Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Jean-Pascal Ansel
Christophe Stricker

Unicité et existence de la loi minimale

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 22-29
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__22_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UNICITÉ ET EXISTENCE DE LA LOI MINIMALE

par J.P. Ansel et C. Stricker

La transformation d'un processus donné en une martingale grâce à un changement de loi adéquat est devenue un outil très puissant pour l'évaluation des actifs conditionnels dans le domaine des mathématiques financières. Lorsque le marché est complet, c'est-à-dire lorsque le processus des prix actualisés possède la propriété de représentation prévisible, il existe une seule loi de martingale. Une telle situation se rencontre rarement en pratique car même si le marché traite un grand nombre d'actifs, les moyens limités dont dispose l'investisseur ne lui permettent pas d'utiliser tous ces actifs pour se couvrir. Ainsi il est confronté au problème d'un marché incomplet, c'est-à-dire que le nombre de sources d'incertitude est supérieur à celui des actifs pouvant être détenus par notre investisseur. Comme il existe alors plusieurs lois de martingale, il s'agit de trouver celle qui est minimale en un certain sens. L'objet de cet article est d'établir l'unicité et d'étudier l'existence d'une telle loi. Lorsque le processus des prix actualisés est continu, nous montrerons que la loi minimale existe au moins localement. Par contre, dans le cas discontinu, une telle loi n'existe pas nécessairement. Deux exemples tirés de [1] illustreront ce fait.

1) Quelques notations et définitions :

Les vecteurs de $\mathbf{R}^d$ seront assimilés à des matrices $d \times 1$ et x^* désignera le vecteur transposé de x.

Tous les processus sont définis sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ indexé par $[0, 1]$ et vérifiant les conditions habituelles. Lorsque Y est une semimartingale à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ et H un processus prévisible à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ intégrable par rapport à Y, on notera $H^*.Y$ l'intégrale stochastique de H par rapport à Y. Le lecteur intéressé par cette notion pourra consulter le livre de Jacod [8]. Bien entendu nous omettrons le signe $*$ dans le cas $d = 1$. Soit X un processus càdlàg adapté à valeurs dans $\mathbf{R}^d$. Nous dirons qu'une loi Q équivalente à P est une **loi de martingale** pour X si X est une martingale sous Q. La v.a. $Z_1 := \frac{dQ}{dP}$ est appelée **densité de loi de martingale** tandis que Z désigne la P martingale définie par $Z_t := E[Z_1 \mid \mathcal{F}_t]$ qui est aussi la densité de Q^t par rapport à P^t, Q^t et P^t étant les restrictions de Q et P à $\mathcal{F}_t$. Nous supposerons dorénavant que le processus des prix actualisés noté X est une P **semimartingale spéciale** de décomposition canonique $X = M + A$ où M est une martingale locale et A un processus à variation finie prévisible. Une martingale locale réelle L est **orthogonale** à M si elle est orthogonale à chaque composante M^i de M, c'est-à-dire $[M^i, L]$ est une martingale locale pour tout $i = 1, \dots, d$.

Définition 1.1. Soit Q une loi de martingale. Elle est **minimale** si toute martingale locale réelle orthogonale à M sous P est aussi une martingale locale sous Q.

Cette notion qui fut introduite par Föllmer et Schweizer [6], a été utilisée implicitement par Karatzas, Lehoczky, Shreve et Xu dans [9]. D'autres auteurs (voir par exemple [3], [7], [11], [13]) se sont servis récemment de cette loi. En effet lorsque le marché est incomplet, elle permet de construire des stratégies de couverture qui minimisent le risque quadratique en utilisant la décomposition de Kunita-Watanabe d'une martingale locale (voir [2] pour une étude détaillée de cette décomposition). Avant de démontrer l'unicité de la loi minimale nous allons rappeler un lemme concernant les densités des lois de martingale. Si U est une semimartingale, $\mathcal{E}(U)$ désigne la solution de l'équation différentielle $dY = Y_- dU$ vérifiant la condition initiale $Y_0 = 1$.

