GLADYS BOBADILLA
ROLANDO REBOLLEDO
EUGENIO SAAVEDRA

Corrections : « Sur la convergence d'intégrales anticipatives »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 28 (1994), p. 113-115
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__113_0>

CORRECTIONS À: "SUR LA CONVERGENCE D'INTÉGRALES ANTICIPATIVES"

GLADYS BOBADILLA, ROLANDO REBOLLEDO ET EUGENIO SAAVEDRA

M. Luca Pratelli a découvert une erreur très sérieuse dans notre note publiée dans le volume XXVI du Séminaire (voir [1] et la note de Pratelli dans ce volume). En effet, si l'on reprend les notations de [1], les conclusions du Théorème 1.1 et des Corollaires 2.1 et 2.2 concernant la convergence *en probabilité* d'une suite d'intégrales stochastiques, sont fausses.

La convergence en probabilité des intégrales de Skorokhod reste un problème ouvert. Ce mode de convergence semble ne pas être adapté à la nature même d'une intégrale anticipative. Cependant il est possible d'étudier ces intégrales avec une topologie différente, la topologie *faible régulière* sur $L^2(\Omega)$ que nous empruntons à Nualart et Rebolledo:

Définition 1. *Une suite de variables aléatoires $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de carré intégrable converge vers $Z \in L^2(\Omega)$ au sens de la topologie faible régulière $w^{1,2}$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z^n F) = \mathbb{E}(ZF),$$

pour toute variable $F \in \mathbb{D}^{1,2}$.

D'après la définition même de l'opérateur intégrale de Skorokhod δ donnée dans [3] il en résulte sa continuité comme une application de *Dom* δ, muni de la toplogie faible $\sigma(L^2(\Omega\times[0,1]), L^2(\Omega\times[0,1]))$ dans $L^2(\Omega)$, muni de la topologie faible regulière. De sorte que le théorème de convergence "à la Lebesgue" concernant l'intégrale de Skorokhod peut être enoncé comme suit:

Théorème 1. *Soit $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Dom δ telle que*

(a) *elle soit uniformément intégrable par rapport à la mesure produit $d\mathbb{P}dt$ sur $\Omega\times[0,1]$;*
(b) *u^n converge vers $u \in$ Dom δ en mesure $d\mathbb{P}dt$ sur $\Omega\times[0,1]$,*

alors $\delta(u^n)$ converge vers $\delta(u)$ au sens de la topologie $w^{1,2}$. En outre, la convergence a lieu au sens de la topologie faible $\sigma(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$, dès que les intégrales $\delta(u^n)$ sont uniformément bornées dans $L^2(\Omega)$.

Preuve. En effet, il suffit de remarquer que les hypothèses entraînent la convergence faible $\sigma(L^2(\Omega\times[0,1]), L^2(\Omega\times[0,1]))$ de u^n vers u, d'où il en résulte la $w^{1,2}$–convergence des intégrales.

Par ailleurs, si $\sup_n \|\delta(u^n)\|_2 < \infty$, étant donné que l'ensemble des variables aléatoires régulières est dense dans $L^2(\Omega)$, la convergence faible $w^{1,2}$ de la suite $\delta(u^n)$ équivaut à la convergence au sens $\sigma(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$. □

Si l'on considère maintenant une suite $u^n(t) = F^n = n^{-1}\sin(nW_1)$ comme fait Pratelli, on pourra remarquer que les intégrales $\delta(u^n)$ vérifient

$$\delta(u^n) = n^{-1}W_1\sin(nW_1) - \cos(nW_1), \tag{1}$$

mais $$\mathbb{E}(\delta(u^n)G) = \mathbb{E}(\int_0^1 D_s G\, n^{-1} \sin(nW_1)ds) \leq n^{-1}\|G\|_{1,2}, \tag{2}$$
pour toute variable $G \in \mathbb{D}^{1,2}$.

Par conséquent, de (1) on déduit que la suite d'intégrales ne converge pas vers 0 en probabilité, tandis que (2) montre sa convergence vers 0 au sens de $w^{1,2}$, et même au sens $\sigma(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ puisque $\|\delta(u^n)\|_2$ est uniformément bornée. Il s'agit donc d'un exemple élémentaire qui prouve que la convergence en probabilité est strictement plus forte que la convergence faible dans $L^2(\Omega)$.

Malheureusement, il semble que l'on ne puisse espérer mieux de l'intégrale de Skorokhod: la convergence en probabilité est attachée aux semimartingales. A ce sujet, considérons un cas très particulier: celui des processus u, qui sont prévisibles par rapport à une même filtration plus grosse $\mathbb{G}$ satisfaisant en outre:

(a) W est une semimartingale par rapport à $\mathbb{G}$;

(b) l'intégrale de Skorokhod de $u1_{[0,t]}$ existe pour tout $t \in [0,1]$ et admet une décomposition
$$\delta(u1_{[0,t]}) = (u \cdot W)_t - \int_0^t D_s^- u(s)ds, \tag{3}$$
où $u \cdot W$ est l'intégrale stochastique habituelle.

Appellons $\mathcal{U}(\mathbb{G})$ cette classe des processus qui n'est pas vide: elle contient au moins les processus simples de la forme
$$u = F_0 1_0 + \sum_{i=1}^{n} F_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}, \tag{4}$$
où chaque $F_i = f_i(W_{\alpha_1^i}, \dots, W_{\alpha_k^i}) \in \mathbb{D}^{1,2}$, les fonctions f_i étant de classe C_p^∞. La construction de la filtration $\mathbb{G}$ pour ce type de processus est faite dans [2].

Si l'on applique alors le théorème de convergence dominée de l'intégrale stochastique habituelle (voir par exemple [4], p.145) on obtient immédiatement le résultat suivant, dont nous omettons la preuve.

Théorème 2.

Soit $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $\mathcal{U}(\mathbb{G})$ telle que les couples $(u^n(s), D_s^- u^n(s))$ soient uniformément bornés et convergent presque sûrement vers $(u(s), D_s^- u(s))$, où $u \in \mathcal{U}(\mathbb{G})$, alors $\delta(u^n 1_{[0,t]})$ converge uniformément en probabilité vers $\delta(u 1_{[0,t]})$.

Un cas particulier important du théorème précédent est obtenu lorsque la suite $(u^n(s), D_s^- u^n(s))$ converge presque sûrement vers $(1,0)$: cela donne la convergence en probabilité de la suite d'intégrales vers le processus de Wiener.

De manière analogue, on pourrait traiter l'intégrale de Stratanovich à partir de l'intégrale de Skorokhod. Cependant, les conditions sous lesquelles on peut relier les deux intégrales sont si fortes qu'elles enlèvent tout intérêt à l'étude de la convergence en probabilité. Dans ce cas il est encore plus évident qu'une telle topologie n'est pas adaptée à la nature de l'intégrale.

References

1. G. Bobadilla, R. Rebolledo et E. Saavedra, *Sur la convergence d'intégrales anticipatives*, Sém Prob. XXVI, LN 1526, 1992, 505–513.
2. K.Itô, *Extension of stochastic integral*, Proc. Intern. Symp. SDE, Kyoto, 1976, 95–105.
3. D. Nualart et E. Pardoux, *Stochastic calculus with anticipating integrands*. Prob. Theory and Rel. Fields 78, 1988, 80–129.
4. P. Protter, "Stochastic integration and differential equations:a new approach", Springer, 1990.

FACULTAD DE MATEMÁTICAS, PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE, CASILLA 306,CORREO 22,SANTIAGO