SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE SCHNEIDER
MICHEL WEBER

Une remarque sur un théorème de Bourgain

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 202-206
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__202_0>

UNE REMARQUE SUR UN THÉORÈME DE BOURGAIN

Dominique SCHNEIDER and Michel WEBER

1. Introduction

Dans [B], Jean Bourgain établit un lien profond entre la régularité d'une famille distributive (au sens de Sawyer [Sa]) de contractions linéaires $\{S_n, n \geq 1\}$ d'un espace $L^2(\mu)$, où μ est une probabilité, et l'entropie métrique des sous-ensembles de $L^2(\mu)$, $C_f = \{S_n f, n \geq 1\}$. Rappelons à ce propos (voir [Du]) qu'une partie K non vide d'un espace de Hilbert H est un GB (resp. GC) ensemble, si le processus isonormal Z sur H, c'est-à-dire le processus gaussien indexé sur H, dont la covariance est donnée par le produit scalaire, possède une version à trajectoires bornées sur K (resp. continues en norme sur K). Bourgain énonce dans [B].

THÉORÈME 1. — *Soit $\{S_n, n \geq 1\}$ une suite de contractions sur $L^2(\mu)$. On suppose qu'il existe une suite $\{T_j, j \geq 1\}$ d'isométries positives, inversibles de $L^2(\mu)$, préservant 1, commutant avec la suite $\{S_n, n \geq 1\}$ et vérifiant le théorème ergodique en moyenne dans $L^1(\mu)$:*

$$\forall f \in L^1(\mu), \qquad \lim_{J \to \infty} J^{-1} \sum_{j \leq J} T_j f = \int f d\mu. \tag{1.1}$$

Soit $p \in [1, \infty)$. On suppose que pour tout $f \in L^p(\mu)$, la suite $\{S_n f, n \geq 1\}$ converge presque sûrement. Alors les ensembles C_f sont des GB ensembles. En particulier, il existe une constante numérique C telle que

$$\sup\{\varepsilon \sqrt{\log N_f(\varepsilon)}, \varepsilon > 0\} \leq C \|f\|^2,$$

où $N_f(\delta)$ désigne le nombre minimal de boules hilbertiennes de rayon δ suffisant pour recouvrir C_f.

On se propose dans ce travail d'en donner une démonstration raccourcie en y introduisant une argumentation plus "gaussienne". Nous montrons ce faisant qu'il suffit de supposer que la suite $\{S_n f, n \geq 1\}$ soit bornée presque sûrement pour obtenir la conclusion et que celle-ci reste vraie pour des opérateurs linéaires continus en mesure. Ceci conduit naturellement à poser le problème suivant : sous les hypothèses du théorème 1, les ensembles C_f sont-ils GC ? Nous donnons en conclusion un exemple basé sur un théorème d'Halàsz pour lequel cela est vérifié. Cet exemple a aussi l'avantage de montrer le lien entre la propriété GC des ensembles C_f et la vitesse de convergence dans le théorème ergodique de Birkhoff (voir [LW] sur ce point).

2. Démonstration

La démonstration, astucieuse de Bourgain part d'un argument dû à Stein, que ce dernier a employé avec succès dans [St] à l'étude du principe de continuité. Il consiste à appliquer les hypothèses à un élément aléatoire particulier de $L^p(\mu)$, en l'occurrence une moyenne gaussienne (de Rademacher dans [St]) du type suivant :

$$\forall J \geq 1, \forall f \in L^p(\mu) \quad F_{J,f}(\omega, x) = \frac{1}{\sqrt{J}} \sum_{j\leq J} g_j(\omega) T_j(f)(x) \tag{2.1}$$

où $g_1, g_2, \ldots$ est une suite isonormale d'espace de base $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. L'argument profond dans la démonstration de Bourgain consiste à utiliser l'hypothèse de commutation comme moyen de transporter de l'information vers le processus isonormal, par le biais de $F_{J,f}, J$ grand.

Le dernier point de la démonstration consiste à utiliser le principe de Banach pour obtenir un contrôle uniforme des bornes, puis de conclure en appliquant le lemme de comparaison de Slépian en tirant un x au hasard. Dans ce qui suit, nous avons volontairement détaillé les passages clés de la démonstration. Nous avons isolé sous forme de lemme une remarque utile pour la suite concernant les isométries positives.

LEMME 2.1. — *Soit $T : L^p(\mu) \to L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, une isométrie positive telle que $T1 = 1$. Alors pour tout $f \in L^p(\mu)$, $(Tf)^2 = Tf^2$.*

En particulier si $p = 2$, T est aussi une isométrie sur L^1_+.