Lemme 1.2. Soit Z le processus densité défini ci-dessus. Il existe une martingale locale K telle que $Z = Z_0 \mathcal{E}(K)$.

Démonstration : D'après le théorème 17 page 85 de [5] nous savons que $Z_- > 0$. La martingale locale $K = \frac{1}{Z_-}.Z$ qui est le logarithme stochastique de Z vérifie trivialement l'égalité $Z = Z_0 \mathcal{E}(K)$ et le lemme 1 est démontré.

2) Unicité :

Nous supposerons dorénavant que **la tribu $\mathcal{F}_0$ est dégénérée.** Il faut d'abord préciser la notion d'unicité. Comme la notion de martingale locale dépend de la loi considérée, il est clair que la loi minimale est étroitement liée à la loi initiale P si bien que le remplacement de P par une loi équivalente modifiera aussi la loi minimale.

Théorème 2.1. Pour toute loi initiale P fixée il existe au plus une loi minimale.

Démonstration : L'espace vectoriel des P martingales locales sera noté $\mathcal{L}(P)$. Soient Q^1 et Q^2 deux lois minimales de densités respectives Z_1^1 et Z_1^2. Au moyen du lemme 1.2. on leur associe les martingales locales $L^i = \frac{1}{Z^i_-}.Z^i$ pour $i = 1, 2$. Rappelons que X est une semimartingale spéciale sous P de décomposition canonique $X = M + A$. Pour $j = 1, \ldots, d$ et $i = 1, 2$ la formule d'intégration par parties et l'égalité $dZ^i = Z^i_- dL^i$ entraînent que :

$$d(Z^i X^j) = Z^i_- dM^j + X^j_- dZ^i + d[Z^i, A^j] + Z^i_-(dA^j + d[L^i, M^j]).$$

D'autre part les processus $[Z^i, A^j]$ et $Z^i X^j$ sont des martingales locales en vertu du lemme de Yoeurp ([14]) et de la définition de Q^i. Il en résulte que $A^j + [L^i, M^j]$ est dans $\mathcal{L}(P)$ et par différence il en sera de même pour $[L^1 - L^2, M^j]$, c'est-à-dire la martingale locale $L^1 - L^2$ est orthogonale à M. Compte tenu du caractère minimal de $Q^i, [L^1 - L^2, Z^i] = Z^i_-.[L^1 - L^2, L^i]$ appartient à $\mathcal{L}(P)$. On en conclut que $[L^1 - L^2, L^i] \in \mathcal{L}(P)$ puis que $(L^1 - L^2)^2 = (L^1 - L^2)L^1 - (L^1 - L^2)L^2 \in \mathcal{L}(P)$. Donc la martingale locale $L^1 - L^2$ est constante et $L^1 = L^2$, $Q^1 = Q^2$.

3) Existence de la loi minimale :

Par souci de complétude nous allons reprendre l'étude entreprise dans [1] dans le cas $d = 1$. S'il existe une loi de martingale pour X et si de plus $E[\sup_{0\le s\le 1} X_s^2] < +\infty$, alors $X = M + \alpha.\langle M, M\rangle$ où M est une martingale locale localement de carré intégrable et α un processus prévisible vérifiant $(\alpha^2.\langle M, M\rangle)_1 < +\infty$. On peut alors définir le processus $\mathcal{E}(-\alpha.M)$ et on obtient la

Proposition 3.1. Si $1 - \alpha\Delta M > 0$ p.s., alors $\mathcal{E}(-\alpha.M)$ est une martingale locale strictement positive, la loi minimale existe au moins localement et le processus densité est $\mathcal{E}(-\alpha.M)$. En revanche si $P[1 - \alpha\Delta M \le 0] > 0$, il n'existe pas de loi minimale.

