous obtenons :

$$\begin{cases} a_i(1, 1) + c_i(1, 1) = \alpha(i, 1) \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} a_i(-1, 1) + c_i(-1, 1) = \alpha(i, -1) \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} a_i(-1, -1) + c_i(-1, -1) = \alpha(i, -1) \end{cases} \quad (17)$$

et

$$\begin{cases} b_i(1, 1) + c_i(1, 1) = \beta(i, 1) \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} b_i(-1, 1) + c_i(-1, 1) = \beta(i, 1) \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} b_i(-1, -1) + c_i(-1, -1) = \beta(i, -1) \end{cases} \quad (20)$$

En utilisant (13) (14) nous obtenons :

$$a_i(-1, -1) = 0 \quad \text{donc} \quad c_i(-1, -1) = \alpha(i, -1) \quad (21)$$

$$b_i(1, 1) = 0 \quad \text{donc} \quad c_i(1, 1) = \beta(i, 1) \quad (22)$$

$$c_i(-1, 1) = 0 \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a_i(-1, 1) = \alpha(i, -1) \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} b_i(-1, 1) = \beta(i, 1) \end{cases} \quad (24)$$

En portant (21) et (22) respectivement dans (20) et (15) nous obtenons :

$$b_i(-1, -1) = \beta(i, -1) - \alpha(i, -1) \quad (25)$$

$$a_i(1, 1) = \alpha(i, 1) - \beta(i, 1) \quad (26)$$

Il nous reste à vérifier que ce processus est bien de Markov, pour cela il faut et il suffit que $a_i(.,.)$; $b_i(.,.)$ et $c_i(.,.)$ soient positifs, ce qui nous donne d'après (25) et (26) :

$$\begin{cases} \beta(i, -1) - \alpha(i, -1) \geq 0 & \text{i.e.} \\ \alpha(i, 1) - \beta(i, 1) > 0 \end{cases} \begin{cases} \alpha(i, \omega) < \beta(i, \hat{\omega}) & \text{si } \omega < \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i = -1 \\ \alpha(i, \omega) > \beta(i, \hat{\omega}) & \text{si } \omega < \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i = 1. \end{cases}$$

3.2.3. Preuve de la proposition 5 ; sens réciproque.

On vérifie qu'un tel processus sur Σ_2 est bien un processus couplé.

Ceci achève la démonstration de la proposition (6).

3.3. Démonstration de la proposition 6 :

Nous allons montrer que 1) \Leftrightarrow 2) puis 2) \Leftrightarrow 3).

1) \Rightarrow 2) : Soit L le générateur d'un processus couplé.

soient L_j , $j=1,2$ les générateurs des processus marginaux, ils sont

$$\text{de la forme } L_j f(\omega) = \sum_{i \in \Lambda} c_j(i, \omega) \nabla_i f(\omega) ;$$

ils admettent comme mesure réversible μ_1 , respectivement μ_2 , ce qui d'après (1) équivaut à :

$$\frac{c_j(i, \tau_i \omega)}{c_j(i, \omega)} = e^{-\nabla_i H_j(\omega)} \quad j=1,2.$$

De plus la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse associer un processus couplé à L_1 et L_2 est que :

$$\begin{cases} c_1(i, \omega) \geq c_2(i, \hat{\omega}) & \text{sur } \{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega ; \omega < \hat{\omega} ; \omega_i = \hat{\omega}_i = 1\} \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} c_1(i, \omega) \leq c_2(i, \hat{\omega}) & \text{sur } \{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega ; \omega < \hat{\omega} ; \omega_i = \hat{\omega}_i = -1\} \end{cases} \quad (28)$$

