

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

ROMAIN ABRAHAM

## **Un arbre aléatoire infini associé à l'excursion brownienne**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 26 (1992), p. 374-397

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1992\\_\\_26\\_\\_374\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__374_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UN ARBRE ALEATOIRE INFINI ASSOCIE A L'EXCURSION BROWNIENNE

Romain Abraham  
Laboratoire de Probabilités  
Université Pierre et Marie Curie  
4 place Jussieu  
75005 PARIS

Le but de ce travail est la construction d'un arbre aléatoire infini qu'on peut obtenir comme limite d'arbres associés à des processus de Galton-Watson binaires critiques en temps continu. Cet arbre infini peut également être relié à l'excursion brownienne, cette étude étant motivée par les travaux récents de J. Neveu et J.W. Pitman ([NP1] et [NP2]). Cependant, nous avons choisi de construire d'abord l'arbre aléatoire infini et d'en étudier certaines propriétés sans faire référence à l'excursion brownienne.

Pour tout  $h > 0$ , l'arbre binaire standard de paramètre  $\frac{h}{2}$  est l'arbre associé à un processus de Galton-Watson  $(N_x^h)_{x \in \mathbb{R}_+}$  critique de loi de reproduction binaire (0 ou 2 descendants avec probabilité  $\frac{1}{2}$ ), à temps de vie exponentiels de paramètre  $\frac{2}{h}$ . La fonction génératrice  $f_x(u) = \mathbb{E} \left[ u^{N_x^h} \right]$  de ce processus est donnée par:

$$\forall u \in [0, 1] \quad \frac{1}{1 - f_x(u)} = \frac{1}{1 - u} + \frac{x}{h}.$$

De manière informelle, on peut caractériser la loi de cet arbre en disant que :

- (i) le tronc a une hauteur  $\alpha$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\frac{2}{h}$ .
- (ii) avec probabilité  $\frac{1}{2}$ , soit l'arbre meurt au niveau  $\alpha$ , soit il donne naissance à deux branches.
- (iii) sachant qu'il y a un branchement au niveau  $\alpha$ , les deux sous-arbres issus de ce branchement sont deux copies indépendantes de l'arbre initial.

Comme nous l'avons dit précédemment, l'un de nos buts est d'étudier l'arbre obtenu lorsque l'on fait tendre  $h$  vers 0, tout en imposant que la hauteur globale reste supérieure à  $H > 0$  fixé. Mais le formalisme donné par J. Neveu ([N1]) ne nous permet pas de traiter ce passage à la limite. La première partie de ce travail consistera donc à introduire un formalisme d'arbre dans lequel on pourra représenter l'arbre limite. Ce formalisme est assez proche de celui de J. Neveu et nous montrerons que, si nous nous restreignons à des arbres finis, il existe une bijection simple permettant de passer d'un formalisme à l'autre. L'introduction du formalisme d'arbre fait l'objet de la partie 1. Elle nécessite un certain nombre de notations et de vérifications fastidieuses mais cependant indispensables pour les énoncés qui suivent.

Une fois ce formalisme introduit, nous pouvons, dans la partie 2, définir un arbre infini aléatoire. Nous donnerons deux constructions de cet arbre, l'une directe en décrivant la distribution des branches de la  $n+1$ -ième génération sur l'arbre restreint à la  $n$ -ième génération, et l'autre beaucoup

plus intuitive en considérant cet arbre comme valeur finale d'un processus de Markov à valeurs dans l'espace des arbres. Cette dernière construction revient à faire "pousser" l'arbre en partant de la racine. Bien que plus naturelle, nous n'utiliserons pas cette définition par la suite.

Il s'agit ensuite dans la partie 3 d'identifier cet arbre comme limite des arbres binaires standards. Pour cela, nous utilisons la notion d'effacement introduite par J. Neveu ([N2]) et nous montrons que l'arbre infini, effacé sur une longueur  $h$ , est un arbre binaire standard de paramètre  $\frac{h}{2}$ . De plus, nous présenterons quelques propriétés de l'arbre que nous utiliserons par la suite.

Nous introduisons dans la partie 4 une notion de temps local sur l'arbre. Ce temps local rend compte, dans un certain sens, du nombre de branches présentes à chaque niveau (bien que ce nombre soit p.s. infini) et sera construit par approximation. Le temps local au niveau  $a$  (noté  $L^a$ ) est la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 de  $\varepsilon N_a^\varepsilon$ ,  $N_a^\varepsilon$  étant le nombre de branches présentes aux niveaux  $a - \varepsilon$  et  $a$ . Nous verrons de plus que le processus  $(L^a)_{0 < a < H}$  est continu.

L'arbre infini que nous avons construit est très lié au mouvement brownien. Nous montrons dans la partie 5 que nous pouvons le construire directement à partir d'une excursion brownienne. Cette construction rejoint les travaux de J. Neveu et J.W. Pitman ([NP1] et [NP2]) qui se limitaient à mettre en évidence l'arbre effacé sur une longueur  $h$  dans l'excursion brownienne. On peut également relier cette construction aux travaux de J.F. Le Gall ([LG2]) qui construit un arbre à partir d'une marche aléatoire et inversement. Nous expliquons aussi comment on peut à l'inverse reconstruire l'excursion brownienne à partir de l'arbre infini, grâce au temps local sur l'arbre étudié dans la partie 4. On obtient ainsi une nouvelle méthode (peu économique!) de construction du mouvement brownien réel.

Il serait intéressant de pouvoir relier l'arbre aléatoire infini du présent travail et celui qu'a introduit D. Aldous ([A1] et [A2]) qui est également limite d'arbres discrets. Notre arbre infini est cependant différent de celui d'Aldous en ceci qu'il correspond à l'excursion brownienne de hauteur fixée, alors que l'arbre d'Aldous se rattache à l'excursion de longueur fixée.

Une application possible de cet arbre aléatoire infini est de l'interpréter comme arbre généalogique des superprocessus : voir notamment [LG1] et [LJ].

## I L'ESPACE DES ARBRES.

### 1/ L'espace des arbres.

Dans ce formalisme, proche de celui de Neveu ([N1]), un arbre sera défini par l'ensemble de ses nœuds auxquels seront associées certaines marques : l'instant de naissance de la branche, sa durée de vie et sa position par rapport à la branche mère. Un nœud sera une suite finie d'entiers. Comme dans [N1], définissons d'abord l'ensemble des nœuds, respectivement l'ensemble des nœuds marqués :

$$\mathcal{U}^0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{N}^*)^n, \quad \mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((\mathbb{N}^*)^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \{1, 2\}),$$

où on a posé par convention  $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\emptyset\}$ .

Un élément générique de  $\mathcal{U}$  sera noté  $(u, \beta, \gamma, \xi)$  où  $u \in \mathcal{U}^0$ ,  $\beta$  représente l'instant de naissance de  $u$  dans la vie de son père,  $\gamma$  la durée de vie de  $u$  et  $\xi$  la position de  $u$  par rapport à son père (si  $\xi = 1$ ,  $u$  se branche à gauche de son père, à droite si  $\xi = 2$ ). De plus, on note  $p$  la projection de  $\mathcal{U}$  sur  $\mathcal{U}^0$  :

$$\forall (u, \beta, \gamma, \xi) \in \mathcal{U}, \quad p(u, \beta, \gamma, \xi) = u.$$

Si  $u = u_1 \dots u_p \in \mathcal{U}^0$ , on note  $|u| = p$ , si de plus  $v = v_1 \dots v_q \in \mathcal{U}^0$ , on note  $uv$  la suite  $u_1 \dots u_p v_1 \dots v_q$ . Enfin, on note  $v \prec u \iff \exists w \in \mathcal{U}^0, vw = u$ .

Nous pouvons alors définir l'espace des arbres.

**Définition:** soit  $\omega$  un sous-ensemble de  $\mathcal{U}$  tel que la restriction de  $p$  à  $\omega$  soit injective. On peut alors noter pour tout  $u \in p(\omega)$ ,  $(u, \beta_u(\omega), \gamma_u(\omega), \xi_u(\omega))$  l'unique élément de  $\omega$  dont la projection est  $u$ .