Démonstration : Soit Z le processus densité associé à une loi de martingale pour X. D'après le lemme 1.1. $Z = \mathcal{E}(K)$ avec $K = \frac{1}{Z_-}.Z$ si bien que

$$\begin{aligned} ZX &= Z_-.M + X_-.Z + (Z_-\alpha).\langle M, M\rangle + \alpha.[Z, \langle M, M\rangle] + Z_-.[K, M] \\ &= Z_-.M + X_-.Z + \alpha.[Z, \langle M, M\rangle] + (Z_-\alpha).(\langle M, M\rangle - [M, M]) \\ &+ Z_-.[\alpha.M + K, M] \end{aligned}$$

Comme ZX est une martingale locale par définition de Z, le processus $Z_-.[\alpha.M + K, M]$ est dans $\mathcal{L}(P)$. Ainsi $[\alpha.M + K, M] \in \mathcal{L}(P)$ et la martingale locale $L := \alpha.M + K$ est orthogonale à M. Si Z est la densité d'une loi minimale, alors $L \in \mathcal{L}(Q)$ et $ZL \in \mathcal{L}(P)$. On en déduit aisément que $Z_-.[K, L] \in \mathcal{L}(P)$, puis $[K, L] = -\alpha.[M, L] + [L, L] \in \mathcal{L}(P)$ et enfin $[L, L] \in \mathcal{L}(P)$ si bien que $L = 0$ et $Z = \mathcal{E}(-\alpha.M)$. Rappelons que la solution de l'équation différentielle $dY = -Y\alpha_- dM$ vérifiant la condition initiale $Y_0 = 1$ s'écrit :

$$\mathcal{E}(-\alpha.M)_t = \exp\left(-(\alpha.M)_t - \frac{1}{2}(\alpha^2.\langle M^c, M^c\rangle)_t\right) \sum_{0\le s\le t} (1 - \alpha_s\Delta M_s)e^{\alpha_s\Delta M_s}.$$

Cette martingale locale sera strictement positive si et seulement si $1 - \alpha\Delta M > 0$ p.s., ce qui achève la démonstration de la proposition 3.1.

Remarque 3.2. On pourrait penser que l'existence d'une loi de martingale entraîne que $1 - \alpha\Delta M > 0$ mais il n'en est rien comme le montrent les deux exemples suivants tirés de [1]. Considérons le processus M défini par $M_t = 0$ pour $t < 1$ et

$$P[M_1 = 2] = P[M_1 = 0] = \frac{1}{2}P[M_1 = -1] = \frac{1}{4}.$$

Si $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration naturelle de ce processus, on constate que M est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale. On choisit alors un processus prévisible A tel que $A_t = 0$ pour $t < 1$ et A_1 soit une constante. Enfin on remarque que $\langle M, M\rangle_t = 0$ pour $t < 1$ et $\langle M, M\rangle_1 = E[M_1^2] = \frac{3}{2}$ si bien que $\alpha_t = 0$ pour $t < 1$ et $\alpha_1 = \frac{2}{3}A_1$. Lorsque $A_1 = \frac{3}{4}$, $1 - \alpha_1 M_1$ s'annule et lorsque $A_1 > \frac{3}{4}$, $1 - \alpha_1 M_1$ prend des valeurs négatives. Cependant la semimartingale $X = M + A$ peut être transformée en une martingale par un changement de loi dès que X_1 prend des valeurs positives et négatives, c'est-à-dire dès que $-2 < A_1 < 1$. Dans ces conditions X admet une loi de martingale mais $\mathcal{E}(-\alpha.M)$ n'est pas nécessairement une v.a. strictement positive, contrairement au cas continu. Voici un deuxième exemple. Considérons un mouvement brownien (B_t) et un processus de Poisson (N_t) standards indépendants. On note $(\mathcal{F}_t)$ la filtration naturelle du couple (B_t, N_t) et on désigne par α un processus prévisible vérifiant $\int_0^1 \alpha_s^2 ds < +\infty$. Soit $T = \inf\{t : \mathcal{E}(-(2\alpha).B)_t \geq \theta\}$ où θ est une constante strictement supérieure à 1. Dans ce cas le processus $X_t = B_t^T + N_t^T + (2\alpha - 1)t_\wedge T$ est manifestement une martingale sous la loi Q de densité $\mathcal{E}(-(2\alpha).B)_T$. En reprenant les notations de la proposition 3.1. on constate que $M_t = B_t^T + N_t^T - t_\wedge T$ et $\langle M, M\rangle_t = 2t_\wedge T$. Comme la densité de Q est bornée, on a l'inclusion $L^1(P) \subset L^1(Q)$ si bien que X admet une loi de martingale mais $\alpha\Delta M = \alpha\Delta N^T = \alpha 1_{\{\Delta N^T \neq 0\}}$ peut prendre des valeurs quelconques suivant le choix de α.

