YAO-ZHONG HU

Une formule d'Itô pour le mouvement brownien fermionique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 575-578

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__575_0>

UNE FORMULE D'ITO
POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN FERMIONIQUE

par Yao–Zhong HU

La formule d'Ito classique exprime la composition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ avec le mouvement brownien au moyen d'intégrales stochastiques. Ce que les spécialistes de probabilités quantiques appellent *formule d'Ito* n'est qu'une *formule d'intégration par parties.* En effet, il ne peut être question de définir en probabilités quantiques la composition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ avec les opérateurs de création et d'annihilation, qui ne sont même pas normaux. En revanche, le mouvement brownien fermionique (X_t) issu de 0 est un processus (non commutatif) d'opérateurs autoadjoints bornés, et par conséquent le processus d'opérateurs $F(t,X_t)$, défini par le calcul symbolique, a un sens pour F borélienne. Nous allons essayer d'écrire pour ce processus une formule ressemblant autant que possible à la formule d'Ito classique.

1 Rappelons que la théorie du mouvement brownien fermionique se résume dans les deux formules $dX_t^2 = dt$, et $dX_s dX_t + dX_t dX_s = 0$ pour $s \neq t$. Chaque v.a. X_t prise individuellement admet une loi symétrique portée par les deux points $\pm\sqrt{t}$.

THÉORÈME. *Soit $F(t,x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On a alors*

$$
\begin{aligned}
F(t,X_t) = F(0,0) + \int_0^t F_s'(s,X_s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{-1}^1 F_x'(s,uX_s)\,du\Big)\,dX_s \\
+\frac{1}{4}\int_0^t \Big(\int_{-1}^1 F_{xx}''(s,uX_s)(1+u)\,du\Big)\,ds
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

DÉMONSTRATION. Les v.a. aléatoires du mouvement brownien fermionique étant uniformément bornées sur l'intervalle $[0,t]$, il suffit de traiter le cas où $F(s,x)$ est un polynôme en x dont les coefficients sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ en s. Nous l'écrivons

$$F(t,x) = \sum\nolimits_n a_n(t)\,x^n$$

et nous introduisons les deux fonctions

$$f(t) = \sum\nolimits_n a_{2n}t^n = \frac{1}{2}(F(t,\sqrt{t}) + F(t,-\sqrt{t}))$$

$$g(t) = \sum\nolimits_n a_{2n+1}t^n = \frac{1}{2\sqrt{t}}(F(t,\sqrt{t}) - F(t,-\sqrt{t})) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 F_x'(t,u\sqrt{t})\,du\ .$$

Nous avons alors, en tenant compte de la relation $X_t^2 = t$

$$F(t,X_t) = \sum\nolimits_n a_n(t)\,X_t^n = f(t) + g(t)\,X_t\ . \tag{1.2}$$

Ceci est une famille d'opérateurs à laquelle on peut appliquer la formule d'intégration par parties stochastique, d'ailleurs triviale ici

$$dF(t,X_t) = (f'(t) + g'(t)\,X_t)\,dt + g(t)\,dX_t\ . \tag{1.3}$$

Nous allons utiliser d'autre part les calculs suivants

$$\int_{-1}^{1} F'_x(t, uX_t)\, du = \sum\nolimits_n a_n(t) \int_{-1}^{1} nu^{n-1} X_t^{n-1} du$$
$$= 2 \sum\nolimits_k a_{2k+1}(t)\, t^k = 2g(t)\ .$$
$$\int_{-1}^{1} F''_{xx}(t, uX_t)\, du = \sum\nolimits_n \int_{-1}^{1} n(n-1)\, a_n(t) u^{n-2} X_t^{n-2} du$$
$$= 4 \sum\nolimits_k k\, a_{2k}(t) t^{k-1}$$
$$\int_{-1}^{1} F''_{xx}(t, uX_t)\, u\, du = \sum\nolimits_n \int_{-1}^{1} n(n-1)\, a_n(t) u^{n-1} X_t^{n-2} du$$
$$= 4 \sum\nolimits_k k\, a_{2k+1}(t) t^{k-1} X_t\ .$$

La démonstration est alors un calcul immédiat : on commence par extraire de (3) le premier terme à droite de (1.1) qui vaut

$$F'_t(t, X_t)\, dt = \sum\nolimits_n a'_{2n} t^n\, dt + \sum\nolimits_n a'_{2n+1} t^n X_t\, dt \tag{1.4}$$

La différence (3)-(4) vaut

$$\sum\nolimits_k k a_{2k} t^{k-1}\, dt + \sum\nolimits_k k a_{2k+1} t^{k-1} X_t\, dt + g(t)\, dX_t$$

et ces trois termes sont ceux que l'on a calculés plus haut.