En portant (1) dans cette dernière inégalité (28) nous obtenons que

$$\begin{cases} c_1(i, \omega) \geq c_2(i, \hat{\omega}) & \text{sur } \{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega ; \omega < \hat{\omega} ; \omega_i = \hat{\omega}_i = 1\} \\ c_1(i, \omega) e^{-\nabla_i H_1(\omega)} \leq c_2(i, \hat{\omega}) e^{-\nabla_i H_2(\hat{\omega})} & \text{sur } \{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega ; \omega < \hat{\omega} ; \omega_i = \hat{\omega}_i = +1\} \end{cases} \quad (29)$$

c'est-à-dire que :

$$1 \leq \frac{c_1(i, \omega)}{c_2(i, \hat{\omega})} \leq \frac{e^{-\nabla_i H_2(\hat{\omega})}}{e^{-\nabla_i H_1(\omega)}} \quad \text{sur } \{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega ; \omega \leq \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i = 1\}.$$

On obtient donc que :

$$\begin{aligned} -\nabla_i H_1(\omega) &\leq -\nabla_i H_2(\hat{\omega}) \quad \text{sur } \{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega ; \omega \leq \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i = 1\} \\ \text{i.e. } D_i H_1(\omega) &\leq D_i H_2(\hat{\omega}) \quad \text{sur } \{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega ; \omega \leq \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i\} \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

2) \Rightarrow 1). Il suffit de poser $c_1(i, \omega) = e^{\frac{\nabla_i H_1(\omega)}{2}}$ et $c_2(i, \omega) = e^{\frac{\nabla_i H_2(\omega)}{2}}$.

Comme $D_i H_1(\omega) \leq D_i H_2(\hat{\omega})$ sur $\{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega ; \omega \leq \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i\}$, on en déduit qu'on peut associer un processus couplé à $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ car (27) et (28) sont vérifiées.

De plus on vérifie bien que \mathcal{L}_1 admet μ_1 pour mesure réversible d'après (1) et de même que \mathcal{L}_2 admet μ_2 pour mesure réversible.

3) \Rightarrow 2).

On suppose donc que $\forall \omega, \hat{\omega} \in \Omega ; \mu_1(\omega \wedge \hat{\omega}) \mu_2(\omega \vee \hat{\omega}) \geq \mu_1(\omega) \mu_2(\hat{\omega})$.

Nous allons appliquer cela à deux configurations σ, σ' définies de la façon suivante :

Considérons $\omega, \hat{\omega}$ deux éléments de $\Omega ; \omega \leq \hat{\omega}$ et $\omega_i = \hat{\omega}_i = 1$.

$$\text{Prenons } \begin{cases} \sigma = \omega \\ \hat{\sigma} = \tau_i \hat{\omega} \end{cases}$$

alors

$$\mu_1(\sigma \wedge \hat{\sigma}) \mu_2(\sigma \vee \hat{\sigma}) \geq \mu_1(\sigma) \mu_2(\hat{\sigma})$$

$$\Leftrightarrow \mu_1(\tau_i \sigma) \mu_2(\tau_i \hat{\sigma}) \geq \mu_1(\sigma) \mu_2(\hat{\sigma})$$

$$\Leftrightarrow e^{\nabla_i H_1(\tau_i \sigma)} e^{\nabla_i H_2(\tau_i \hat{\sigma})} \geq e^{\nabla_i H_1(\sigma)} e^{\nabla_i H_2(\hat{\sigma})}$$

$$\Leftrightarrow \nabla_i H_1(\sigma) + \nabla_i H_2(\hat{\sigma}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla_i H_1(\omega) + \nabla_i H_2(\tau_i \hat{\omega}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla_i H_1(\omega) - \nabla_i H_2(\hat{\omega}) \geq 0.$$

On a donc montré que

$$\forall \omega, \hat{\omega} \in \Omega ; \quad \omega \leq \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i = 1 ; \quad \nabla_i H_1(\omega) \geq \nabla_i H_2(\hat{\omega})$$

donc que

$$\forall \omega, \hat{\omega} \in \Omega ; \quad \omega \leq \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i ; \quad D_i H_1(\omega) \leq D_i H_2(\hat{\omega}). \quad \text{CQFD.}$$

2) \Rightarrow 3).