Nous allons poursuivre l'étude de l'existence de la loi minimale **en supprimant l'hypothèse** $d = 1$ mais nous supposerons en revanche que le processus des prix actualisés X est **continu.** Dans [1] nous avions explicité la forme générale des densités de loi de martingale lorsque X est continu. Toutefois pour pouvoir résoudre le problème qui nous intéresse il est judicieux de modifier légèrement ces expressions. Rappelons ce dont il s'agit.

Soient $(N^i)_{i=1,\dots,d}$ des martingales locales réelles continues deux à deux orthogonales telles que chaque composante M^i de M appartienne localement au sous-espace stable S engendré par (N^i). $\widetilde{A}$ désigne un processus croissant continu adapté tel que $d\langle N^i, N^i\rangle$ soit absolument continu par rapport à $\widetilde{A}$ pour $i = 1, \dots, d$. On peut alors choisir un processus prévisible δ à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ vérifiant $d\langle N^i, N^i\rangle = \delta^i d\widetilde{A}$. Quitte à remplacer N^i par $\frac{1}{\sqrt{\delta^i}}.N^i$ on peut supposer que δ^i prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$ (c'est-à-dire $dN^i = 0$ sur $\{\delta^i = 0\}$). Il existe une matrice prévisible σ d'ordre d telle que pour tout i et j on ait $\int_0^1 (\sigma_s^{ij})^2 d\langle N^j, N^j\rangle_s < +\infty$ et $M^i = \sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij}.N^j$. L'ensemble $\{\delta^j = 0\}$ n'étant pas chargé par le processus croissant $\langle N^j, N^j\rangle$ nous imposerons **la condition supplémentaire** $\sigma^{ij} = 0$ sur $\{\delta^j = 0\}$. Lorsque $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration engendrée par un mouvement brownien W, on prendra simplement $N^i := W^i$, $d\widetilde{A}_t := dt$ et $\delta^i := 1$ (voir par exemple [9]). Le théorème suivant a été établi dans [1] sous une forme légèrement différente mais la démonstration est la même, c'est pourquoi nous l'omettrons.

Théorème 3.3. S'il existe une loi de martingale Q pour le processus continu X, on peut choisir des processus prévisibles θ et b à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ vérifiant : $dA = bd\widetilde{A}$, $b = \sigma\theta$, $\theta^i = 0$ sur $\{\delta^i = 0\}$, θ^i est intégrable par rapport à N^i pour tout $i = 1, \dots, d$ et la décomposition canonique de X est $X = \sigma.N + b.\widetilde{A}$. En outre la densité de Q s'écrit $\mathcal{E}(-\theta^*.N + L)$ où L est une martingale locale orthogonale aux composantes de N. Réciproquement toute loi Q dont la densité s'écrit sous cette forme avec θ vérifiant toutes les conditions ci-dessus, est une loi de martingale locale pour X.

Remarque 3.4. Un peu plus loin nous préciserons légèrement le théorème 3.3. grâce à l'introduction de la loi de martingale minimale.

La proposition suivante qui a été établie par N. El Karoui et M.C. Quenez dans [11] lorsque N est un mouvement brownien et $d\widetilde{A}_t = dt$, va nous fournir une écriture explicite de la densité de la loi minimale dans le cas continu. Elle nous permettra aussi d'étudier son existence.