Preuve : Soit $A \in \mathcal{F}$, $0 < \mu(A) < 1$. On sait (c.f. [K] p. 186) que deux éléments $f, g \in L^p(\mu)$ sont à support disjoints si et seulement si, $\|f+g\|^p_{p,\mu} = \|f\|^p_{p,\mu} + \|g\|^p_{p,\mu}$. Puisque T est une isométrie positive, de $T1 = 1$ on déduit que $T1_A$ et $T1_{A^c}$ sont donc à supports disjoints, et $0 \leq T1_A, T1_{A^c} \leq 1$. Soit $E = \{0 < T1_A < 1\} = \{0 < T1_{A^c} < 1\}$. Comme $E \subset \mathrm{supp}(T1_A) \cap \mathrm{supp}(T1_{A^c})$, on conclut que $T1_A$ et $T1_{A^c}$ sont des indicatrices. Par suite toute fonction simple est transformée par T en une fonction simple. Pour ces fonctions on a : $(Tf)^2 = Tf^2$. Soit $f \in L^\infty(\mu)$; f est limite dans tout $L^p(\mu)$, $0 \leq p \leq \infty$ de telles fonctions. Par continuité de T, puis par extraction, il existe un index partiel sur lequel Tf et Tf^2 sont simultanément limites presque sûres de Tg_n et Tg_n^2, g_n simples. Donc $(Tf)^2 = Tf^2$ dans ce cas. Enfin sous les hypothèses faites $Tf = \lim_{n\to\infty} \uparrow T(fI(|f| \leq n))$ presque sûrement si $f \in L^p(\mu)$; ceci montre donc que $T.f^2 = (Tf)^2$ si $f \in L^p(\mu)$. □

Soit $f \in L^\infty(\mu)$; alors

$$\int dP() \int |F_{J,f}(,x)|^p d\mu(x) \leq (\sqrt{p})^p \int [J^{-1} \sum_{j\leq J} T_j f^2(x)]^{p/2} d\mu(x).$$

En vertu des hypothèses, $J^{-1}\sum_{j\leq J} T_j f^2$ converge quand $J \to \infty$, vers $\|f\|^2_{2,\mu}$, dans $L^1(\mu)$. On peut donc en extraire une sous-suite bornée convergent presque sûrement. Le théorème de convergence dominée montre donc que pour tout J grand,

$$\|F_{J,f}\|_{p,\mu\otimes P} \leq 2\sqrt{p}\|f\|_{2,\mu}. \tag{2.1}$$

Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$. A l'aide de l'inégalité de Tchébycheff, on en déduit pour ces J,

$$P\{\omega : \|F_{J,f}(\omega,.)\|_{p,\mu} > \|f\|_{2,\mu} 2\sqrt{p/\varepsilon}\} \leq \varepsilon. \tag{2.2}$$

L'hypothèse de bornitude presque sûre faite sur la suite $\{S_n, n \geq 1\}$, entraîne à l'aide du principe de Banach, qu'il existe une fonction $C(\varepsilon) > 0$, décroissante telle que

$$\text{(2.3)} \qquad \forall \varepsilon > 0, \forall f \in L^p(\mu), \mu\{\sup_n |S_n(f)| \leq \|f\|_{p,\mu} C(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Le théorème de Fubini, ainsi que (2.1) et (2.3) montrent donc que

$$P \otimes \mu\{(\omega, x) : \sup_{n \geq 1} |S_n(F_{J,f}(\omega, .))(x)| \leq C(\varepsilon) \|F_{J,f}(\omega, .)\|_{p,\mu}\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Il en résulte aisément que

$$\text{(2.4)} \qquad \mu\{x : P\{\omega : \sup_{n \geq 1} |S_n(F_{J,f}(\omega, .))(x)| \leq C(\varepsilon) \|F_{J,f}(\omega, .)\|_{p,\mu}\} \geq 1 - \sqrt{\varepsilon}\} \geq 1 - \sqrt{\varepsilon}.$$

Posons

$$X_\varepsilon = X_{\varepsilon,J,f} = \{x \in X : P\{\sup_{n \geq 1} |S_n(F_{J,f}(\omega, .)(x)| \leq 2\sqrt{p/\varepsilon}\, C(\varepsilon) \|f\|_{2,\mu}\} 1 - 2\sqrt{\varepsilon}\}.$$

De (2.2) et (2.4), il découle que $\mu(X_\varepsilon) \geq 1 - \sqrt{\varepsilon}$.