Remarque. Posons $u = 1 - 2\theta$. La "formule d'Ito" précédente prend alors la forme

$$\begin{aligned} F(t, X_t) = F(0,0) &+ \int_0^t F'_s(s, X_s)\, ds + \int_0^t \Big(\int_0^1 F'_x(s, X_s - 2\theta X_s)\, d\theta \Big)\, dX_s \\ &+ \int_0^t \Big(\int_0^1 F''_{xx}(s, X_s - 2\theta X_s)(1-\theta)\, d\theta \Big)\, ds \end{aligned} \tag{1.5}$$

qui ressemble de manière frappante à la formule donnée par Emery (*Sém. Prob. XXIII*, p.71) pour la martingale (X_t) solution de l'équation de structure $d[X,X]_t = dt + \Phi_t dX_t$

$$\begin{aligned} F(t, X_t) = F(0, X_0) &+ \int_0^t F'_s(s, X_s)\, ds + \int_0^t \Big(\int_0^1 F'_x(s, X_{s-} + \theta\Phi_s)\, d\theta \Big)\, dX_s \\ &+ \int_0^t \Big(\int_0^1 F''_{xx}(s, X_{s-} + \theta\Phi_s)(1-\theta)\, d\theta \Big)\, ds \end{aligned} \tag{1.6}$$

Il y a cependant une différence importante : le mouvement brownien fermionique issu d'un point x s'obtient par translation de x à partir du processus issu de 0, tandis que les martingales d'Azéma ne sont pas homogènes dans l'espace.

2 Nous allons donner une seconde démonstration de la formule (1.1), plus longue, mais plus voisine de la démonstration de la formule d'Ito classique.

La formule d'Ito classique s'obtient en écrivant que, pour une subdivision $0=t_0< t_1\ldots<t_n=t$ de l'intervalle $[0,t]$ on a (en abrégeant X_{t_i} en X_i)

$$f(X_t)-f(0)=\sum\nolimits_i f(X_{i+1})-f(X_i)$$

et en appliquant la formule de Taylor à l'ordre deux à ces différences. Nous allons faire la même chose, mais dans une situation non commutative. Nous allons raisonner sur la fonction

$$f(x)=e^{zx} \qquad (z \text{ complexe}) \tag{2.1}$$

à partir de laquelle on étendra le résultat grâce à l'intégrale de Fourier. La formule de Taylor sera remplacée par la série de perturbation suivante, dans laquelle U et V sont des opérateurs bornés — on pourrait d'ailleurs écrire une formule avec reste intégral au lieu d'une série.

$$e^{U+V}-e^U= \sum_{n>0}\int_{0<s_1\ldots<s_n<1} e^{(1-s_n)\,U}Ve^{(s_n-s_{n-1})\,U}V\ldots Ve^{s_1\,U}\,ds_1\ldots ds_n\;. \tag{2.2}$$

Si u et v sont les normes respectives de U,V, la norme de la n-ième intégrale est majorée par $e^u v^n/n!$. La série est donc normalement convergente. D'autre part, dans le cas qui nous intéresse, avec $U_j=zX_j$, $V_j=z\Delta X_j$, la norme u reste bornée sur l'intervalle, et la norme v vaut $|z|\sqrt{\Delta t_j}$. En définitive, on se trouve dans la même situation que pour la formule d'Ito classique : seules les deux premières intégrales ont une contribution non nulle. Lorsque U et V anticommutent, on a la formule

$$e^U V=V e^{-U}$$

La première intégrale de (2.2) vaut donc

$$\int_0^1 e^{(1-2s)\,U}V\,ds=\frac{e^U-e^{-U}}{2U}\,V$$

Remplaçons U,V par U_i,V_i et sommons, nous obtenons à la limite l'intégrale stochastique

$$\int_0^t \frac{e^{zX_s}-e^{-zX_s}}{2X_s}\,dX_s \tag{2.3}$$

qui correspond bien lorsque $F(x)=e^{zx}$ au terme en $\frac{1}{2}\int_{-1}^1 F'(uX_s)\,du$ dans l'intégrale stochastique de (1.1). De même, le second terme de la série (2.2) vaut

$$\int_{0<s<t<1} e^{(1+2s-2t)\,U}V^2\,ds\,dt=\frac{2U\,e^U+e^{-U}-e^U}{4U^2}\,V^2\;.$$

ce qui nous donne dans la formule d'Ito l'intégrale

$$\int_0^t \frac{2zX_se^{zX_s}-e^{zX_s}+e^{-zX_s}}{4X_s^2}\,ds\;. \tag{2.3}$$

qui correspond bien au terme en $\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} F''(uX_s)\,(1+u)\,du$ de la formule (1.1). Celle-ci a donc été obtenue par la même méthode que dans le cas classique pour les fonctions du type (2.1). Par intégration, on en déduit une formule d'Ito pour les fonctions de l'espace $\mathcal{S}$, ou encore (le mouvement brownien fermionique étant borné) pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. On passe de là aux fonctions $\mathcal{C}^2$ par un argument de densité. Il resterait à traiter le résultat analogue pour une fonction $F(s,x)$, mais nous ne le ferons pas.

REMARQUES. a) La démonstration ci–dessus laisse espérer une généralisation aux mouvements browniens fermioniques à plusieurs dimensions, par le chemin suivant : établir un résultat pour les exponentielles d'éléments du premier chaos, puis l'étendre par intégration à la manière d'une transformation de Fourier. Cela ne mène à rien. En effet, dans une algèbre de Clifford, le carré d'un élément du premier chaos est scalaire, et l'exponentielle d'un élément du premier chaos appartient à la somme des deux premiers chaos.

b) Notre intention en établissant cette formule d'Ito était l'adaptation, au cas du mouvement brownien fermionique, de la démonstration d'hypercontractivité de Neveu pour le semi–groupe d'Ornstein–Uhlenbeck classique. Nous n'y sommes parvenus qu'en dimension 1, où la situation est essentiellement commutative et se réduit à un résultat d'hypercontractivité élémentaire sur l'espace à deux points, établi par Gross. Même dans ce cas, la démonstration fermionique est fort compliquée, et nous avons renoncé à l'écrire en détail.