

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

LUCA PRATELLI

**Une caractérisation de la convergence dans L^1 .
Application aux quasimartingales**

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 61-69

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__61_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE CARACTERISATION DE LA CONVERGENCE DANS L^1 .

APPLICATION AUX QUASIMARTINGALES

Luca Pratelli

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
Via Buonarroti 2, I-56127 Pisa

RÉSUMÉ. - Étant données des variables aléatoires réelles intégrables X_n, X , on étudie une condition de convergence de (X_n) vers X , qui est moins restrictive que la convergence faible dans L^1 . On donne ensuite de très faibles conditions (ne portant que sur les lois des X_n et sur la loi de X) à ajouter à la condition précédente pour la transformer en la convergence forte dans L^1 .

Comme application des résultats obtenus, on expose une démonstration directe de la convergence dans L^1 pour une martingale uniformément intégrable.

1. QUELQUES LEMMES SUR L'INTÉGRABILITÉ UNIFORME

Un critère classique, qui remonte à la Vallée Poussin (voir [1, p.38]), affirme que, pour qu'une suite X_n de variables aléatoires réelles soit uniformément intégrable, il faut et il suffit qu'il existe une application G de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, telle que l'on ait $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t)/t = \infty$ et

$$(1.1) \quad \sup_n E[G \circ |X_n|] < \infty.$$

La partie, de ce critère, concernant la nécessité de la condition peut être ainsi renforcée:

(1.2) LEMME. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles uniformément intégrables. Il existe alors un homéomorphisme strictement convexe F de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, admettant une dérivée non bornée, tel que la suite $(F \circ |X_n|)$ soit uniformément intégrable.

DÉMONSTRATION. On sait (voir [1, p.39]) qu'il existe une fonction réelle g définie dans $\mathbb{R}_+$, nulle en 0, croissante, non bornée, constante sur chaque intervalle de la forme $[k, k+1[$ (avec k entier), telle qu'en posant

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt \quad \text{pour } x \geq 0,$$

la relation (1.1) soit vérifiée. Il est clair qu'on peut construire un homéomorphisme f de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ qui soit majoré par $g+1$. En outre, quitte à remplacer f par $\log(1+f)$, on peut supposer que $f(x)/g(x)$ converge vers 0 lorsque x tend vers l'infini. Posons

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \quad \text{pour } x \geq 0.$$

La fonction F est alors un homéomorphisme strictement convexe de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ qui répond à la question. En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver une constante réelle positive c telle que l'on ait $\{F > c\} \subset \{F \leq \varepsilon G\}$. On a alors, pour tout n ,

$$\int_{\{F \circ |X_n| > c\}} F \circ |X_n| \, dP \leq \varepsilon E[G \circ |X_n|] \leq \varepsilon M,$$

où M désigne le premier membre de (1.1). Puisque εM est arbitrairement petit, cela prouve que la suite $(F \circ |X_n|)$ est uniformément intégrable.

Voilà un autre critère d'intégrabilité uniforme qui nous sera utile dans la suite:

(1.3) LEMME. *Étant donnée une suite (X_n) de variables aléatoires réelles intégrables, posons, pour tout nombre réel t , $p(t) = \limsup_n E[(X_n - t)^+]$.*

Alors, pour que les X_n^+ soient uniformément intégrables, il faut et il suffit que l'on ait $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 0$.

DÉMONSTRATION. L'assertion résulte aussitôt de la double inégalité suivante (valable pour tout couple t, x de nombres réels, avec t positif)

$$(x-t)^+ \leq x I_{]t, \infty[}(x) \leq 2(x - t/2)^+.$$

2. UNE CARACTÉRISATION DE LA CONVERGENCE EN LOI

(2.1) PROPOSITION. *Soit D un ensemble partout dense dans $\mathbb{R}$, et soient X_n, X des variables aléatoires réelles intégrables.*

Les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) *La suite (X_n) converge en loi vers X , et les X_n^+ sont uniformément intégrables.*

(b) *Pour tout élément t de D , on a*

$$(2.2) \quad \lim_n E[(X_n - t)^+] = E[(X - t)^+].$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver que (b) entraîne (a). Supposons donc la condition (b) remplie. L'inégalité élémentaire

$$|(x-t)^+ - (x-s)^+| \leq |t-s|$$

montre alors que la relation (2.2) a lieu pour tout nombre réel t . Soit f un élément de $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En intégrant par parties, on trouve

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f''(t)(x-t)^+ dt.$$

Il en résulte

$$E[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f''(t)E[(X-t)^+] dt = \lim_n \int_{\mathbb{R}} f''(t)E[(X_n-t)^+] dt = \lim_n E[f(X_n)],$$

et cela montre que (X_n) converge en loi vers X .