En vertu de l'évaluation 0.34 de [F] sur les semi-normes gaussiennes, on a

$$\text{(2.5)} \qquad \forall x \in X_\varepsilon, \mathsf{E} \sup_{n \geq 1} |S_n(F_{J,f}(.,))(x)| \leq \frac{8\sqrt{p/\varepsilon}\, C(\varepsilon) \|f\|_{2,\mu}}{1 - 2\sqrt{\varepsilon}}.$$

Pour un entier $N \geq 1$ arbitraire, on note $\overline{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$. Comparons maintenant l'écart quadratique de la suite gaussienne

$$\{S_n(F_{J,f}(\omega, .))(x), n \in \overline{N}\}$$

à celui du processus isonormal, c'est-à-dire à la norme sur $L^2(\mu)$. Le lemme 2.1. nous assure que

$$\text{(2.6)} \qquad \forall n, n' \in \overline{N}, \|S_n - S_{n'})(F_{J,f}(x)\|_{2,P} = \left(\frac{1}{J} \sum_{j \leq J} T_j((S_n - S_{n'})^2(f))(x)\right)^{1/2}.$$

En vertu de (1.1), procédant par extraction, il existe un index partiel $\mathcal{J}$ sur lequel chacun des membres de droite de (2.6) tend presque sûrement quand J tend vers l'infini vers $\|(S_n - S_{n'})(f)\|_{2,\mu}$. Et, partant, on aura pour tout J suffisamment grand dans $\mathcal{J}$,

$$\text{(2.7)} \qquad \forall n, n' \in \overline{N}, \|(S_n - S_{n'})(F_{J,f})(x)\|_{2,p} \geq \frac{1}{2} \|(S_n - S_{n'})(f)\|_{2,\mu},$$

sur un ensemble noté Y dans la suite, de masse supérieure ou égale à $1 - \sqrt{\varepsilon}$. Comme $\mu(X_\varepsilon \cap Y_\varepsilon) \geq 1 - 2\sqrt{\varepsilon} > 0$, en tirant un x au hasard dans $X_\varepsilon \cap Y_\varepsilon$, on déduit du lemme de comparaison de Slépian

$$\text{(2.8)} \qquad \mathsf{E} \sup\{Z(S_n(f)), n \in \bar{N}\} \leq \frac{16\sqrt{p/\varepsilon} C(\varepsilon) \|f\|_{2,\mu}}{1 - 2\sqrt{\varepsilon}}.$$

Soit maintenant $f \in L^2(\mu)$. Par continuité en moyenne quadratique de Z et par densité de $L^\infty(\mu)$ dans $L^2(\mu)$, on en déduit que (2.8) est aussi réalisé dans ce cas. Comme la borne obtenue est indépendante de $\overline{N}$, on conclut en faisant tendre N vers l'infini.

Ceci montre que $\{S_n f, n \geq 1\}$ est un GB ensemble pour tout $f \in L^2(\mu)$. Enfin le dernier point est simplement la minoration de Sudakov [Su].

3. Conclusion

La démonstration que nous venons de faire, permet d'énoncer le théorème de Bourgain sous la forme suivante :

THÉORÈME 3.1. — *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé, et soit $\{S_n, n \geq 1\}$ une suite d'opérateurs linéaires de $L^2(\mu)$ dans $L^2(\mu)$, continus en mesure, commutant avec une suite d'isométries $\{T_j, j \geq 1\}$ positives préservant 1 et vérifiant (1.1). Soit $2 \leq p < \infty$. On suppose*

$$\forall f \in L^p(\mu), \sup_{n\geq 1} |S_n(f)| < \infty, \quad \mu - \textit{presque partout.} \tag{3.1}$$

Alors pour tout $f \in L^p(\mu)$, C_f est un GB ensemble, et (1.2) est réalisé.

A la suite de cet énoncé, on peut maintenant se demander si la propriété : $\{S_n(f), n \geq 1\}$ converge presque sûrement pour tout $f \in \mathcal{X}$, n'entraîne pas de façon analogue que pour ces éléments $\overline{C}_f$ est un GC ensemble? Pour répondre à cette question il faut vraisemblablement remplacer le principe de Banach par un outil plus adapté. En effet, celui-ci ne distingue pas l'index sur lequel sont indicées S_n, de tout autre index partiel. Nous terminons en montrant qu'il existe des situations pour lesquelles cela est réalisé. L'exemple que nous donnons repose sur le théorème suivant dû à Halàsz (*cf*.[H]).