On dit que  $\omega$  est un arbre si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) Si  $\emptyset \in p(\omega)$ ,  $\beta_\emptyset(\omega) = 0$  et  $\xi_\emptyset(\omega) = 1$ .
- (ii)  $\forall u \in \mathcal{U}^0, \forall j \in \mathbb{N}^*, u_j \in p(\omega) \implies u \in p(\omega)$ .
- (iii)  $\forall u \in p(\omega), \exists \nu_u(\omega) \in \overline{\mathbb{N}}, \forall j \in \mathbb{N}^*, u_j \in p(\omega) \iff j \leq \nu_u(\omega)$ .
- (iv)  $\forall u \in p(\omega), \forall j \leq \nu_u(\omega), \beta_{u_j}(\omega) + \gamma_{u_j}(\omega) \leq \gamma_u(\omega)$ .
- (v)  $\forall u \in p(\omega), \forall j, j' \leq \nu_u(\omega), j \leq j' \implies \begin{cases} \beta_{u_j}(\omega) \leq \beta_{u_{j'}}(\omega) & \text{si } \gamma_{u_j}(\omega) = \gamma_{u_{j'}}(\omega) \\ \gamma_{u_j}(\omega) > \gamma_{u_{j'}}(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$

On note  $\Omega$  l'ensemble de tous les arbres.

Les conditions (i), (ii) et (iii) sont proches de celles introduites par Neveu ([N1]) sauf qu'ici, le nombre  $\nu_u$  peut-être infini (une branche peut avoir une infinité de fils). Notons aussi que nous n'excluons pas le cas où  $\omega$  est l'arbre vide. En dehors de ce cas, la condition (ii) entraîne que  $\emptyset \in p(\omega)$ . La condition (iv) signifie que chaque individu meurt avant son père. Il s'agit d'une condition importante pour le type d'arbre que nous voulons considérer. Enfin, la condition (v) signifie que les branches issues du même père sont rangées par ordre décroissant de hauteurs. Cette dernière condition simplifiera certaines constructions, notamment la définition de l'opérateur d'effacement.

Si  $u = u_1 \dots u_p \in p(\omega)$ , on note  $\tilde{\beta}_u(\omega) = \sum_{i=1}^p \beta_{u_1 \dots u_i}(\omega)$  qui représente l'instant de naissance de  $u$  dans la vie de l'ancêtre commun  $\emptyset$ .

Notons  $\Omega_{(n)}$  l'ensemble des arbres n'ayant que des branches de génération inférieure à  $n$  :

$$\Omega_{(n)} = \{\omega \in \Omega, \forall u \in p(\omega), |u| \leq n\}.$$

Nous pouvons alors définir la projection  $\Pi_n$  de  $\Omega$  dans  $\Omega_{(n)}$ :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \Pi_n(\omega) = \{(u, \beta, \gamma, \xi) \in \omega, |u| \leq n\}$$

qui correspond à la restriction de l'arbre  $\omega$  à la  $n^{\text{ième}}$  génération.

Pour tout  $u \in \mathcal{U}^0$ , notons  $\Omega_u$  l'ensemble des arbres qui contiennent le nœud  $u$ :

$$\forall u \in \mathcal{U}^0, \quad \Omega_u = \{\omega \in \Omega, u \in p(\omega)\}.$$

Alors, pour tout  $u \in \mathcal{U}^0$ , nous pouvons définir l'opérateur de translation  $T_u$  sur  $\Omega_u$  à valeurs dans  $\Omega$  par:

$$T_u(\omega) = \{(\emptyset, 0, \gamma_u(\omega), 1)\} \cup \{(v, \beta_{uv}(\omega), \gamma_{uv}(\omega), \xi_{uv}(\omega)), uv \in p(\omega), v \neq \emptyset\}.$$

$T_u(\omega)$  représente le sous-arbre de  $\omega$  issu du nœud  $u$ .

On généralise cet opérateur en posant, pour tout  $u \in \mathcal{U}^0$  et tout  $t > 0$ :

$$\Omega_{u,t} = \{\omega \in \Omega_u, \tilde{\beta}_u(\omega) \leq t < \tilde{\beta}_u(\omega) + \gamma_u(\omega)\}$$

puis

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \Omega_{u,t}, T_{u,t}(\omega) = & \left\{ \left( \emptyset, 0, \gamma_u(\omega) - (t - \tilde{\beta}_u(\omega)), 1 \right) \right\} \\ & \cup \left\{ \left( f_{u,t}(i), \beta_{ui}(\omega) - (t - \tilde{\beta}_u(\omega)), \gamma_{ui}(\omega), \xi_{ui}(\omega) \right), i \in \mathbb{N}^*, \right. \\ & \quad \left. i \leq \nu_u(\omega), \tilde{\beta}_{ui}(\omega) > t \right\} \\ & \cup \left\{ \left( f_{u,t}(v), \beta_{uv}(\omega), \gamma_{uv}(\omega), \xi_{uv}(\omega) \right), uv \in p(\omega), \tilde{\beta}_{uv_1}(\omega) > t, |v| \geq 2 \right\} \end{aligned}$$

où on a posé

$$\forall i \leq \nu_u(\omega) f_{u,t}(i) = \text{Card} \{j \leq i, \tilde{\beta}_{uj}(\omega) > t\}$$

et

$$\forall v = v_1 \dots v_n \in p(\omega), f_{u,t}(v) = f_{u,t}(v_1)v_2 \dots v_n.$$

Cette fonction permet de renuméroter l'arbre en oubliant les branches situées en-dessous du niveau  $t$ .

L'opérateur  $T_{u,t}$  est alors bien défini sur  $\Omega_{u,t}$  et représente le sous-arbre de  $\omega$  issu de la branche  $u$  au niveau  $t$ . Nous avons alors:

$$\forall u \in \mathcal{U}^0, \forall \omega \in \Omega_u, T_u(\omega) = T_{u, \tilde{\beta}_u(\omega)}(\omega).$$

Enfin, nous munissons  $\Omega$  de la tribu  $\mathcal{F}$  engendrée par les  $(\Omega_u, u \in \mathcal{U}^0)$  et les applications  $\beta_u, \gamma_u, \xi_u; u \in \mathcal{U}^0$ .

## 2/ Distance entre deux arbres, arbres réguliers.

Soient  $\omega, \omega' \in \Omega$ . Posons

$$\Pi(\omega, \omega') = \{u \in p(\omega) \cap p(\omega'); \xi_u(\omega) = \xi_u(\omega')\}$$

puis

$$\begin{aligned} \gamma^1(\omega, \omega') &= \sup_{u \in \Pi(\omega, \omega')} |\gamma_u(\omega) - \gamma_u(\omega')| \\ \gamma^2(\omega, \omega') &= \sup_{u \in p(\omega) - \Pi(\omega, \omega')} |\gamma_u(\omega)| \\ \gamma^3(\omega, \omega') &= \sup_{u \in p(\omega') - \Pi(\omega, \omega')} |\gamma_u(\omega')| \\ \beta^1(\omega, \omega') &= \sup_{u \in \Pi(\omega, \omega')} |\beta_u(\omega) - \beta_u(\omega')| \end{aligned}$$

et enfin

$$d(\omega, \omega') = \sup (\gamma^1(\omega, \omega'), \gamma^2(\omega, \omega'), \gamma^3(\omega, \omega'), \beta^1(\omega, \omega')).$$

On vérifie que  $d$  est une distance sur  $\Omega$ .

Soit  $\Omega^f$  l'ensemble des arbres finis. On note  $\Omega^f$  l'adhérence de  $\Omega^f$  dans  $\Omega$ . Observons que  $(\Omega^f, d)$  est métrique séparable puisque  $\Omega^f$  est clairement séparable.