Enfin, pour prouver l'intégrabilité uniforme des X_n^+ , il suffit, grâce au Lemme (1.3), de faire tendre t vers $+\infty$ dans la relation (2.2).

(2.3) REMARQUE. En appliquant la proposition qu'on vient de démontrer aux variables aléatoires $-X_n, -X$, on obtient un résultat analogue, où la relation (2.2) est remplacée par la relation

$$(2.4) \quad \lim_n E[(X_n-t)^-] = E[(X-t)^-],$$

et où l'intégrabilité uniforme des X_n^+ est remplacée par celle des X_n^- .

3. UNE CARACTÉRISATION DE LA CONVERGENCE EN PROBABILITÉ

(3.1) PROPOSITION. *Étant données, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, les variables aléatoires réelles X_n, X , les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (a) *La suite (X_n) converge en probabilité vers X .*
- (b) *La suite (X_n) converge en loi vers X selon toute mesure de probabilité de la forme $Q = f(X).P$, avec f élément de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*
- (c) *La suite des vecteurs aléatoires (X, X_n) converge en loi vers le vecteur aléatoire (X, X) .*

DÉMONSTRATION. L'implication (a) $\Rightarrow$ (b) résulte aussitôt du fait que la convergence presque sûre (donc aussi la convergence en probabilité) n'est pas détruite par passage à une mesure de probabilité Q absolument continue par rapport à P .

Pour prouver que (b) entraîne (c), remarquons que l'hypothèse (b)

signifie que l'on a

$$\lim_n E[f(X)g(X_n)] = E[f(X)g(X)]$$

pour tout couple f, g d'éléments de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ce qui équivaut à la convergence vague de la loi du vecteur aléatoire (X, X_n) vers la loi du vecteur aléatoire (X, X) .

Enfin, l'implication (c) $\Rightarrow$ (a) est évidente, car l'hypothèse (c) entraîne que la suite $(|X_n - X|)$ converge en loi, donc en probabilité, vers la constante $|X - X| = 0$.

La proposition qu'on vient de démontrer permet de déduire de (2.1) le corollaire suivant:

(3.2) COROLLAIRE. Soit D un ensemble partout dense dans $\mathbb{R}$, et soient X_n, X des variables aléatoires réelles intégrables.

Les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) La suite (X_n) converge en probabilité vers X , et les X_n^+ sont uniformément intégrables.

(b) Pour tout élément t de D , la mesure image $X((X_n - t)^+, P)$ converge étroitement vers $X((X - t)^+, P)$.

DÉMONSTRATION. Il suffit en effet de remarquer que la condition (b) équivaut au fait que, pour tout élément t de D , la suite (X_n) vérifie à la fois la relation (2.2) et la relation suivante:

$$\lim_n E[f(X)(X_n - t)^+] = E[f(X)(X - t)^+] \quad \text{pour } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

4. UNE CONDITION MOINS RESTRICTIVE QUE LA CONVERGENCE FAIBLE DANS L^1

Étant données des variables aléatoires réelles intégrables X_n, X , on peut rechercher des conditions minimales à ajouter à la convergence faible de (X_n) vers X dans L^1 pour la transformer en la convergence forte dans L^1 .

Nous nous proposons de résoudre ce problème en remplaçant la convergence faible dans L^1 par une condition encore plus faible, à savoir:

$$(4.1) \quad \lim_n E[f(X)X_n] = E[f(X)X] \quad \text{pour } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Cette condition équivaut à la convergence vague de la mesure image $X(X_n, P)$ vers $X(X, P)$. Il s'agit d'une condition effectivement moins

restrictive que la convergence faible de (X_n) vers X dans L^1 : en effet, elle ne suffit même pas à garantir que la suite des espérances des X_n soit bornée. En outre, même si on la renforce en y ajoutant l'intégrabilité uniforme des X_n (c'est-à-dire la compacité relative faible de l'ensemble des X_n), on n'obtient pas encore une condition équivalente à la convergence faible de (X_n) vers X . On a cependant le résultat suivant:

(4.2) PROPOSITION. *Supposons que les variables aléatoires réelles X_n, X vérifient la condition (4.1) et que les X_n soient uniformément intégrables.*

On a alors $\lim_n E[X_n] = E[X]$.