Nous supposons donc que

$$\nabla_i H_1(\omega) - \nabla_i H_2(\hat{\omega}) \geq 0 \quad \text{si } \omega \leq \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i = 1 \quad (30)$$

$$\text{Posons } H_1(\omega) = \sum_{A \subset \Lambda} J_A^1 \omega_A ; \quad H_2(\omega) = \sum_{A \subset \Lambda} J_A^2 \omega_A \quad \text{où } \omega_A = \prod_{i \in A} \omega_i$$

$$(30) \Leftrightarrow \sum_{A \ni i} J_A^1 \omega_A \leq \sum_{A \ni i} J_A^2 \hat{\omega}_A \quad \text{si } \omega \leq \hat{\omega} \text{ et } \omega_i = \hat{\omega}_i = 1.$$

Nous allons montrer que : $\forall \omega, \hat{\omega} \in \Omega ; \quad \mu_1(\omega \vee \hat{\omega}) \mu_2(\omega \wedge \hat{\omega}) \geq \mu_1(\omega) \mu_2(\hat{\omega})$, (31)
en raisonnant par récurrence sur le cardinal de l'ensemble des sites i tels que $\omega_i \neq \hat{\omega}_i$.

* Si $\omega = \hat{\omega}$ alors (31) est vraie.

* Supposons que (31) est vraie si ω et $\hat{\omega}$ sont distinctes en au plus $(n-1)$ sites. Montrons que (31) est vraie pour σ et $\hat{\sigma}$ distinctes en n sites. Soient $\{1, \dots, n\}$ ces sites.

. Nous commençons par nous ramener au cas où il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\sigma_i = 1$ et $\hat{\sigma}_i = -1$.

En effet s'il n'existe pas de tel site $i \in \{1, \dots, n\}$ alors $\sigma \leq \hat{\sigma}$ et (31) est bien vérifiée.

. Supposons donc que $\sigma_n = +1$ et $\hat{\sigma}_n = -1$.

Les configurations σ et $\tau_n \hat{\sigma}$ sont distinctes en au plus $(n-1)$ points. Nous pouvons donc appliquer notre hypothèse de récurrence.

$$H_1(\sigma \wedge \tau_n \hat{\sigma}) + H_2(\sigma \vee \tau_n \hat{\sigma}) \geq H_1(\sigma) + H_2(\tau_n \hat{\sigma}). \quad (32)$$

$$\text{or} \quad \sigma \vee \tau_n \hat{\sigma} = \sigma \vee \hat{\sigma}$$

$$\text{donc (32)} \Leftrightarrow H_1(\sigma \wedge \tau_n \hat{\sigma}) + H_2(\sigma \vee \hat{\sigma}) \geq H_1(\sigma) + H_2(\tau_n \hat{\sigma}) \quad (33)$$

$$\text{De plus} \quad H_1(\sigma \wedge \hat{\sigma}) + H_2(\tau_n \hat{\sigma}) \geq H_1(\sigma \wedge \tau_n \hat{\sigma}) + H_2(\hat{\sigma}) \quad (34)$$

car ceci est équivalent à :

$$\nabla_n H_1(\sigma \wedge \tau_n \hat{\sigma}) \geq \nabla_n H_2(\tau_n \hat{\sigma}) ; \text{ ce qui est vrai d'après (30),}$$

$$\text{car } \tau_n \hat{\sigma} \geq \sigma \wedge \tau_n \hat{\sigma} \quad \text{et} \quad (\tau_n \hat{\sigma})_n = (\sigma \wedge \tau_n \hat{\sigma})_n = 1.$$

Finalement (33) et (34) permettent de conclure que :

$$H_1(\sigma \vee \sigma') + H_2(\sigma \vee \sigma') \geq H_1(\sigma) + H_2(\sigma') \quad \text{CQFD.}$$

4. Générateur FKG et générateur couplé associés à un générateur de Markov sur Ω , attractif.

Soit L le générateur d'un processus de Markov sur Ω ,

$$L = \sum_{i \in \Lambda} \alpha(i, \cdot) \nabla_i, \text{ et } P_t \text{ le semi-groupe associé.}$$

Nous avons énoncé le résultat suivant (théorème 2) :

Si L est un générateur de Markov attractif alors le semi-groupe associé est attractif.