Introduisons l'opérateur d'effacement. Soit  $h > 0$  et  $\omega \in \Omega$  tel que  $H(\omega) = \gamma_\emptyset(\omega) > h$ . On définit

$$E_h(\omega) = \{(u, \beta_u(\omega), \gamma_u(\omega) - h, \xi_u(\omega)), u \in p(\omega), \gamma_u(\omega) > h\}.$$

Il est clair que  $E_h(\omega)$  est un arbre. L'application  $\omega \rightarrow E_h(\omega)$  (définie sur  $\{\omega, H(\omega) > h\}$ ) est continue et de plus  $d(E_h(\omega), \omega) = h$  donc en particulier

$$\lim_{h \rightarrow 0} d(E_h(\omega), \omega) = 0.$$

Enfin,  $\omega \in \Omega^f$  si et seulement si, pour tout  $h > 0$ ,  $E_h(\omega) \in \Omega^f$ . En effet, on vérifie aisément que si  $\omega'$  est un arbre fini tel que  $d(\omega, \omega') < h$ , on a  $p(E_h(\omega)) \subset p(\omega')$ .

On dit que l'arbre  $\omega \in \Omega^l$  est régulier si

- (i) pour tout  $u \in p(\omega)$ ,  $u \neq \emptyset$ ,  $\begin{cases} \beta_u(\omega) > 0 \\ \beta_u(\omega) + \gamma_u(\omega) < \gamma_{\bar{u}}(\omega) \end{cases}$ ,  
où  $\bar{u}$  désigne le père de  $u$ ;
- (ii) pour tout  $u \in p(\omega)$ , les nombres  $\beta_{u_j}(\omega)$ ,  $j \leq \nu_u(\omega)$  sont distincts.

On note  $\Omega^r$  l'ensemble des arbres réguliers;  $\Omega^r$  est un sous-ensemble mesurable (non fermé) de  $\Omega^l$ . Les arbres aléatoires infinis que nous considérerons seront toujours, avec probabilité un, des arbres réguliers. On pose

$$\Omega^{rf} = \Omega^r \cap \Omega^f.$$

Observons que, si  $\omega \in \Omega^r$  et  $h < H(\omega)$ ,  $E_h(\omega) \in \Omega^{rf}$ .

Nous verrons dans le paragraphe suivant qu'on peut établir une correspondance bijective entre les arbres de  $\Omega^{rf}$  et les arbres binaires du type usuel.

### 3/ Relations avec les arbres binaires.

Introduisons brièvement un cas particulier du formalisme développé dans Neveu [N1] : l'ensemble des nœuds, respectivement des nœuds marqués est :

$$\mathcal{V}^0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1, 2\}^n, \quad \mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{1, 2\}^n \times \mathbb{R}_+^*),$$

avec la convention  $\{1, 2\}^0 = \emptyset$ .

Un élément générique de  $\mathcal{V}$  est noté  $(v, \eta)$  où  $v \in \mathcal{V}^0$ ,  $\eta$  représente la longueur de la branche. On notera  $p'(v, \eta) = v$ . Un arbre  $\Lambda$  dans ce formalisme sera un sous-ensemble fini de  $\mathcal{V}$  vérifiant :

- (i)' La restriction de  $p'$  à  $\Lambda$  est injective. Nous notons alors  $\Lambda = \{(v, \eta_v(\Lambda)), v \in p'(\Lambda)\}$ .
- (ii)'  $\forall v \in \mathcal{V}^0, \forall j \in \{1, 2\}, vj \in p'(\Lambda) \implies v \in p'(\Lambda)$ .
- (iii)'  $\forall v \in p'(\Lambda)$ , ou bien  $v1 \in p'(\Lambda)$  et  $v2 \in p'(\Lambda)$ , ou bien  $v1 \notin p'(\Lambda)$  et  $v2 \notin p'(\Lambda)$ .

Remarquons encore que si  $\Lambda \neq \emptyset$ , alors  $\emptyset \in p'(\Lambda)$  d'après (ii)'. Nous notons, pour tout  $u \in p'(\Lambda)$ ,

$$\begin{aligned} S_u(\Lambda) &= \sum_{\substack{v \prec u \\ v \neq u}} \eta_v(\Lambda) \\ S'_u(\Lambda) &= \sum_{v \prec u} \eta_v(\Lambda) = S_u(\Lambda) + \eta_u(\Lambda) \\ H(\Lambda) &= \sup_{u \in p'(\Lambda)} S'_u(\Lambda) \\ \tau_u(\Lambda) &\text{ le sous-arbre issu du nœud } u. \end{aligned}$$

Nous notons  $\mathcal{A}$  l'espace des arbres dans ce formalisme.  $\mathcal{A}$  est muni d'une distance  $d'$  définie de façon analogue à  $d$  :

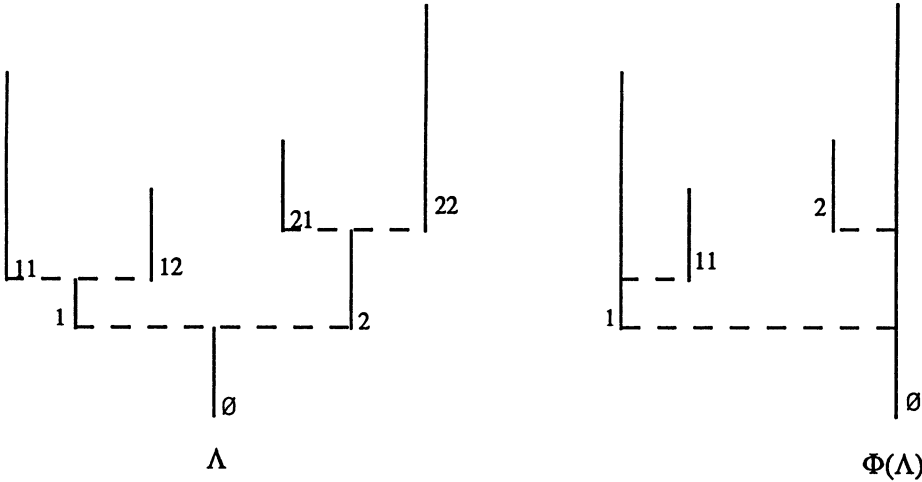
$$d'(\Lambda, \Lambda') = \sup \left( \sup_{v \in p'(\Lambda) \cap p'(\Lambda')} |\eta_v(\Lambda) - \eta_v(\Lambda')|, \sup_{v \in p'(\Lambda) - p'(\Lambda')} |\eta_v(\Lambda)|, \sup_{v \in p'(\Lambda') - p'(\Lambda)} |\eta_v(\Lambda')| \right).$$

L'arbre  $\Lambda$  est dit régulier si

$$\forall u \in p'(\Lambda), \text{ si } u1, u2 \in p'(\Lambda), \text{ on a } H(\tau_{u1}(\Lambda)) \neq H(\tau_{u2}(\Lambda))$$

autrement dit si les deux sous-arbres issus d'une même branche ont des hauteurs différentes. Soit  $\mathcal{A}^r$  l'ensemble des arbres réguliers dans ce formalisme.  $\mathcal{A}^r$  est un sous-ensemble mesurable de  $\mathcal{A}$ .

On peut alors définir une bijection bimesurable  $\Phi$  de  $\mathcal{A}^r$  sur  $\Omega^r$ , de la manière illustrée sur la figure.



Dans cet exemple, les branches  $\emptyset$ , 2, 22, qui sont les ascendants de la branche la plus haute de  $\Lambda$ , sont agglomérées pour donner la branche  $\emptyset$  de  $\Phi(\Lambda)$ . De même, les branches 11 et 1 sont agglomérées pour donner la branche 1 de  $\Phi(\Lambda)$ .

On peut définir  $\Phi$  et  $\Phi^{-1}$  de façon plus rigoureuse de la manière suivante:

a) Description de  $\Phi$ .

Nous allons décrire  $\Phi$  par récurrence sur le nombre de nœuds que contient l'arbre  $\Lambda$  que l'on considère.

Pour  $\text{Card } p'(\Lambda) = 1$ ,  $p'(\Lambda) = \{\emptyset\}$  et nous posons alors  $\Phi(\Lambda) = \{(\emptyset, 0, \eta_\emptyset(\Lambda), 1)\}$ .

Supposons que nous ayons construit  $\Phi$  pour n'importe quel arbre contenant moins de  $n$  nœuds et soit  $\Lambda$  un arbre contenant  $n + 1$  nœuds.