DÉMONSTRATION. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque les X_n sont uniformément intégrables, il existe une constante réelle positive c telle que l'on ait

$$\sup_n \int_{\{|X| > c\}} (|X| + |X_n|) dP \leq \varepsilon.$$

Choisissons un élément f de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec $I_{[-c, c]} \leq f \leq 1$. On a alors, pour tout n ,

$$|E[(X_n - X)]| \leq |E[(X_n - X)f(X)]| + \varepsilon,$$

d'où la conclusion, grâce à (4.1).

Voilà une autre conséquence de la condition (4.1):

(4.3) PROPOSITION. *Supposons que les variables aléatoires réelles intégrables X_n, X vérifient la condition (4.1). On a alors*

$$(4.4) \quad E[f(X)(X-t)^+] \leq \liminf_n E[f(X)(X_n-t)^+],$$

$$(4.5) \quad E[f(X)(X-t)^-] \leq \liminf_n E[f(X)(X_n-t)^-]$$

pour tout nombre réel t et toute fonction f positive et semi-continue inférieurement sur $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. Pour prouver l'inégalité (4.4), il suffit de remarquer que, pour tout élément g de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec $0 \leq g \leq f I_{]t, \infty[}$, on a, grâce à l'hypothèse (4.1),

$$\begin{aligned} E[g(X)(X-t)^+] &= E[g(X)(X-t)] = \lim_n E[g(X)(X_n-t)] \\ &\leq \liminf_n E[f(X)(X_n-t)^+]. \end{aligned}$$

L'autre inégalité peut être démontrée de manière analogue (ou bien ramenée à la précédente par passage aux variables aléatoires $-X_n, -X$).

(4.6) COROLLAIRE. *Supposons que les variables aléatoires réelles intégrables X_n, X vérifient la condition (4.1). Alors, pour tout nombre réel*

t tel que l'on ait

$$(4.7) \quad E[(X-t)^+] = \lim_n E[(X_n-t)^+],$$

la mesure image $X((X_n-t)^+.P)$ converge étroitement vers $X((X-t)^+.P)$.

DÉMONSTRATION. L'hypothèse supplémentaire (4.7) permet en effet de renforcer la conclusion de la proposition précédente en affirmant que la relation (4.4) a lieu pour toute fonction f *minorée* et semi-continue inférieurement.

5. LE RÉSULTAT PRINCIPAL: UNE CARACTÉRISATION DE LA CONVERGENCE DANS L^1

Le théorème suivant, qui constitue le résultat principal du présent article, fournit un certain nombre de réponses à la question posée au début du paragraphe précédent.

(5.1) THÉOREME. Supposons que les variables aléatoires réelles intégrables X_n, X vérifient la condition suivante (moins restrictive que la convergence faible de (X_n) vers X dans L^1):

$$\lim_n E[f(X)X_n] = E[f(X)X] \quad \text{pour } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Alors, pour que la suite (X_n) converge vers X au sens fort dans L^1 , il faut et il suffit qu'elle vérifie l'une quelconque des trois conditions supplémentaires suivantes:

(a) La suite (X_n) est uniformément intégrable et converge en loi vers X .

(b) On a $\lim_n E[X_n] = E[X]$, et il existe une fonction réelle g , strictement convexe sur $\mathbb{R}$, vérifiant la relation

$$(5.2) \quad \lim_n E[g(X_n)] = E[g(X)] < \infty.$$

(c) Il existe un ensemble D , partout dense dans $\mathbb{R}$, tel que l'on ait

$$(5.3) \quad \lim_n E[|X_n - t|] = E[|X - t|]$$

pour tout élément t de D .

DÉMONSTRATION. Il est évident que, si la suite (X_n) converge vers X au sens fort dans L^1 , elle vérifie la condition (a).