Proposition 3.5. On a l'équivalence entre :

i) Il existe une loi minimale θ.

ii) Il existe un processus prévisible θ vérifiant $b = \sigma\,\theta$, $\theta \in Im\,\sigma^*$, $\theta^i = 0$ sur $\{\delta^* = 0\}$ pour $i = 1, \ldots, d, \mathcal{E}(-\theta^*.N)$ et $X^i\mathcal{E}(-\theta^*.N)$ $i = 1, \ldots, d$ sont des P martingales. Dans ce cas $\frac{dQ}{dP} = \mathcal{E}(-\theta^*.N)_1$ et θ est unique.

Démonstration : Montrons d'abord l'implication i) $\Rightarrow$ ii). D'après le théorème 3.3. le processus densité Z s'écrit $Z = \mathcal{E}(-\theta^*.N + L)$ avec $b = \sigma\theta$ et L orthogonale à chaque N^i, donc à chaque M^i. Comme Q est minimale, il en résulte que $[Z, L] \in \mathcal{L}(P)$. Or $[Z, L] = Z_-.[-\theta^*.N + L, L] = Z_-.[L, L]$ si bien que $[L, L] \in \mathcal{L}(P)$ et $L = 0$. Donc pour toute martingale locale U orthogonale à M, on a $[Z, U] = 0$, c'est-à-dire $[\theta^*.N, U] = 0$. En d'autres termes $\theta^*.N$ appartient localement au sous-espace stable engendré par M et il existe un processus prévisible φ intégrable par rapport à M (voir Jacod [8]) vérifiant $\theta^*.N = \varphi^*.M = (\sigma^*\varphi)^*.N$. On en déduit que $\theta^i\delta^i = \left(\sum_{j=1}^{d}\sigma^{ji}\varphi^j\right)\delta^i$, l'égalité ayant lieu aux ensembles $d\widetilde{A}$ négligeables près. Comme $\theta^i = 0$ et $\sigma^{ji} = 0$ sur $\{\delta^i = 0\}$, on a $\theta = \sigma^*\varphi$ et la première implication est démontrée.

Réciproquement soit $Z := \mathcal{E}(-\theta^*.N)$ une martingale telle que $\theta = \sigma^*\varphi$ et que ZX soit une P martingale. Alors Z est une densité de loi de martingale et $\theta^*.N = \varphi^*.M$ si bien que toute martingale locale U orthogonale à M sous P est aussi orthogonale à $\theta^*.N$, donc à Z. Par conséquent la loi Q de densité Z_1 est la loi minimale et la démonstration de la proposition 3.5. est achevée.

Quand le processus des prix actualisés est continu, l'existence d'une loi de martingale découle d'une certaine condition de non arbitrage (voir par exemple [2] pour le cas L^p $1 \leq p < +\infty$ et [4] pour le cas L^∞).

Théorème 3.6. Lorsque X est continu et admet une loi de martingale, la loi minimale existe au moins localement.

Démonstration : Par hypothèse il existe une loi de martingale dont le processus densité s'écrit $Z = \mathcal{E}(-\theta^*.N + L)$ d'après le théorème 3.3. De plus $\sigma\theta = b$ et $\sum_{i=1}^{d}(\theta^i)^2.\langle N^i, N^i\rangle = \left(\sum_{i=1}^{d}(\theta^i)^2\delta^i\right).\widetilde{A} = \|\theta\|^2.\widetilde{A} < +\infty$ car $\theta^i\delta^i = \theta^i$. Soit $\widetilde{\theta}$ la projection de θ sur $(\text{Ker }\sigma)^\perp = \text{Im }\sigma^*$. Alors $b = \sigma\widetilde{\theta}$ et $\widetilde{\theta} \in \text{Im }\sigma^*$ si bien que l'équation $\sigma\sigma^*\varphi = b$ admet au moins une solution qu'on peut choisir prévisible grâce à la méthode du pivot de Gauss. Nous posons $\widetilde{\theta} := \sigma^*\varphi$. On observera que $\widetilde{\theta}^i = 0$ sur $\{\delta^i = 0\}$ car $\sigma^{ji} = 0$ sur $\{\delta^i = 0\}$ et que $\|\widetilde{\theta}\|^2 \leq \|\theta\|^2$, c'est-à-dire $\|\widetilde{\theta}\|^2.\widetilde{A} < +\infty$. Ainsi $\widetilde{\theta}$ remplit **localement** les conditions ii) de la proposition 3.5. et la loi minimale Q existe au moins localement.