Soit  $u = u_1 \dots u_p$  le nœud de  $p'(\Lambda)$  pour lequel  $H(\Lambda)$  est atteint (ce nœud est unique grâce à la propriété de régularité de  $\Lambda$ ). On définit alors:

$$\nu_\emptyset(\Phi(\Lambda)) = p$$

$$\gamma_\emptyset(\Phi(\Lambda)) = H(\Lambda)$$

et on complète la description de  $\Phi(\Lambda)$  en donnant les sous-arbres  $T_k(\Phi(\Lambda))$  pour

$k = 1, \dots, p$ , les instants  $\beta_k$  et les marques  $\xi_k$  correspondants. On définit une bijection  $k \rightarrow j(k)$  de  $\{1, 2, \dots, p\}$  dans  $\{0, 1, \dots, p-1\}$  en imposant, pour tous  $k, k' \leq p$

$$k < k' \implies \begin{cases} H(\tau_{u_1 \dots u_{j(k)}} \bar{u}_{j(k)+1}(\Lambda)) = H(\tau_{u_1 \dots u_{j(k')}} \bar{u}_{j(k')+1}(\Lambda)) & \text{et } j(k) < j(k') \\ \text{ou} \\ H(\tau_{u_1 \dots u_{j(k)}} \bar{u}_{j(k)+1}(\Lambda)) > H(\tau_{u_1 \dots u_{j(k')}} \bar{u}_{j(k')+1}(\Lambda)) \end{cases}$$

où on note  $\bar{j} = 3 - j$ . La fonction  $j(k)$  permet de renuméroter les nœuds de  $\Phi(\Lambda)$  pour que la condition (v) soit vérifiée. Alors

$$\beta_k(\Phi(\Lambda)) = S'_{u_1 \dots u_{j(k)}}(\Lambda)$$

$$\xi_k(\Phi(\Lambda)) = \bar{u}_{j(k)+1}$$

$$T_k(\Phi(\Lambda)) = \Phi(\tau_{u_1 \dots u_{j(k)}} \bar{u}_{j(k)+1}(\Lambda))$$

bien défini d'après l'hypothèse de récurrence.

b) Description de  $\Phi^{-1}$ .

Nous allons décrire  $\Phi^{-1}$  par récurrence sur le nombre de nœuds que contient l'arbre  $\omega$ . Pour  $\text{Card } p(\omega) = 1$ , on pose

$$\Phi^{-1}(\omega) = \{(\emptyset, \gamma_\emptyset(\omega))\}.$$

Supposons que nous ayons construit  $\Phi^{-1}$  pour tout arbre contenant moins de  $n$  nœuds et soit  $\omega$  un arbre contenant  $n+1$  nœuds. Soit  $j \leq \nu_\emptyset(\omega)$  tel que  $\beta_j(\omega) = \inf_{i \leq \nu_\emptyset(\omega)} \beta_i(\omega)$  (ce  $j$  est unique grâce aux conditions de régularité). Alors on peut caractériser  $\Phi^{-1}(\omega)$  par

$$\begin{aligned}\eta_\emptyset(\Phi^{-1}(\omega)) &= \beta_j(\omega) \\ \tau_{\xi_j(\omega)}(\Phi^{-1}(\omega)) &= \Phi^{-1}(T_j(\omega)) \\ \tau_{\bar{\xi}_j(\omega)}(\Phi^{-1}(\omega)) &= \Phi^{-1}(T_{\emptyset, \beta_j(\omega)}(\omega))\end{aligned}$$

bien définis grâce à l'hypothèse de récurrence.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que  $\Phi$  et  $\Phi^{-1}$  sont inverses l'une de l'autre et mesurables. De plus, on voit assez facilement que  $\Phi$  est continue en tout arbre  $\Lambda$  tel que les hauteurs  $H(\tau_u(\Lambda))$ ,  $u \in p'(\Lambda)$  sont distinctes.

Pour tout  $h > 0$ , on note  $\Xi_h(d\Lambda)$  la probabilité sur  $\mathcal{A}$  (ou sur  $\mathcal{A}^r$ ) qui est la loi de l'arbre binaire critique à temps de vie exponentiels de moyenne  $h$ . On peut caractériser  $\Xi_h$  par les propriétés suivantes :

- (i)  $\emptyset \in p'(\Lambda)$ ,  $\Xi_h$  p.s., et  $\Xi_h(p'(\Lambda) = \{\emptyset\}) = \frac{1}{2}$ ,
- (ii)  $\eta_\emptyset(\Lambda)$  suit sous  $\Xi_h$  une loi exponentielle de moyenne  $h$ , et est indépendante de  $\{p'(\Lambda) = \{\emptyset\}\}$ ,
- (iii) conditionnellement à  $\{p'(\Lambda) \neq \{\emptyset\}\}$ , les deux arbres traduits  $\tau_1(\Lambda)$  et  $\tau_2(\Lambda)$  sont indépendants, de loi  $\Xi_h$ , et sont indépendants de  $\eta_\emptyset(\Lambda)$ .

Posons  $\Xi_h^1(d\Lambda) = \Xi_h(d\Lambda | H(\Lambda) = 1)$ . L'un de nos objectifs est d'étudier la convergence de  $\Xi_h^1$  quand  $h \rightarrow 0$ . Pour que cette convergence ait un sens, il est nécessaire de changer le formalisme d'arbre à l'aide de l'application  $\Phi$ . Nous verrons que, quand  $h$  tend vers 0, les probabilités  $\Phi(\Xi_h^1)$ , qui sont portées par  $\Omega^{rf}$ , convergent vers une loi  $W_1(d\omega)$  portée par  $\Omega^r$ , qui est la loi de l'arbre aléatoire défini dans le paragraphe suivant.

## II L'ARBRE ALEATOIRE.

Nous allons construire maintenant un arbre aléatoire infini  $X_H$  ou plus précisément une probabilité  $W_H(d\omega)$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  qui ne chargera qu'une certaine classe d'arbres. On fixe un réel  $H > 0$  et on se donne pour tout  $u \in \mathcal{U}^0$  une mesure de Poisson  $N^u(d\beta \, d\gamma \, d\xi)$  sur  $]0, \infty[^2 \times \{1, 2\}$  d'intensité

$$\mu(d\beta \, d\gamma \, d\xi) = d\beta \frac{d\gamma}{\gamma^2} (\delta_1(d\xi) + \delta_2(d\xi)).$$

On suppose que les mesures de Poisson  $(N^u, u \in \mathcal{U}^0)$  sont indépendantes.

On définit alors un arbre  $X_H$  par récurrence, génération par génération. On pose d'abord :

$$\Pi_0(X_H) = \{(\emptyset, 0, H, 1)\}.$$



Supposons que l'on ait défini  $\Pi_n(X_H)$ .

Alors, pour tout  $u \in p(\Pi_n(X_H))$ , on peut écrire p.s.

$$\mathbb{I}_{\beta+\gamma \leq \gamma_u}(\Pi_n(X_H)) N^u(d\beta \, d\gamma \, d\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(\beta_i^u, \gamma_i^u, \xi_i^u)}$$

de façon que  $\gamma_1^u > \gamma_2^u > \dots > \gamma_k^u > \dots$

On pose alors

$$\Pi_{n+1}(X_H) = \Pi_n(X_H) \cup \{(ui, \beta_i^u, \gamma_i^u, \xi_i^u), u \in \Pi_n(X_H), |u| = n, i \in \mathbb{N}^*\}$$

puis

$$X_H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Pi_n(X_H).$$

La loi de l'arbre  $X_H$  est notée  $W_H(dw)$ . C'est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ , dont nous verrons qu'elle est portée par  $\Omega^r$ . Ce dernier résultat sera clair lorsque nous aurons vérifié que pour tout  $h > 0$ , l'arbre  $E_h(X_H)$  est p.s. fini. Remarquons que par construction,

$$p(X_H) = \mathcal{U}^0 \quad \text{p.s.}$$

Remarque: si pour tout  $\lambda > 0$ , on pose  $f_\lambda(\omega) = \{(u, \lambda\beta_u(\omega), \lambda\gamma_u(\omega), \xi_u(\omega)); u \in p(\omega)\}$ , nous avons

$$f_\lambda(W_H) = W_{\lambda H}$$

(un arbre de hauteur  $\lambda H$  suit la loi d'un arbre de hauteur  $H$  dilaté par un facteur  $\lambda$ ). Cette propriété découle facilement de la forme de la mesure  $\mu$ .