Montrons que (a) entraîne (b). Remarquons, à cet effet, que si l'on prend F comme dans le Lemme (1.2), la convergence en loi de la suite $(F \circ |X_n|)$ vers $F \circ |X|$ entraîne que l'on a

$$E[F \circ |X|] = \lim_n E[F \circ |X_n|] < \infty,$$

de sorte que la condition (b) est remplie, avec $g(x) = F(|x|)$.

Montrons maintenant que (b) implique (c). Supposons donc la condition (b) remplie. Quitte à retrancher de g une fonction linéaire affine, on pourra supposer $\inf g = 0$. Trois cas sont possibles: ou bien g est strictement croissante, ou bien g est strictement décroissante, ou bien g s'annule en un point c . (Dans ce dernier cas, g est strictement décroissante sur $]-\infty, c]$, strictement croissante sur $[c, \infty[$). En tout cas, g peut se mettre sous la forme

$$(5.4) \quad g(x) = \int \lambda(dt) h(t, x),$$

où λ est une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}$, admettant $\mathbb{R}$ comme support, et où h est une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^2$, telle que, pour tout t , la fonction $h(t, \cdot)$ coïncide avec l'une des deux fonctions

$$x \mapsto (x-t)^+, \quad x \mapsto (x-t)^-.$$

En vertu de (4.3), on a, pour tout t ,

$$(5.5) \quad E[h(t, X)] \leq \liminf_n E[h(t, X_n)].$$

En outre, grâce à l'hypothèse $\lim_n E[X_n] = E[X]$, la relation

$$(5.6) \quad E[h(t, X)] = \lim_n E[h(t, X_n)]$$

est équivalente à chacune des relations (2.2), (2.4).

En utilisant (5.4), (5.5) et (5.2), on obtient

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \int \lambda(dt) E[h(t, X)] \\ &\leq \int \lambda(dt) \liminf_n E[h(t, X_n)] \\ &\leq \liminf_n \int \lambda(dt) E[h(t, X_n)] \\ &= \liminf_n E[g(X_n)] = E[g(X)] < \infty. \end{aligned}$$

Cela prouve que la fonction

$$t \mapsto \liminf_n E[h(t, X_n)] - E[h(t, X)]$$

(positive en vertu de (5.5)) est négligeable pour la mesure λ . L'ensemble où cette fonction est nulle contient donc un ensemble dénombrable D partout dense dans $\mathbb{R}$. Quitte à passer (par un procédé diagonal) à une suite extraite, on peut supposer que la suite (X_n) vérifie, pour tout élément t de D , la relation (5.6), c'est-à-dire les relations équivalentes (2.2), (2.4). Il en résulte que la condition (c) est remplie.

Montrons enfin que la condition (c) implique la convergence forte de (X_n) vers X dans L^1 . Remarquons, à cet effet, que, pour tout élément t de D , l'hypothèse (5.3) transforme les inégalités

$$E[(X-t)^+] \leq \liminf_n E[(X_n-t)^+], \quad E[(X-t)^-] \leq \liminf_n E[(X_n-t)^-]$$

(fournies par la Proposition (4.3)) en les égalités (2.2), (2.4). Il en résulte, grâce à (4.6), que la condition (b) du Corollaire (3.2) est

remplie. Ce corollaire assure alors la convergence en probabilité de (X_n) vers X , ainsi que l'intégrabilité uniforme des X_n^+ . Puisque le même raisonnement, appliqué aux variables aléatoires $-X_n, -X$, fournit l'intégrabilité uniforme des X_n^- , la démonstration est achevée.

(5.7) COROLLAIRE. *Pour qu'une suite (X_n) de variables aléatoires réelles intégrables converge vers une variable aléatoire réelle intégrable X au sens fort dans L^1 , il faut et il suffit qu'elle converge vers X en loi et au sens faible dans L^1 .*

(5.8) REMARQUE. Chacune des trois conditions (a), (b), (c) qui figurent dans l'énoncé du Théorème (5.1) ne porte que sur les lois des X_n et sur la loi de X . Ce théorème peut être considéré comme un perfectionnement du résultat suivant (cas particulier de [4, Th.3, p.449]): pour que la suite (X_n) converge vers X au sens fort dans L^1 , il suffit qu'elle converge vers X au sens faible dans L^1 et qu'il existe une fonction réelle g , strictement convexe sur $\mathbb{R}$, telle que l'espérance de $g(X_n)$ converge vers l'espérance de $g(X)$.