Nous connaissons deux démonstrations de ce résultat. L'une d'elles utilise le processus FKG, processus sur $\Omega \times \Lambda$; l'autre le processus couplé associé à L , processus sur $\Omega \times \Omega$.

Nous allons dans ce paragraphe montrer que le générateur FKG est la trace sur $\Omega \times \Lambda$ d'un générateur sur $\Omega \times P(\Lambda)$ naturellement associé au processus couplé. Enfin nous exprimerons le générateur du processus couplé à partir de générateurs FKG.

Auparavant, rappelons brièvement les expressions de ces deux générateurs.

- le générateur FKG.

Soit $f_1 : \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(L_1 + V)f_1(\omega, i) = \sum_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} [\omega_{ij} \nabla_i \alpha(j, \omega) (f_1(\omega, j) - f_1(\omega, i)) + \alpha(j, \tau_i \omega) \nabla_j f_1(\omega, i)]$$

$$+ \left(\sum_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} \omega_{ij} \nabla_i \alpha(j, \omega) - \alpha(i, \omega) - \alpha(i, \tau_i \omega) \right) f_1(\omega, i).$$

- Le générateur couplé associé à L .

Soit $f_2 : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} L_2 f_2(\omega, \tau_A \omega) &= \sum_{j \in \Lambda \setminus A} (-\omega_j \nabla_A \alpha(j, \omega)) (\mathbb{1}_{\omega_j = +1} \nabla_j^1 + \mathbb{1}_{\omega_j = -1} \nabla_j^2) f_2(\omega, \tau_A \omega) \\ &+ \sum_{j \in \Lambda \setminus A} (\alpha(j, \tau_A \omega) \mathbb{1}_{\omega_j = +1} + \alpha(j, \omega) \mathbb{1}_{\omega_j = -1}) \nabla_j^1 f_2(\omega, \tau_A \omega) \\ &+ \sum_{j \in A} (\alpha(j, \omega) \nabla_j^1 + \alpha(j, \tau_A \omega) \nabla_j^2) f_2(\omega, \tau_A \omega). \end{aligned}$$

4.1. Construction du générateur FKG à partir du générateur couplé.

Nous avons défini le générateur du processus couplé sur Σ_2 . Nous allons établir une bijection φ entre Σ_2 et $\Sigma_1 = \{(\omega, A) \in \Omega \times P(\Lambda) ; \omega_i = -1 \forall i \in A\}$. Ceci va nous permettre de définir \tilde{L}_2 , le générateur de Markov sur Σ_1 image de L_2 par φ . Nous étendrons ensuite ce générateur à $\Omega \times P(\Lambda)$. Enfin nous restreindrons ce générateur à un domaine particulier et nous en donnerons une autre écriture. Sur ce domaine nous verrons alors que \tilde{L}_2 coïncide avec un générateur non Markovien \tilde{L}_1 dont la trace sur $\Omega \times \Lambda$ est le générateur FKG.

Le générateur couplé est défini sur Σ_2 où

$$\Sigma_2 = \{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega / \omega \leq \hat{\omega}\}$$

$$= \{(\omega, \hat{\omega}) \in \Omega \times \Omega / \exists A \in P(\Lambda) \text{ tel que } \omega_i = -1 \forall i \in A \text{ et } \hat{\omega} = \tau_A \omega\}$$

$P(\Lambda)$ est l'ensemble des parties de Λ .

Σ_2 est en bijection avec Σ_1 , où

$$\Sigma_1 = \{(\omega, A) \in \Omega \times P(\Lambda) : \omega_i = -1 \forall i \in A\}.$$

Nous notons φ cette bijection $\varphi : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1, (\omega, \tau_A \omega) \rightarrow (\omega, A)$.