A partir de cet arbre, on peut définir un processus  $(X_t, t \in [0, H])$  à valeurs dans  $\Omega^f$ :  $X_0$  est l'arbre vide et

$$\forall t \in [0, H[ \quad X_t = E_{H-t}(X_H).$$

Les propriétés de l'opérateur d'effacement entraîne que  $(X_t)_{t \in [0, H]}$  possède la propriété de Markov (à  $t$  fixé,  $X_t$  contient autant d'informations que  $(X_s, s \leq t)$ ). On peut donner une caractérisation markovienne de  $(X_t)$  en décrivant l'action de son générateur infinitésimal étendu sur une classe convenable de fonctions. On se restreint à des fonctions de la forme

$$\Phi(\omega) = \prod_{u \in p(\omega)} \varphi_u(\beta_u(\omega), \gamma_u(\omega), \xi_u(\omega))$$

où les fonctions  $\varphi_u$  sont de classe  $C^1$ , bornées sur  $(\mathbb{R}_+)^3$ , toutes égales à 1 sauf un nombre fini d'entre-elles, et telles que  $\varphi_\emptyset(0, 0, 1) = 1$ .

Alors, si pour tout  $s \in [0, H]$ , on définit l'opérateur  $G_s$  par :

$$\begin{aligned} G_s \Phi(\omega) = & \sum_{u \in p(\omega)} \frac{\partial \varphi_u}{\partial \gamma}(\beta_u(\omega), \gamma_u(\omega), \xi_u(\omega)) \frac{\Phi(\omega)}{\varphi_u(\beta_u(\omega), \gamma_u(\omega), \xi_u(\omega))} \\ & + \frac{1}{(H-s)^2} \sum_{u \in p(\omega)} \int_0^{\gamma_u(\omega)} dy (\varphi_{\tilde{u}(\omega)}(y, 0, 1) + \varphi_{\tilde{u}(\omega)}(y, 0, 2) - 2) \Phi(\omega) \end{aligned}$$

où  $\tilde{u}(\omega)$  est le premier descendant de  $u$  qui ne soit pas dans  $p(\omega)$ , le processus

$$\Phi(X_t) - \int_0^t G_s \Phi(X_s) ds$$

est une martingale sur l'intervalle de temps  $[0, H[$ .

La forme du générateur s'interprète comme suit : sur l'intervalle  $[s, s + ds]$ , on allonge toutes les branches d'une longueur  $ds$ , et avec probabilité

$$\frac{2}{(H-s)^2} \gamma_u(X_s) ds,$$

on crée sur la branche  $u$  une nouvelle branche de longueur 0 et d'instant de naissance  $\beta$  uniformément réparti sur  $[0, \gamma_u(X_s)]$ , le côté de branchement étant équiprobable.

Cette caractérisation markovienne constitue sans doute la description la plus intuitive de l'arbre  $X_H$ . Comme nous ne l'utiliserons pas par la suite, nous en laisserons la vérification au lecteur.

### III PROPRIETES DE L'ARBRE.

Il s'agit maintenant d'étudier les propriétés de la loi de l'arbre aléatoire infini et en particulier de relier cet arbre aux arbres binaires standards introduits à la fin de la partie 1. C'est l'objet du théorème 3.1. Ensuite, nous en déduirons diverses propriétés de l'arbre infini. Tout ce qui va suivre repose en fait sur le théorème suivant :

**Théorème 3.1:** pour tout  $h < H$ ,  $E_h(W_H)$  est portée par l'ensemble des arbres finis, et on a l'égalité:

$$h \int_h^\infty \frac{dH}{H^2} \Phi^{-1}(E_h(W_H))(d\Lambda) = \Xi_{\frac{h}{2}}(d\Lambda).$$

Remarque:  $E_h(W_H)$  est la loi de l'arbre effacé  $E_h(X_H) = X_{H-h}$ . L'égalité du théorème s'interprète en disant que l'arbre  $\Phi^{-1}(X_{H-h})$ , qui est p.s. fini, est un arbre binaire standard de paramètre  $\frac{h}{2}$  conditionné à avoir pour hauteur  $H-h$ .

Comme conséquence du théorème, on retrouve aussi le fait que la loi de  $H(\Lambda)$  sous  $\Xi_{\frac{h}{2}}(d\Lambda)$  a pour densité

$$\mathbb{1}_{H>0} \frac{h}{(H+h)^2}.$$

*Démonstration:* par construction,

$$\{j \in \mathbb{N}^*, \gamma_j(\omega) > h\}$$

est fini p.s. sous  $W_H(d\omega)$ . Ceci permet de définir :

$$T(\omega) = \begin{cases} \inf\{\beta_j(\omega); \gamma_j(\omega) > h\} > 0 & \text{si } \{j, \gamma_j(\omega) > h\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'instant  $T(\omega)$  est le premier point de branchement sur le "tronc" de  $\omega$  d'une branche de hauteur plus grande que  $h$ . Cette branche est notée  $j(\omega)$ .

**Lemme 3.2:** sous la probabilité  $Q_h(dw) = h \int_h^\infty \frac{dH}{H^2} W_H(dw)$ , on a:

$$Q_h[T(\omega) = +\infty] = \frac{1}{2}.$$

De plus,

-conditionnellement à  $\{T(\omega) = +\infty\}$ ,  $\gamma_\emptyset(\omega) - h$  suit une loi exponentielle de moyenne  $\frac{h}{2}$   
 -conditionnellement à  $\{T(\omega) < +\infty\}$ , les variables  $\xi_{j(\omega)}(\omega)$  et  $T(\omega)$  sont indépendantes,

$$P[\xi_{j(\omega)}(\omega) = 1] = P[\xi_{j(\omega)}(\omega) = 2] = \frac{1}{2},$$

$T(\omega)$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\frac{h}{2}$ , enfin, le couple d'arbres

$$(T_{\emptyset, T(\omega)}(\omega), T_{j(\omega)}(\omega))$$

suit la loi  $Q_h(dw_1) \otimes Q_h(dw_2)$  conditionnée par  $\{H(\omega_1) > H(\omega_2)\}$ , et est indépendant de  $(T(\omega), \xi_{j(\omega)}(\omega))$ .

Il est facile de déduire du lemme que l'arbre  $E_h(\omega)$  est fini p.s. sous  $Q_h(dw)$ . En effet, on a  $\text{Card } E_h(\omega) = 1$  si  $T(\omega) = +\infty$ . D'autre part, conditionnellement à  $\{T(\omega) < \infty\}$ ,

$$\text{Card } E_h(\omega) = \text{Card } T_{\emptyset, T(\omega)}(\omega) + \text{Card } T_{j(\omega)}(\omega)$$

de sorte que  $\text{Card } E_h(\omega)$  a pour loi conditionnelle la loi de la somme de deux variables indépendantes, qui suivent chacune la loi (non conditionnée) de  $\text{Card } E_h(\omega)$  sous  $Q_h(dw)$ . Il est facile d'en déduire que la fonction génératrice  $\varphi(\lambda)$  de  $\text{Card } E_h(\omega)$  vérifie:

$$\varphi(\lambda) = \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\varphi(\lambda)^2$$

d'où

$$\varphi(\lambda) = 1 - \sqrt{1 - \lambda}$$

et en particulier  $\text{Card } E_h(\omega) < \infty$  p.s.

De plus, le résultat du lemme entraîne que sous  $Q_h(dw)$ , l'arbre  $\Phi^{-1}(E_h(\omega))$  possède toutes les propriétés caractéristiques de l'arbre binaire standard de paramètre  $\frac{h}{2}$ . Le résultat du théorème découle donc du lemme.