Le Théorème 3.6. va nous permettre de préciser un peu le théorème 3.3. en exprimant les densités des lois de martingale en fonction de la densité minimale et par là même nous apportons une motivation supplémentaire à l'étude de la loi minimale.

Corollaire 3.7. Si le processus continu X admet une loi de martingale, alors le processus densité Z s'écrit sous la forme $\mathcal{E}(-\theta^*.N + L) = \mathcal{E}(-\theta^*.N)\mathcal{E}(L)$ où θ est l'unique processus prévisible vérifiant les conditions de la proposition 3.5. et L une martingale locale orthogonale à N.

Démonstation : D'après le théorème 3.3. le processus densité Z s'écrit $\mathcal{E}(-\theta^*.N + L)$ où L est orthogonale à N. On considère alors le processus $\widetilde{\theta} := \sigma^*\varphi$ défini dans la démonstration du théorème 3.6. et on remarque que $\widehat{\theta} := \theta - \widetilde{\theta}$ appartient à Ker σ tandis que $\widetilde{\theta} \in (\text{Ker } \sigma)^\perp$. Donc $d\langle\widetilde{\theta}^*.N, \widehat{\theta}^*.N\rangle = \sum_{i=1}^{d} \widetilde{\theta}^i\widehat{\theta}^i d\langle N^i, N^i\rangle = \sum_{i=1}^{d} \widetilde{\theta}^i\widehat{\theta}^i\delta^i d\widetilde{A} = (\widetilde{\theta}^*\widehat{\theta})d\widetilde{A} = 0$ puisque $\widetilde{\theta}^i\delta^i = \widetilde{\theta}^i$. Il ne reste plus qu'à poser $\widetilde{L} := -\widehat{\theta}^*.N + L$ et une vérification élémentaire montre que le couple $(\widetilde{\theta}, \widetilde{L})$ répond à la question.

Remarque 3.8. Il serait intéressant d'avoir une existence **globale** et pas seulement **locale** de la loi minimale. Nous ne sommes pas parvenus à répondre à cette question. Toutefois si on se place par exemple dans le cadre de la modélisation retenue par N. El Karoui et M.C. Quenez [11], c'est-à-dire l'équation $\sigma\theta = b$ admet une solution bornée, $\widetilde{A}$ est borné et X est une semimartingale dans $\mathcal{H}^2$, alors la condition de Novikov entraîne immédiatement que $\mathcal{E}(-\widetilde{\theta}.N)$ est une martingale de carré intégrable et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz $X^i\mathcal{E}(-\widetilde{\theta}.N)$ est une martingale pour tout $i = 1, \ldots, d$. Dans le cas général on retrouve un problème déjà soulevé par Karatzas, Lehoczky, Shreve et Xu [9] : si M et N sont deux martingales locales strictement positives sur $[0,1]$ telles que $M_0 = N_0 = 1$ et que MN soit une martingale sur $[0,1]$, peut-on en déduire que M et N sont des martingales sur $[0,1]$? Une réponse négative a été fournie par D. Lépingle [12] et Karatzas, Lehoczky et Shreve [10] dans le cas discret. Toutefois nous ignorons la réponse dans le cas où M et N sont continues. On peut noter que si M_1 et N_1 sont indépendantes, alors la réponse est positive. En effet, M et N étant nécessairement des surmartingales positives d'après le lemme de Fatou, $E[M_1] \leq 1$ (resp. $E[N_1] \leq 1$)) l'égalité ayant lieu si et seulement si M (resp. N) est une martingale sur $[0,1]$. Or l'indépendance de M_1 et N_1 et la propriété de martingale de MN entraînent que $1 = E[M_1N_1] = E[M_1]E[N_1]$, si bien que $E[M_1] = E[N_1] = 1$, c'est-à-dire M et N sont des martingales. On peut aussi observer que la réponse à notre question sera positive si M et N possèdent la propriété de représentation prévisible par rapport à leurs filtrations naturelles respectives. Supposons en effet que pour toute fonction borélienne bornée f il existe un processus prévisible H tel que $\forall\, t \in [0,1]$ $E[f(M_1) \mid \mathcal{F}_t] = E[f(M_1)] + \int_0^t H_s dM_s$. Comme N est une martingale locale sur $[0,1]$, il existe une suite croissante de t.a. (T_n) tendent stationnairement vers 1 tels que N^{T_n} sont dans $\mathcal{H}^1$. En vertu de l'orthogonalité de M et N et grâce à la bornitude de f, donc de la martingale $H.M$, on obtient l'égalité $E[f(M_1)N_{T_n}] = E[f(M_1)]$. On considère alors la suite de fonctions f_p définies sur $\mathbf{R}^+$ par $f_p(x) = \inf\ (x,p)$ et on applique le lemme de Beppo-Levi à l'égalité précédente si bien que $E[M_1\ N_{T_n}] = E[M_1]$. Grâce au lemme de Fatou, on obtient : $E[M_1] \geq E[M_1\ N_1] = E[M_0\ N_0] = 1$. Donc $E[M_1] = 1$ et M est une martingale sur $[0,1]$. Nous remercions M. Yor pour des discussions fructueuses sur cette question.