6. APPLICATION AUX QUASIMARTINGALES

On sait que toute quasimartingale (discrète) uniformément intégrable converge dans L^1 . Ce résultat peut être démontré en utilisant la décomposition de Rao (voir [2],[3]) et le fait que toute surmartingale positive converge presque sûrement. Nous en exposons ici une démonstration directe, fondée exclusivement sur les résultats du présent article.

Commençons par rappeler qu'une suite (X_n) de variables aléatoires réelles intégrables sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, adaptée à une suite croissante $(\mathcal{F}_n)$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$, est dite une *quasimartingale* (par rapport à $(\mathcal{F}_n)$) si la suite (D_n) définie par

$$D_n = E[X_n - X_{n+1} | \mathcal{F}_n]$$

vérifie la relation $\sum_n \|D_n\|_1 < \infty$.

Étant donnée la quasimartingale (X_n) , on reconnaît immédiatement que l'on a

$$\left| \int_A (X_n - X_{n+k}) dP \right| \leq \sum_{n \leq j < n+k} \|D_j\|_1$$

pour tout couple n, k d'entiers positifs et tout élément A de $\mathcal{F}_n$.

Il en résulte que, pour tout élément A de l'algèbre $\bigcup_m \mathcal{F}_m$, la suite de

nombres réels $(\int_A X_n dP)$ est de Cauchy. Par conséquent, si la quasimartingale (X_n) est uniformément intégrable, elle admet une seule valeur d'adhérence pour la topologie faible, de sorte qu'elle converge, pour cette topologie, vers une variable aléatoire intégrable X . Pour prouver que (X_n) converge vers X au sens fort dans L^1 , il reste à montrer (voir (5.7)) que (X_n) converge vers X en loi, c'est-à-dire que la condition (b) de la Proposition (2.1) est remplie. Or ceci résulte aussitôt des relations suivantes:

$$E[(X-t)^+] = \lim_n \int_{\{X > t\}} (X_n - t) dP \leq \liminf_n E[(X_n - t)^+],$$

$$E[(X_n - t)^+] = \int_{\{X_n > t\}} (X_n - X) dP + \int_{\{X_n > t\}} (X - t) dP \leq \sum_{j \geq n} \|D_j\|_1 + E[(X - t)^+].$$

La démonstration est donc achevée.

(6.1) REMARQUE. Le résultat qu'on vient de démontrer entraîne à son tour la convergence presque sûre de la quasimartingale (X_n) , grâce à l'inégalité suivante (valable pour tout $\varepsilon > 0$ et tout couple n, k d'entiers positifs):

$$(6.2) \quad \varepsilon P\{\sup_{1 \leq h \leq k} |X_n - X_{n+h}| > \varepsilon\} \leq \|X_n - X_{n+k}\|_1 + \sum_{n < j < n+k} \|D_j\|_1.$$

Pour démontrer cette inégalité, fixons l'entier n et posons

$$T = \inf\{h: h \geq 1, |X_n - X_{n+h}| > \varepsilon\}, \quad J_h = I_{\{X_n > X_{n+h}\}} - I_{\{X_n < X_{n+h}\}}.$$

On a alors, pour tout entier h compris entre 1 et k ,

$$\begin{aligned} \varepsilon P\{T=h\} &\leq \int_{\{T=h\}} |X_n - X_{n+h}| dP = \int_{\{T=h\}} J_h (X_n - X_{n+h}) dP \\ &= \int_{\{T=h\}} J_h (X_n - X_{n+k} - \sum_{n+h \leq j < n+k} D_j) dP \\ &\leq \int_{\{T=h\}} (|X_n - X_{n+k}| + \sum_{n < j < n+k} |D_j|) dP. \end{aligned}$$

Pour obtenir l'inégalité (6.2), il ne reste plus qu'à sommer sur $h=1, \dots, k$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. Dellacherie et P.-A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Chap. I-IV, Paris 1975.
- [2] C. Dellacherie et P.-A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Chap. V-VIII, Paris 1980.
- [3] K.M. Rao, *Quasimartingales*, Math. Scand. 24, 1969, 79-92.
- [4] A. Visintin, *Strong convergence results related to strict convexity*, Comm. Partial Differential Equations, 9(5), 1984, 439-466.