**Démonstration du lemme:** nous commençons par calculer, pour  $H > 0$  fixé et pour  $r \in [0, H-h]$ ,  $W_H(T(\omega) > r)$ . L'évènement  $\{T(\omega) > r\}$  coïncide avec l'évènement  $\{\text{il n'y a pas de branche sur la branche } \emptyset \text{ de hauteur supérieure à } h \text{ entre } 0 \text{ et } r\}$  et donc,

$$W_H(T(\omega) > r) = e^{-\mu(A)}$$

où  $A = \{(\beta, \gamma, \xi) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \{1, 2\}, \beta + \gamma \leq H, \gamma \geq h, \beta \leq r\}$ .

Donc,

$$\begin{aligned} W_H(T(\omega) > r) &= \exp - \int \mu(d\beta \, d\gamma \, d\xi) \mathbb{I}_{(\beta \leq r)} \mathbb{I}_{(\gamma \geq h)} \mathbb{I}_{(\beta + \gamma < H)} \\ &= \left( \frac{H}{H-r} \right)^2 \exp - 2\frac{r}{h}. \end{aligned}$$

En particulier, en prenant  $r = H - h$ , on trouve

$$W_H(T(\omega) = +\infty) = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \exp 2 \left(1 - \frac{H}{h}\right)$$

d'où

$$Q_h(T(\omega) = +\infty) = h \int_h^\infty \frac{dH}{H^2} W_H(T(\omega) = +\infty) = \frac{1}{2}.$$

De plus, pour  $x > h$ ,

$$Q_h(H(\omega) > x, T(\omega) = +\infty) = h \int_x^{+\infty} \frac{dH}{H^2} W_H(T(\omega) = +\infty) = \frac{1}{2} \exp -2 \frac{x}{h}$$

ce qui montre que conditionnellement à  $\{T(\omega) = \infty\}$ ,  $H(\omega)$  suit sous  $Q_h$  une loi exponentielle de moyenne  $\frac{h}{2}$ , d'où la première partie du lemme.

Pour la seconde partie, on commence par déterminer la loi du couple  $(T(\omega), H(\omega) - T(\omega))$  sous  $Q_h$ : pour  $r > 0$  et  $x > h$ ,

$$\begin{aligned} Q_h(H(\omega) - T(\omega) > x, T(\omega) > r) &= \int_{x+r}^\infty h \frac{dH}{H^2} W_H(r < T(\omega) < H - x) \\ &= \int_{x+r}^\infty h \frac{dH}{H^2} \left( \left(\frac{H}{H-r}\right)^2 \exp\left(-2\frac{r}{h}\right) - \left(\frac{H}{x}\right)^2 \exp\left(-2\frac{H-x}{h}\right) \right) \\ &= \left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2}\right) \exp -\frac{2r}{h}. \end{aligned}$$

Cette formule entraîne que, sous  $Q_h$  conditionnellement à  $\{T(\omega) < +\infty\}$ ,  $T(\omega)$  et  $H(\omega) - T(\omega)$  sont indépendantes,  $T(\omega)$  suit une loi exponentielle de moyenne  $\frac{h}{2}$  et  $H(\omega) - T(\omega)$  a pour loi

$$Q_h(H(\omega) - T(\omega) > x | T(\omega) < \infty) = \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2}$$

pour  $x \geq h$ .

D'autre part, les propriétés des mesures de Poisson montrent que, conditionnellement à  $(H, T)$ , la loi de  $\gamma_{j(\omega)}(\omega)$  est la mesure

$$\mathbb{I}_{(h < \gamma < H-T)} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{H-T} \right)^{-1} \frac{d\gamma}{\gamma^2}.$$

Il découle de ces remarques que la loi du triplet  $(T(\omega), H(\omega) - T(\omega), \gamma_{j(\omega)}(\omega))$  conditionnellement à  $T < \infty$  est caractérisée par:

- $T(\omega)$  suit une loi exponentielle de moyenne  $\frac{h}{2}$ ;
- le couple  $(H(\omega) - T(\omega), \gamma_{j(\omega)}(\omega))$  est indépendant de  $T(\omega)$  et a pour loi la loi de  $(\sup(U_1, U_2), \inf(U_1, U_2))$  où  $U_1$  et  $U_2$  sont indépendantes de loi

$$\mathbb{I}_{\gamma > h} h \frac{d\gamma}{\gamma^2}.$$

Pour compléter la preuve du lemme, on observe que grâce à notre construction et aux propriétés des mesures de Poisson, le couple des arbres translatés  $(T_{\emptyset, T(\omega)}(\omega), T_{j(\omega)}(\omega))$  est, conditionnellement à

$$\{H(\omega) - T(\omega) = H_1, \gamma_{j(\omega)}(\omega) = H_2\}$$

indépendant de  $(T(\omega), \xi_{j(\omega)}(\omega))$ , et de loi conditionnelle  $W_{H_1} \otimes W_{H_2}$ .  $\square$

Pour tout  $H > 0$ , notons  $\Xi_h^H(d\Lambda) = \Xi_h(d\Lambda | H(\Lambda) = H)$ . Remarquons que la famille  $(\Xi_h^H, H > 0)$  n'est a priori définie qu'à un ensemble de valeurs de  $H$  de mesure nulle près. En fait, on se convainc aisément qu'on peut choisir  $\Xi_h^H$  de façon que  $H \rightarrow \Xi_h^H$  soit continue (pour la topologie de la convergence étroite des mesures sur  $(\mathcal{A}, d')$ ) ce qui définit  $\Xi_h^H$  sans ambiguïté pour tous  $H, h$ .

**Corollaire 3.3:** on a

$$\Phi(\Xi_h^H) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{(e)} W_H.$$

*Démonstration :* on peut réécrire l'énoncé du théorème 3.1 sous la forme

$$h \int_0^\infty \frac{dH}{(H+h)^2} \Phi^{-1}(E_h(W_{H+h})) = \Xi_{\frac{h}{2}} = h \int_0^\infty \frac{dH}{(H+h)^2} \Xi_{\frac{h}{2}}^H$$

il en découle que,  $dH$  p.p.,

$$\Phi^{-1}(E_h(W_{H+h})) = \Xi_{\frac{h}{2}}^H$$

ou encore

$$E_h(W_{H+h}) = \Phi(\Xi_{\frac{h}{2}}^H) \quad dH - p.p.$$

Grâce aux propriétés de continuité de  $\Phi$  mentionnées ci-dessus, l'application  $H \rightarrow \Phi(\Xi_{\frac{h}{2}}^H)$  est continue. D'autre part, l'invariance des mesures  $W_H$  par changement d'échelle entraîne aussi que  $E_h(W_{H+h})$  dépend continument de  $H$ . On obtient ainsi, pour tous  $H > 0, h > 0$ ,

$$E_h(W_{H+h}) = \Phi(\Xi_{\frac{h}{2}}^H).$$

En utilisant à nouveau l'invariance par changement d'échelle de  $W_H$ , on obtient que

$$E_h(W_{H+h}) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} W_H$$

ce qui donne le résultat voulu.  $\square$

**Théorème 3.4:** Soient  $H > 0$  et  $a, b$  avec  $0 < a < b < H$ . Pour tout  $\omega \in \Omega$ , notons

$$\begin{aligned} U_{a,b}(\omega) &= \{u \in p(\omega), \tilde{\beta}_u(\omega) < a < b < \tilde{\beta}_u(\omega) + \gamma_u(\omega)\} \\ N_{a,b}(\omega) &= \text{Card } U_{a,b}(\omega). \end{aligned}$$

Sous  $W_H(d\omega)$ , l'arbre  $T_{\emptyset,a}(\omega)$  a pour loi  $W_{H-a}$  et est indépendant de

$$\{T_{u,a}(\omega), u \in U_{a,b}(\omega) - \{\emptyset\}\}.$$

De plus, conditionnellement à  $\{N_{a,b}(\omega) = n+1\}$ , la loi de la famille

$$\{T_{u,a}(\omega), u \in U_{a,b}(\omega) - \{\emptyset\}\}$$

est la loi de  $n$  arbres indépendants de même loi donnée par

$$Q_{b-a}^{H-a} = \left( \frac{1}{b-a} - \frac{1}{H-a} \right)^{-1} \int_{b-a}^{H-a} \frac{dx}{x^2} W_x.$$

Remarque: il est essentiel de ne pas introduire d'ordre parmi les arbres

$$\{T_{u,a}(\omega), u \in U_{a,b}(\omega) - \{\emptyset\}\}.$$

Quand nous parlons de la loi de cette famille, il s'agit d'une probabilité sur les sous-ensembles de cardinal  $n$  de  $\Omega$ , et non sur  $\Omega^n$ .