Note ajoutée sur les épreuves : Dans la remarque 3.8 nous avons noté qu'il serait intéressant d'avoir une existence globale de la loi minimale. W. Schachermayer vient de trouver un splendide contre-exemple : A counter-example to several problems in the theory of asset pricing.

Bibliographie

[1] J.P. Ansel, C. Stricker :
Lois de martingale, densités et décomposition de Föllmer-Schweizer, (1991). A paraître dans les Annales de l'Institut Henri Poincaré.

[2] J.P. Ansel, C. Stricker :
Simulation des actifs contingents. A paraître.

[3] D.B. Colwell, R.J. Elliot :
Martingale Representation and non attainable Contingent claims. A paraître.

[4] F. Delbaen :
Representing Martingale Measures when Asset Prices are Continuous and Bounded. A paraître.

[5] C. Dellacherie, P.A. Meyer :
Probabilités et potentiel. Chapitres V à VIII. Théorie des Martingales. Hermann (1980).

[6] H. Föllmer, M. Schweizer :
Hedging of Contingent claims under Incomplete Inforamtion. Applied Stochastic Analysis, Stochastics Monographs, vol. 5, 389-414, Gorden and Breach (1991).

[7] N. Hofmann, E. Platen, M. Schweizer :
Option Pricing under Incompleteness and Stochastic Volatility. A paraître.

[8] J. Jacod :
Calcul Stochastique et Problème de Martingales. L.N. in M., 714. Springer 1979.

[9] I. Karatzas, J.P. Lehoczky, S.E. Shreve, G.L. Xu :
Martingale and duality Methods for utility Maximization in an Incomplete Market. SIAM J. Control and Optimization, vol. 29, n°3, 702-730, May 1991.

[10] I. Karatzas, J.P. Lehoczky, S.E. Shreve :
Retractation of equivalent martingale measures and optimal market completions.

[11] N. El Karoui, M.C. Quenez :
Programmation Dynamique et Evaluation des actifs Contingents en Marché Incomplet. Preprint, Université Paris VI (1991).

[12] D. Lépingle :
Orthogonalité et intégrabilité uniforme de martingales discrètes. A paraître dans le Séminaire de Probabilités XXVI.

[13] M. Schweizer :
Martingale Densities for General Asset Prices, SFB 303 discussion paper n° B-194, Université de Bonn (à paraître dans Journal of Mathematical Economics).

[14] C. Yoeurp :
Décomposition des martingales locales et formules exponentielles. Séminaire de Probabilités X, Lect. Notes Math., 511, 342-480, Springer (1976).

URA CNRS 741
Laboratoire de Mathématiques
Université de Franche-Comté
25030 Besançon Cedex