THÉORÈME 3.2. — *Pour tout automorphisme ergodique sur le tore, muni de la mesure de Lebesgue λ, et toute suite $(c_n)_{n\geq 1}$ croissante vers $+\infty$, $c_1 \geq 2$, il existe un ensemble mesurable A avec $\lambda(A) = 1/2$ tel que pour tout $n \geq 1$,*

$$|\sum_{j\leq n} 1_{\tau^{-j}A} - n/2| \leq c_n. \tag{3.2}$$

Autrement dit, individuellement la vitesse de convergence peut être de l'ordre de $O(1/n)$; la condition de croissance sur $(c_n)_{n\geq 1}$ et $c^2 \geq 2$, interdisant un ordre strictement inférieur.

Notons $S_n f = n^{-1}\sum_{j=1}^n f \circ \tau^j$, et soit $\omega_n = (\log 1 + n)^{-b'}, b' > 0, n \geq 1$. Soit $b < b'$. En appliquant le théorème précédent, on peut se placer dans les conditions suivantes :

1) il existe un mesurable A du tore tel que $\lambda(A) = 1/2$ et $|S_n(I_A) - 1/2 | \leq n\omega_n$ pour tout n, λ-presque partout,

2) la suite $(n\omega_n)_{n\geq 1}$ est croissante, $\omega^2 \geq 1$ et

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{n\geq 1}(\omega_{n+N})(\log 1 + n)^b = 0.$$

Posons $f = 1_A - 1/2$, et soit pour tout $j \geq 1$, T_j l'opérateur unitaire sur $L^2(\mu)$ associé à la transformation τ^j. Clairement, $\sqrt{1/J\sum_{j\leq J} T_j(S_n f)^2} \leq \omega_n, \lambda$ presque partout. Cela montre que le nombre de boules de rayon $\omega_n, n \geq N$, pour l' écart quadratique induit par la suite gaussienne $\{S_n(F_{J,F}(\cdot))(x), n \geq 1\}$, nécessaires pour recouvrir $[N, \infty]$ est majoré par $n - N$. En vertu d'un résultat classique de R.M. Dudley [Du], on en déduit que :

$$x\ \mu - p.p.\ \mathsf{E}(\sup_{n\geq N} S_n(F_{J,f})(x)) \leq C\int_1^\infty \frac{\omega(N+u)}{u\sqrt{\log 1 + u}} = H_N, \tag{3.3}$$

où C est une constante universelle.

Soit $N_1 > N$. En reprenant l'argumentation finale de la démonstration, on obtient

$$\mathsf{E}\sup\{Z(S_n(f)), N \leq n \leq N_1\} \leq H_N,$$

et par suite, faisant tendre N_1 vers l'infini, puis N vers l'infini on montre, puisque $\lim_{N\to\infty} H_N = 0$, que l'oscillation à l'infini de $\{Z(S_n(f)), n \geq 1\}$ est nulle presque sûrement. Les ensembles $\overline{C_f}$ sont donc des GC ensembles.

Références

[B] Bourgain, J. *Almost sure convergence and bounded entropy.* Israël J. of Math., V. 63, p. 79–87, (1988).

[Du] Dudley, R.M. *The size of compact subsets in Hilbert spaces and continuity of Gaussian processes.* J. Functional analysis, V1, p. 290–330 (1967).

[F] Fernique, X. *Gaussian Random Vectors and their reproducing Kernel Hilbert spaces.* Tech. rep. n° 34, Univ. of Ottawa, (1985).

[H] Halàsz, K. *Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem.* Acta Math. Acad. Sci Hungar. 28, p. 389–395, (1978).

[K] Krengel, U. *Ergodic theorems.* W. de Gruyter, studies in Mathematics 6, (1985).

[LW] Ladouceur, S., Weber, M. *Speed of convergence of the mean average operator for quasi-compact operators,* preprint, (1991).

[Sa] Sawyer, S. *Maximal inequalities of weak type.* Ann. Math., V. 84, p. 157–174, (1966).

[St] Stein, E.M. *On limits of sequences of operators.* Ann. Math. V. 74, p. 140–170, (1961).

[Su] Sudakov, V.N. *Gaussian random processes and measures of solid angles in Hilbert spaces.* Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R. V. 197, p. 43–45, (1971).

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.,
7, rue René Descartes,
67084 Strasbourg Cedex