Cette bijection joue ici un rôle fondamental. Elle intervient aussi dans la démonstration des inégalités GHS.

L_2 étant le générateur du processus couplé sur Σ_2 , nous considérons \tilde{L}_2 son image sur Σ_1 par φ .

Soit f_2 une fonction de Σ_2 dans \mathbb{R} . Notons f_1 la fonction de Σ_1 dans \mathbb{R} définie par : $f_1(\omega, A) = f_2(\omega, \tau_A \omega)$,

alors
$$L_2 f_2(\omega, \tau_A \omega) = \tilde{L}_2 f_1(\omega, A).$$

Nous étendons en conservant la même formule \tilde{L}_2 à $\Omega \times P(\Lambda)$ et nous continuons à noter \tilde{L}_2 ce générateur.

Nous allons maintenant restreindre les domaines des générateurs L_2 et \tilde{L}_2 . En effet les générateurs couplé et FKG ont été construits pour établir la croissance de $P_t f$ dès que f est une fonction croissante ; pour cela on applique le générateur couplé à des éléments de $\mathcal{F}_2 = \{f_2 : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R} / \exists f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ croissante telle que } f_2(\omega, \tau_A \omega) = f(\tau_A \omega) - f(\omega)\}$. Le générateur FKG est appliqué aux éléments de $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \{f_1 : \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R} / \exists f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ croissante telle que } f_1(\omega, i) = -\omega_i \nabla_i f(\omega)\}$.

Nous allons donc restreindre L_2 à \mathcal{F}_2 et \tilde{L}_2 au domaine $\mathcal{F}_1 = \{f_1 : \Omega \times P(\Lambda) \rightarrow \mathbb{R} / \exists f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ croissante telle que } f_1(\omega, A) = |f(\tau_A \omega) - f(\omega)|\}$.

En effet, le générateur \tilde{L}_2 étant défini sur $\Omega \times P(\Lambda)$ et pas seulement sur $\Omega \times \Lambda$, nous devons étendre le domaine de définition des éléments de $\tilde{\mathcal{F}}_1$.

Nous remarquons que les fonctions de $\tilde{\mathcal{F}}_1$ possèdent une propriété de symétrie : $f_1(\omega, i) = f_1(\tau_i \omega_i, i)$. Cette propriété s'étend aux éléments de \mathcal{F}_1 car $f_1(\omega, A) = f_1(\tau_A \omega, A) \forall f_1 \in \mathcal{F}_1$; de plus $f_1(\omega, i) = -\omega_i \nabla_i f(\omega)$.

Soient f_1 et f_2 deux fonctions appartenant respectivement à $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, associées à la même fonction f .

On a : $\forall (\omega, \tau_A \omega) \in \Sigma_2 ; L_2 f_2(\omega, \tau_A \omega) = \tilde{L}_2 f_1(\omega, A)$
car $f_2|_{\Sigma_2} = f_1|_{\Sigma_1} \circ \varphi$.

Nous allons montrer que \tilde{L}_2 coïncide sur \mathcal{F}_1 en les points de Σ_1 avec un générateur \tilde{L}_1 sur $\Omega \times P(\Lambda)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. \tilde{L}_1 est la somme d'un générateur de Markov et d'un opérateur de multiplication sur $\Omega \times P(\Lambda)$.

2. Soit X_t le processus de Markov associé à la partie

Markovienne de \tilde{L}_1 .

Si $X_0 \in \Sigma_0 = \{(\omega, A) \in \Omega \times P(\Lambda) ; |A| \leq 1\}$ alors $\forall t \geq 0 \quad X_t \in \Sigma_0$.