*Démonstration* : on va utiliser l'opérateur d'effacement et l'application  $\Phi^{-1}$  pour se ramener à une propriété des arbres binaires. Pour  $\Lambda \in \mathcal{A}$ , on pose:

$$\tilde{U}_{a,b}(\Lambda) = \{u \in p'(\Lambda), S_u(\Lambda) \leq a < S'_u(\Lambda), H(\tau_{u,a}(\Lambda)) > b - a\}.$$

Si  $\omega$  est un arbre de hauteur plus grande que  $b + h$ , on vérifie que

$$\left\{ \Phi^{-1}\left(T_{u,a}(E_h(\omega))\right), u \in U_{a,b}(E_h(\omega)) \right\} = \left\{ \tau_{v,a}\left(\Phi^{-1}(E_h(\omega))\right), v \in \tilde{U}_{a,b}\left(\Phi^{-1}(E_h(\omega))\right) \right\}.$$

D'après la propriété de branchement, sous la loi  $\Xi_{\frac{h}{2}}(d\Lambda)$  et conditionnellement à  $\{Card \tilde{U}_{a,b}(\Lambda) = n\}$ , la loi de

$$\{\tau_{v,a}(\Lambda), v \in \tilde{U}_{a,b}(\Lambda)\}$$

est la loi de  $n$  arbres binaires indépendants de loi

$$\Xi_{\frac{h}{2}}(\cdot | H > b - a) = (h + b - a) \int_{b-a}^{\infty} \frac{dH}{(H+h)^2} \Xi_{\frac{h}{2}}^H.$$

En utilisant le théorème 3.1, on trouve que sous la probabilité  $Q_{b+h}$ , la famille

$$\left\{ \Phi^{-1}\left(T_{u,a}(E_h(\omega))\right), u \in U_{a,b}(E_h(\omega)) \right\}$$

suit conditionnellement à  $\{N_{a,b}(E_h(\omega)) = n\}$  la loi de  $n$  arbres indépendants de loi

$$(h + b - a) \int_{b-a}^{\infty} \frac{dH}{(H+h)^2} \Xi_{\frac{h}{2}}^H.$$

En faisant tendre  $h$  vers 0 et en utilisant le corollaire 3.3, on obtient que sous  $Q_b(d\omega)$ , conditionnellement à  $\{N_{a,b}(\omega) = n\}$ ,

$$\{T_{u,a}(\omega), u \in U_{a,b}(\omega)\}$$

suit la loi de  $n$  arbres indépendants de loi

$$(b - a) \int_{b-a}^{\infty} \frac{dH}{H^2} W_H = Q_{b-a}.$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à conditionner par la hauteur, en observant que sous  $W_H(d\omega)$ ,

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H = a + H(T_{\emptyset,a}(\omega)) \\ &= a + \sup \{H(T_{u,a}(\omega)), u \in U_{a,b}(\omega)\}. \end{aligned}$$

La justification du conditionnement n'est pas difficile et est laissée au lecteur.  $\square$

**Corollaire 3.5:** Soit  $q_{a,b} = \frac{H-b}{H-a} \frac{a}{b}$ . Alors,  
 $W_H(N_{a,b}(\omega) = n+1) = (1 - q_{a,b})^2 (n+1) (q_{a,b})^n$

*Démonstration:* nous allons d'abord calculer la loi du couple  $(H(\omega), N_{a,b}(\omega))$  sous  $Q_b(d\omega)$ . Grâce au théorème 3.4, nous allons pouvoir calculer la loi de  $H(\omega)$  conditionnellement à  $N_{a,b}(\omega)$ . Pour  $\gamma > b$ ,

$$\begin{aligned} Q_b(H(\omega) \leq \gamma | N_{a,b}(\omega) = n+1) &= P\left(\sup_{1 \leq i \leq n+1} H(A_i) \leq \gamma - a\right) \\ &= P(H(A_1) \leq \gamma - a)^{n+1} \\ &= \left(1 - \frac{b-a}{\gamma-a}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

où les  $A_i$  sont  $n+1$  arbres binaires indépendants de loi  $\Xi_{\frac{b-a}{\gamma-a}}$ . De plus, nous connaissons la loi de  $N_{a,b}(\omega)$  sous  $Q_b(d\omega)$ . En effet,  $N_{a,b}(\omega)$  est le nombre de branches présentes au niveau  $a$  pour l'arbre  $\Phi^{-1}(E_{b-a}(\omega))$  qui est un arbre binaire standard de paramètre  $b-a$  sous la probabilité  $Q_{b-a}(d\omega)$ . De plus,  $Q_b(d\omega)$  coïncide avec  $Q_{b-a}(d\omega | H(\omega) > b)$ . Il en découle que la loi de  $N_{a,b}(\omega)$  sous  $Q_b(d\omega)$  est une loi géométrique de paramètre  $\frac{a}{b}$ :

$$Q_b(N_{a,b}(\omega) = n+1) = \left(1 - \frac{a}{b}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Finalement, nous obtenons

$$Q_b(H(\omega) \in d\gamma, N_{a,b}(\omega) = n+1) = (n+1) \left(1 - \frac{a}{b}\right) \frac{b-a}{(\gamma-a)^2} \left(1 - \frac{b-a}{\gamma-a}\right)^n \left(\frac{a}{b}\right)^n d\gamma.$$

Il suffit ensuite de conditionner par  $H$  pour obtenir le résultat :

$$\begin{aligned} W_H(N_{a,b}(\omega) = n+1) &= (n+1) \frac{H^2}{b} \left(1 - \frac{a}{b}\right) \frac{b-a}{(H-a)^2} \left(1 - \frac{b-a}{H-a}\right)^n \left(\frac{a}{b}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{a(H-b)}{b(H-a)}\right)^2 (n+1) \left(\frac{a(H-b)}{b(H-a)}\right)^{n+1} \quad \square \end{aligned}$$

## IV TEMPS LOCAL.

Nous nous proposons ici de construire un "temps local" sur l'arbre qui "compte" en un certain sens le nombre de branches à chaque niveau. Ce temps local sera utilisé dans la partie suivante pour reconstruire l'excursion brownienne à partir de  $X_H$ . Nous verrons alors que les notions de temps local brownien et de temps local sur l'arbre se correspondent.

Pour tous  $a, h$ , posons  $U_a^h = U_{a-h,a}$  et  $N_a^h = N_{a-h,a}$ .  $N_a^h(\omega)$  est le nombre de branches de  $E_h(\omega)$  coupant le niveau  $a-h$ , et  $U_a^h$  est l'ensemble des nœuds correspondants.

**Théorème 4.1:** Pour tout  $a \in ]0, H[$ , les variables aléatoires  $hN_a^h$  convergent quand  $h$  tend vers 0, dans  $L^p(W_H)$  pour tout  $p < \infty$ . On note  $L^a$  la limite ainsi obtenue.

Pour tout sous-intervalle compact  $I$  de  $]0, H[$  et tout entier  $p \geq 1$ , il existe une constante  $c_p(I)$  telle que

$$W_H(|L^{a+\varepsilon} - L^a|^{2p}) \leq c_p \varepsilon^{\frac{p}{2}}$$

dès que  $a, a + \varepsilon \in I$ . En particulier, le processus  $(L^a, a \in ]0, H[)$  a une version continue.

**Lemme 4.2:** on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in ]-1, 1[ \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n = \frac{x P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

où les polynômes  $P_k$  sont définis par récurrence par :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_{k+1}(x) = x(1-x)P'_k(x) + (k+2-x)P_k(x) \end{cases}$$

De plus, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} n^k (1-\varepsilon)^n \sim \frac{k}{\varepsilon^{k+1}} \quad \varepsilon \rightarrow 0$ .

