FRANCIS HIRSCH

Représentation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n paramètres

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 302-303
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__302_0>

Représentation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n paramètres

Francis HIRSCH
Equipe d'Analyse et Probabilités
Université d'Evry Val d'Essonne
Boulevard des Coquibus
F-91025 EVRY CEDEX

Dans [2], S. Song introduit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n paramètres. Nous en donnons ici une description en termes du drap brownien.
Rappelons d'abord la construction de [2].
Soit E un espace de Fréchet séparable muni d'une mesure gaussienne centrée μ. Soit $E^{(n)}$ l'espace $C(\mathbb{R}_+^n; E)$ identifié à $C(\mathbb{R}_+; E^{(n-1)})$ en identifiant φ et $t_1 \to ((t_2, \cdots, t_n) \to \varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n))$. On pose $m^{(0)} = \mu$, $E^{(0)} = E$, et on définit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck $Z^{(n)}$ à valeurs dans $E^{(n-1)}$ de proche en proche pour $n \geq 1$ par:

$Z^{(1)}$ est le processus à valeurs dans $E^{(0)}$, admettant pour semi-groupe de transition $(T_t^{(0)})_{t\geq 0}$ défini par $T_t^{(0)} f(x) = \int f(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y)\, dm^{(0)}(y)$, et de loi initiale $m^{(0)}$.

Pour $n \geq 2$, on définit $m^{(n-1)}$ comme la loi de $Z^{(n-1)}$, et $Z^{(n)}$ est le processus à valeurs dans $E^{(n-1)}$ admettant pour semi-groupe de transition $(T_t^{(n-1)})_{t\geq 0}$ défini par $T_t^{(n-1)} f(x) = \int f(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y)\, dm^{(n-1)}(y)$, et de loi initiale $m^{(n-1)}$.

On suppose, pour fixer les idées, que E est l'espace de Wiener $C_0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^d$ nulles en 0, μ est la mesure de Wiener, et on désigne par $W^{(n+1)}_{t_1,\cdots,t_n,\tau}$ un drap brownien à $(n+1)$ indices à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Proposition 1

$$Z^{(n)}_{t_1,\cdots,t_n} = \mathrm{e}^{-(t_1+\cdots+t_n)} W^{(n+1)}_{\mathrm{e}^{2t_1},\cdots,\mathrm{e}^{2t_n},\tau}$$

(où τ désigne le paramètre de parcours des trajectoires dans l'espace de Wiener $C_0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$).

On fait la démonstration par recurrence.
On étudie d'abord le cas $n = 1$. Soit $\varphi \in E$,

$$Z_t^{(1),\varphi} = \mathrm{e}^{-t}(\varphi(\tau) + W^{(2)}_{\mathrm{e}^{2t}-1,\tau}),$$

$\mathcal{F}_s^{(1)}$ la tribu sur E engendrée par $\{W^{(2)}_{e^{2t}-1,\tau};\ \ t \leq s\}$.
Alors, si $t \geq s$ et f est borélienne bornée sur E,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(f(Z_t^{(1),\varphi}) \mid \mathcal{F}_s^{(1)}) &= \int f(e^{-t}(\varphi + W^{(2)}_{e^{2s}-1,\cdot} + \sqrt{e^{2t}-e^{2s}}y))d\mu(y) \\ &= T^{(0)}_{t-s} f(Z_s^{(1),\varphi}).\end{aligned}$$

Donc $Z^{(1),\varphi}$ est le processus associé à $(T_t^{(0)})_{t\geq 0}$ et partant de φ. Par conséquent

$$Z_t^{(1)} = e^{-t}(W_\tau^{(1)} + W^{(2)}_{e^{2t}-1,\tau})$$

avec $W^{(1)}$ et $W^{(2)}$ indépendants, c'est à dire, $Z_t^{(1)} = e^{-t}W^{(2)}_{e^{2t},\tau}$.
(Cette représentation de $Z^{(1)}$ est tout à fait classique (cf., par exemple, [1]).)

Supposons la propriété valable jusqu'à l'ordre $n-1$, $n \geq 2$. Si $\varphi \in E^{(n-1)}$, on pose

$$Z_t^{(n),\varphi} = e^{-t}(\varphi(t_2,\cdots,t_n,\tau) + e^{-(t_2+\cdots+t_n)}W^{(n+1)}_{e^{2t}-1,e^{2t_2},\ldots,e^{2t_n},\tau})$$

et $\mathcal{F}_s^{(n)}$ la tribu sur $E^{(n-1)}$ engendrée par $\{W^{(n+1)}_{e^{2t}-1,e^{2t_2},\ldots,e^{2t_n},\tau};\ \ t \leq s\}$.
Si $t \geq s$ et f borélienne bornée sur $E^{(n-1)}$,

$$\mathbf{E}(f(Z_t^{(n),\varphi}) \mid \mathcal{F}_s^{(n)}) = T^{(n-1)}_{t-s} f(Z_s^{(n),\varphi}).$$

Alors

$$Z^{(n)}_{t_1,\ldots,t_n} = e^{-(t_1+\cdots+t_n)}(W^{(n)}_{e^{2t_2},\ldots,e^{2t_n},\tau} + W^{(n+1)}_{e^{2t_1}-1,e^{2t_2},\ldots,e^{2t_n},\tau})$$

avec $W^{(n)}$ et $W^{(n+1)}$ indépendants, d'où le résultat.

References

[1] M. FUKUSHIMA Basic properties of Brownian motion and a capacity on the Wiener space, J. Math. Soc. Japan, 36-1 (1984), 161-175.

[2] S. SONG Inégalités relatives aux processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n paramètres et capacité gaussienne $c_{n,2}$, dans ce volume.