Pour cela dans l'expression de $L_2 f_2$ nous exprimons f_2 en fonction de f_1 et nous utilisons les propriétés des éléments de \mathcal{F}_1 :

- . Si $j \notin A$ et $\omega_j = 1$ alors $\nabla_j^1 f_2(\omega, \tau_A \omega) = f_1(\tau_j \omega, j) = f_1(\omega, j)$.
- . Si $j \notin A$ et $\omega_j = -1$ alors $\nabla_j^2 f_2(\omega, \tau_A \omega) = f_1(\omega, A \cup \{j\}) - f_1(\omega, A)$
 $= f_1(\tau_j \omega, A) + f_1(\omega, j) - f_1(\omega, A)$.
- . Si $j \notin A$ et ω_j quelconque
 alors $\nabla_j^1 f_2(\omega, \tau_A \omega) = f_1(\tau_j \omega, A) - f_1(\omega, A)$.
- . Si $j \in A$ alors $\omega_j = -1$ et $\begin{cases} \nabla_j^1 f_2(\omega, \tau_A \omega) = f_1(\tau_j \omega, A \setminus \{j\}) - f_1(\omega, A) \\ \nabla_j^2 f_2(\omega, \tau_A \omega) = f_1(\omega, A \setminus \{j\}) - f_1(\omega, A) \end{cases}$

En portant cela dans l'expression de $L_2 f_2(\omega, \tau_A \omega)$ nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} L_2 f_2(\omega, \tau_A \omega) &= \sum_{j \in \Lambda \setminus A} [(-\omega_j \nabla_A \alpha(j, \omega)) (f_1(\omega, j) - f_1(\omega, A)) + \alpha(j, \tau_A \omega) \nabla_j f_1(\omega, A)] \\ &+ \sum_{j \in A} [\alpha(j, \omega) (f_1(\tau_j \omega, A \setminus \{j\}) - f_1(\omega, A)) + \alpha(j, \tau_A \omega) (f_1(\omega, A \setminus \{j\}) - f_1(\omega, A))] \\ &+ \sum_{j \in \Lambda \setminus A} (-\omega_j \nabla_A \alpha(j, \omega)) f_1(\omega, A). \end{aligned}$$

Notons $\tilde{L}_1 f_1(\omega, A)$ le membre de droite de cette égalité.

Grâce à l'hypothèse d'attractivité de L tous les coefficients $-\omega_j \nabla_A \alpha(j, \omega)$, $\alpha(j, \omega)$, $\alpha(j, \tau_A \omega)$ sont positifs.

Ainsi \tilde{L}_1 est la somme d'un générateur de Markov sur $\Omega \times P(\Lambda)$ et d'un opérateur de multiplication.

Il est clair que \tilde{L}_1 laisse stable Σ_0 , ce qui nous permet d'établir la propriété suivante :

Pour toute fonction f_1 de \mathcal{F}_1 , nous définissons \bar{f}_1 sa restriction à $\Omega \times \Lambda$. $\bar{f}_1 = f_1|_{\Omega \times \Lambda}$.

Alors il existe un générateur \bar{L}_1 sur $\Omega \times \Lambda$ tel que :

$$(\tilde{L}_1 f_1) |_{\Omega \times \Lambda} = \bar{L}_1 \bar{f}_1 \quad \text{sur } (\Omega \times \Lambda) \cap \Sigma_1$$

et si $(\omega, \{i\}) \in \Sigma_1$

$$\begin{aligned} \bar{L}_1 \bar{f}_1(\omega, i) &= \sum_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} [(-\omega_j \nabla_i \alpha(j, \omega)) (\bar{f}_1(\omega, j) - \bar{f}_1(\omega, i)) + \alpha(j, \tau_i \omega) \nabla_j \bar{f}_1(\omega, i)] \\ &\quad + \alpha(i, \omega) (\bar{f}_1(\tau_i \omega, \emptyset) - \bar{f}_1(\omega, i)) + \alpha(i, \tau_i \omega) (\bar{f}_1(\omega, \emptyset) - \bar{f}_1(\omega, i)) \\ &\quad + \sum_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} (-\omega_j \nabla_i \alpha(j, \omega)) f_1(\omega, i). \end{aligned}$$

