

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

LUCA PRATELLI

Deux contre-exemples sur la convergence d'intégrales anticipatives

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 28 (1994), p. 110-112

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__110_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Deux contre-exemples sur la convergence d'intégrales anticipatives

LUCA PRATELLI

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
Via Buonarroti 2, I-56127 Pisa

On se place dans les hypothèses de [1]. On considère donc l'espace Ω des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} , le processus canonique

$$W = (W_t)_{0 \leq t \leq 1}$$

(défini par $W_t(\omega) = \omega(t)$), la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}$ associée à ce processus, et l'unique loi P sur \mathcal{F}_1 qui rend W un mouvement brownien issu de l'origine. Une variable aléatoire réelle F sur (Ω, \mathcal{F}_1) est dite *régulière* si on peut trouver une famille finie t_1, \dots, t_m de points de $[0, 1]$ et un élément f de $C_p^\infty(\mathbf{R}^m, \mathbf{R})$, tels que l'on ait

$$F = f(W_{t_1}, \dots, W_{t_m}).$$

On désigne par \mathcal{S} la classe des variables aléatoires régulières.

Premier contre-exemple. On se propose de construire une suite (F^n) d'éléments bornés de \mathcal{S} qui possède les propriétés suivantes:

- (a) La suite (F^n) converge uniformément vers 0.
- (b) Les processus DF^n sont constants par rapport au temps et uniformément bornés.
- (c) La suite des intégrales de Skorokhod $\int_0^1 F^n \bullet dW$ ne converge pas en loi vers la constante 0.

Il en résultera que les Corollaires 2.1 et 2.2 du Théorème 1.1 de [1] (donc *a fortiori* le Théorème 1.1 lui même) sont faux.

Pour construire une suite $(F^n)_{n \geq 1}$ avec les propriétés désirées, posons, pour tout entier n strictement positif,

$$(1) \quad F^n = n^{-1} \sin(nW_1).$$

On a alors, pour tout élément s de $[0, 1]$,

$$(2) \quad D_s F^n = \cos(nW_1).$$

Les propriétés (a), (b) découlent immédiatement des relations (1), (2). On a en outre (voir [2], Th. 3.2)

$$\int_0^1 F^n \bullet dW = n^{-1} W_1 \sin(nW_1) - \cos(nW_1),$$

de sorte que la propriété (c) résulte de la relation suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [\cos^2 (nW_1)] &= \frac{1}{2} (1 + \mathbf{E} [\cos (2nW_1)]) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \exp (-2n^2)). \end{aligned}$$

Deuxième contre-exemple. On se propose maintenant de construire une suite (u^n) de processus possédant les propriétés suivantes:

(α) La suite (u^n) converge, presque sûrement et dans $L^2([0, 1] \times \Omega)$, vers W .

(β) Pour tout n , l'intégrale d'Itô de u^n coïncide avec celle de Stratonovich:

$$(3) \quad \int_0^t u^n dW = \int_0^t u^n \circ dW.$$

(γ) Les sommes de Riemann "à la Stratonovich", relatives aux processus u^n et aux différentes subdivisions de $[0, 1]$, forment un ensemble borné dans $L^2(P)$.

Pour une telle suite (u^n) , le premier membre de (3) convergera en probabilité, lorsque n tend vers l'infini, vers

$$\int_0^t W dW = \int_0^t W \circ dW - \frac{1}{2} t.$$

La suite (u^n) montrera donc que la version "à la Stratonovich" du Théorème 1.1 de [1] est, elle aussi, fautive.

Pour construire une suite (u^n) avec les propriétés désirées, posons, pour tout entier n strictement positif,

$$u_i^n = W_{\tau_n(t)}, \quad \text{avec} \quad \tau_n(t) = [t - (1/n)]^+.$$

On vérifie immédiatement qu'avec cette définition les conditions (α), (β) ci-dessus sont remplies. Occupons nous de la condition (γ).

Etant donné une suite finie t_0, \dots, t_m de points de $[0, 1]$, avec

$$0 = t_0 < \dots < t_m = 1,$$

un entier n strictement positif et un élément t de $[0, 1]$, considérons la "somme de Riemann" $S = \sum_{i=1}^m X_i$, où

$$X_i = (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) (t_i - t_{i-1})^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u_s^n I_{[0,t]}(s) ds.$$

Il suffira de montrer que la norme de S dans $L^2(P)$ est majorée par une constante universelle. A cet effet, commençons par remarquer que l'on a, pour tout i ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [X_i | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] &= (t_i - t_{i-1})^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{E} [(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) u_s^n | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] I_{[0,t]}(s) ds \\ &\leq (t_i - t_{i-1})^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [s - t_{i-1}]^+ ds = \frac{1}{2} (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

En appliquant deux fois cette remarque, on trouve, pour tout couple i, j d'entiers distincts (compris entre 1 et m)

$$\mathbf{E}[X_i X_j] \leq \frac{1}{4} (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}).$$

En outre, pour tout indice i , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_i^2] &\leq \mathbf{E} \left[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 (t_i - t_{i-1})^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} W_{\tau_n(s)}^2 ds \right] \\ &= (t_i - t_{i-1})^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{E} \left[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 W_{\tau_n(s)}^2 \right] ds \\ &\leq \left(\mathbf{E} \left[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^4 \right] \right)^{\frac{1}{2}} (t_i - t_{i-1})^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\mathbf{E} \left[W_{\tau_n(s)}^4 \right] \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &= 3 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \tau_n(s) ds. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S^2] &= \sum_{i \neq j} \mathbf{E}[X_i X_j] + \sum_i \mathbf{E}[X_i^2] \\ &\leq \frac{1}{4} + 3 \int_0^1 \tau_n(s) ds \leq \frac{1}{4} + \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. BOBADILLA, R. REBOLLEDO, E. SAAVEDRA, *Sur la convergence d'intégrales anticipatives*, Sémin. Prob. XXVI, LN 1526, 1992, p. 505-513.
- [2] D. NUALART, E. PARDOUX, *Stochastic Calculus with Anticipating Integrands*, Probability Theory and Related Fields 78 (1988), 80-129.