Remarquons enfin que pour toute fonction \bar{f}_1 ainsi définie, $\bar{f}_1(\omega, \emptyset) = 0$. Ceci fait apparaître un terme diagonal supplémentaire : $[-\alpha(i, \omega) - \alpha(i, \tau_i \omega)] f_1(\omega, i)$ et

$$\begin{aligned} \bar{L}_1 \bar{f}_1(\omega, i) &= \sum_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} [(-\omega_j \nabla_i \alpha(j, \omega)) (\bar{f}_1(\omega, j) - \bar{f}_1(\omega, i)) + \alpha(j, \tau_i \omega) \nabla_j \bar{f}_1(\omega, i)] \\ &\quad + \left(\sum_{j \in \Lambda \setminus \{i\}} (-\omega_j \nabla_i \alpha(j, \omega)) - \alpha(i, \omega) - \alpha(i, \tau_i \omega) \right) \bar{f}_1(\omega, i) \\ &= (L_1 + V) \bar{f}_1(\omega, i) \end{aligned}$$

où $L_1 + V$ est le générateur du processus FKG.

Ainsi : $\forall f_2 \in \mathcal{F}_2$; $\forall f_1 \in \mathcal{F}_1$; f_1 et f_2 étant associées à la fonction croissante f ; $\forall (\omega, \tau_i \omega) \in \Sigma_2$:

$$L_2 f_2(\omega, \tau_i \omega) = (L_1 + V) f_1 |_{\Omega \times \Lambda}(\omega, i).$$

4.2. Construction du générateur du processus couplé issu de $(\omega, \tau_i \omega)$ à partir de générateurs FKG.

Cette construction provient de l'écriture des accroissements de $P_t f$ à l'aide du semi groupe FKG appliqué à des éléments de \mathcal{F}_1 d'une part et du semi-groupe du processus couplé appliqué à des éléments de \mathcal{F}_2 d'autre part.

. Accroissements de $P_t f$ et semi-groupe FKG.

* Soit $F : \Omega \times \Lambda \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$; $(\omega, i, t) \rightarrow -\omega_i \nabla_i P_t f(\omega)$.

elle est solution du système :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} F(\omega, i, t) = (L_1 + V) F(\omega, i, t). \\ F(\omega, i, 0) = -\omega_i \nabla_i f(\omega) \end{cases}$$

On en déduit que :

$$F(\omega, i, t) = e^{t(L_1 + V)} F(\omega, i, 0).$$

En notant Q_t^1 le semi-groupe associé à $L_1 + V$, et en utilisant le fait que $F(\omega, i, 0) = f_1(\omega, i)$ si f_1 est la fonction de \mathcal{F}_1 associée à f , et \bar{f}_1 sa restriction à $\Omega \times \Lambda$, nous obtenons :

$$P_t f(\tau_i \omega) - P_t f(\omega) = Q_t^1 \bar{f}_1(\omega, i) \quad \text{si } \omega_i = -1.$$

* Pour exprimer $P_t f(\tau_A \omega) - P_t f(\omega)$ à l'aide du semi-groupe FKG, nous allons définir un chemin reliant ω à $\tau_A \omega$, c'est-à-dire une suite de configurations $\omega^0, \dots, \omega^n$ telles que :

- 1) $\omega^0 = \omega$; $\omega^n = \tau_A \omega$
- 2) $\omega^0 \leq \omega^1 \leq \dots \leq \omega^n$
- 3) deux configurations successives ω^k et ω^{k+1} ne diffèrent qu'en un site, ce site étant un élément quelconque de Λ . Notons i_k ce site.

Un tel chemin n'est pas unique, mais pour tout chemin ainsi défini, nous avons :

$$P_t f(\tau_A \omega) - P_t f(\omega) = \sum_{k=1}^n (P_t f(\omega^k) - P_t f(\omega^{k-1}))$$

et d'après le calcul précédent

$$P_t f(\tau_A \omega) - P_t f(\omega) = \sum_{k=1}^n Q_t^1 \bar{f}_1(\omega^{k-1}, i_k).$$

. Accroissements de $P_t f$ et semi-groupe couplé.

Soit $(\omega, \tau_A \omega) \in \Sigma_2$; alors

$$P_t f(\tau_A \omega) - P_t f(\omega) = E_{\omega, \tau_A \omega}(f(\hat{\omega}_t) - f(\omega_t))$$

Notons Q_t^2 le semi-groupe associé à L_2 et soit f_2 l'élément de \mathcal{F}_2

associé à la fonction f , alors :

$$P_t f(\tau_A \omega) - P_t f(\omega) = Q_t^2 f_2(\omega, \tau_A \omega).$$

Nous avons ainsi montré que :

$\forall f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ croissante ; f_1 et f_2 étant les fonctions de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 associées à f ; $\bar{f}_1 = f_1|_{\Omega \times \Lambda}$; $\forall (\omega, \tau_A \omega) \in \Sigma_2$:

$$Q_t^2 f_2(\omega, \tau_A \omega) = \sum_{k=1}^n Q_t^1 \bar{f}_1(\omega^{k-1}, i_k).$$

En remarquant enfin que $f_2(\omega, \tau_A \omega) = \sum_{k=1}^n \bar{f}_1(\omega^{k-1}, i_k)$, nous obtenons

$$(Q_t^2 - \text{Id}) f_2(\omega, \tau_A \omega) = \sum_{k=1}^n (Q_t^1 - \text{Id}) \bar{f}_1(\omega^{k-1}, i_k).$$

En divisant cette expression par t et en faisant tendre t vers 0, nous obtenons finalement :

$$L_2 f_2(\omega, \tau_A \omega) = \sum_{k=1}^n (L_1 + V) \bar{f}_1(\omega^{k-1}, i_k).$$

Nous avons donc obtenu le générateur du processus couplé restreint à \mathcal{F}_2 à partir de générateurs FKG.

Je remercie tout particulièrement L. MICLO pour sa lecture attentive de ce texte et ses remarques qui m'ont permis d'améliorer la rédaction de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAKRY, D. et MICHEL, D. (1992), "Sur les inégalités FKG", Séminaire de probabilités XXVI, Lect. Notes Math. 1526, 170-188.
- [2] DURRETT, R. (1981), "An introduction to infinite particle systems", Stoch. Proc. and Their appl., 11, 103-150.
- [3] DURRETT, R. (1993), "Ten Lectures on Particle Systems", Ecole d'Eté de Probabilité de SAINT-FLOUR.
- [4] EATON, M.L. (1986), "Lectures on topics in probability inequalities", CWI Tract.
- [5] ELLIS, R. (1985), "Entropy, large deviations and Statistical Mechanics", Springer-Verlag.
- [6] HOLLEY, R. (1974), "Remarks on the FKG inequalities", CMP, 36, 227-231.
- [7] GEORGII, H.O. (1988), "Gibbs measures and phase transitions", Berlin ; New York : de Gruyter (De Gruyter studies in Mathematics, 9).
- [8] KARLIN, S. et RINOTT, Y. (1980), "Classes of ordering of measures and related correlation inequalities", Journal of Multivariate Analysis, 10, 467-498.
- [9] KEMPERMAN (1977), "On the FKG inequalities for measures on partially ordered spaces", Indagationes Mathematicae, Vol. 39, 4, 313-331.
- [10] LIGGETT, T. (1985), "Interacting particle systems", Springer-Verlag.
- [11] YCART, B. (1986), "Gibbs states and the Stochastic Ising Model. An exposition", manuscrit.
- [12] YCART, B. (

UNIVERSITE PAUL SABATIER

Laboratoire de Statistique et Probabilités

U.R.A. C.N.R.S. D0745

118, route de Narbonne

31062 TOULOUSE CEDEX