*Démonstration:* Nous allons démontrer ce lemme par récurrence sur  $k$ .

Pour  $k = 0$ :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} = \frac{x P_0(x)}{1-x}.$$

La condition est bien vérifiée.

Supposons que nous avons le résultat pour  $k \in \mathbb{N}$ .

Alors,

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-1, 1[ \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{k+1} x^n &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \left( \frac{x P_k(x)}{(1-x)^{k+1}} \right) \\ &= x \frac{(1-x)P_k(x) + x(1-x)P'_k(x) - (k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}}. \end{aligned}$$

On obtient bien la formule de récurrence.

La dernière assertion découle de ce que  $P_k(1) = k$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 4.1:* dans toute la démonstration, nous supposons que  $\varepsilon$  est inférieur à 1. De plus, pour alléger la présentation, nous noterons toutes les constantes  $c_p$  bien qu'a priori elles soient distinctes.

Commençons par quelques calculs préliminaires :

Si nous posons, pour  $z > x + y$ , et  $y + x \leq t < z$ ,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= W_z(N_{y, y+x}) \\ g(x, y, z, t) &= Q_t^z(N_{y, y+x}) \\ &= \left( \frac{zt}{z-t} \int_t^z \frac{dH}{H^2} W_H \right) (N_{y, y+x}) \\ &= \frac{zt}{z-t} \int_t^z \frac{dH}{H^2} f(x, y, H). \end{aligned}$$



Nous avons, d'après le corollaire 3.5,

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= W_z(N_{y, y+x}) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) W_z(N_{y, y+x} = n+1) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-q)^2 (n+1)^2 q^n \quad \text{avec } q = \frac{z-y-x}{z-y} \frac{y}{x+y} \\
 &= 1 + 2y \frac{z-y-x}{xz}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 g(x, y, z, t) &= \frac{zt}{z-t} \int_t^z \left( 1 + 2y \frac{\gamma - y - x}{x\gamma} \right) \frac{d\gamma}{\gamma^2} \\
 &= 1 + \frac{2y}{x} - \frac{y}{x} (x+y) \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right).
 \end{aligned}$$

Estimons également  $W_H[(N_a^\varepsilon)^p]$  et  $W_H[(N_a^\varepsilon - 1)^{2p}]$ . En utilisant le lemme 4.2,

$$\begin{aligned}
 W_H[(N_a^\varepsilon)^p] &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^p W_H(N_a^\varepsilon = n+1) \\
 &\leq (1-q)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p+1} q^n \quad \text{avec } q = \frac{H-a}{H-a+\varepsilon} \frac{a-\varepsilon}{a} = 1 - \frac{H}{a(H-a)}\varepsilon + o(\varepsilon) \\
 &\sim \frac{p+1}{\left(\frac{H}{a(H-a)}\right)^p} \frac{1}{\varepsilon^p} \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0 \\
 &\leq c_p \varepsilon^{-p}.
 \end{aligned}$$

De même ,

$$\begin{aligned}
 W_H[(N_a^\varepsilon - 1)^{2p}] &\leq \sum_{n=0}^{\infty} n^{2p} (n+1) q^n \\
 &\sim \frac{2p+1}{\left(\frac{H}{a(H-a)}\right)^{2p}} \frac{1}{\varepsilon^{2p}} \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0 \\
 &\leq c_p \varepsilon^{-2p}.
 \end{aligned}$$

Nous passons maintenant à la preuve proprement dite.

1) Convergence dans  $L^p(W_H)$  de  $\varepsilon N_a^\varepsilon$ .

Soit  $h \in [\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon]$ .

D'après le théorème 3.4, nous avons

$$W_H \left[ \left| h N_a^h - \varepsilon N_a^\varepsilon \right|^{2p} \middle| N_a^\varepsilon \right] = W_H \left[ \left| \sum_{i=1}^{N_a^\varepsilon} (h N_i - \varepsilon) \right|^{2p} \middle| N_a^\varepsilon \right]$$

où les variables aléatoires  $N_i$  sont indépendantes et indépendantes de  $N_a^\varepsilon$ ,  $N_1$  suit la loi de  $N_{\varepsilon-h, \varepsilon}(\omega)$  sous  $W_{H-a+\varepsilon}(d\omega)$  et les autres  $N_i$  suivent la loi de  $N_{\varepsilon-h, \varepsilon}(\omega)$  sous  $Q_\varepsilon^{H-a+\varepsilon}(d\omega)$ .

Alors

$$\begin{aligned}
 W_H \left[ \left| hN_a^h - \varepsilon N_a^\varepsilon \right|^{2p} \middle| N_a^\varepsilon \right] &\leq W_H \left[ \left( \left| \sum_{i=1}^{N_a^\varepsilon} (hN_i - \varepsilon) \right| \right)^{2p} \middle| N_a^\varepsilon \right] \\
 &\leq c_p \left( W_H [|hN_1 - \varepsilon|^{2p}] + W_H \left[ \left( \left| \sum_{i=2}^{N_a^\varepsilon} (hN_i - \varepsilon) \right| \right)^{2p} \middle| N_a^\varepsilon \right] \right) \\
 &\leq c_p \left( W_H [|hN_1 - \varepsilon|^{2p}] + W_H \left[ \left( \left| \sum_{i=2}^{N_a^\varepsilon} h(N_i - W_H(N_i)) \right| \right)^{2p} \middle| N_a^\varepsilon \right] \right. \\
 &\quad \left. + (N_a^\varepsilon - 1)^{2p} |hW_H(N_2) - \varepsilon|^{2p} \right) \\
 &\leq c_p \left( W_H [|hN_1 - \varepsilon|^{2p}] + h^{2p} (N_a^\varepsilon)^p W_H [|N_2 - W_H(N_2)|^{2p}] \right. \\
 &\quad \left. + (N_a^\varepsilon - 1)^{2p} |hW_H(N_2) - \varepsilon|^{2p} \right).
 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est obtenue en utilisant l'inégalité:

$$\mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^n X_i \right|^{2p} \right] \leq c_p n^p \mathbb{E}[X_i^{2p}]$$

lorsque les  $X_i$  sont indépendantes, équidistribuées et centrées. En effet, lorsque l'on développe la puissance  $2p$  <sup>ième</sup>, les seuls termes non nuls sont les termes ne comportant que des puissances paires. Un argument combinatoire permet de majorer le nombre de ces termes par  $c_p n^p$ .

a) Estimation de  $W_H [|hN_1 - \varepsilon|^{2p}]$ . La connaissance de la loi de  $N_1$  (corollaire 3.5) donne facilement

$$W_H [|hN_1 - \varepsilon|^{2p}] \leq c_p \left( h^{2p} W_H [N_1^{2p}] + \varepsilon^{2p} \right) \leq c_p \varepsilon^{2p}.$$

b) Estimation de  $h^{2p} W_H [|N_2 - W_H(N_2)|^{2p}]$ . Des majorations analogues donnent

$$h^{2p} W_H [|N_2 - W_H(N_2)|^{2p}] \leq c_p h^{2p} \leq c_p \varepsilon^{2p}.$$

c) Estimation de  $hW_H [N_2] - \varepsilon$ . D'après les calculs préliminaires,

$$\begin{aligned}
 hW_H [N_2] - \varepsilon &= hg(h, \varepsilon - h, H - a + \varepsilon, \varepsilon) - \varepsilon \\
 &= -\frac{\varepsilon(\varepsilon - h)}{H - a + \varepsilon}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$|hW_H(N_2) - \varepsilon| \leq \frac{\varepsilon^2}{2(H - a)}$$

pour tout  $h \in [\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon]$ .

Nous obtenons en regroupant a) b) et c) et en prenant l'espérance:

$$\begin{aligned} W_H \left[ \left| hN_a^h - \varepsilon N_a^\varepsilon \right|^{2p} \right] &\leq c_p \left( c_p \varepsilon^{2p} + c_p \varepsilon^{2p} W_H \left[ (N_a^\varepsilon)^p \right] + c_p \varepsilon^{4p} W_H \left[ (N_a^\varepsilon - 1)^{2p} \right] \right) \\ &\leq c_p \varepsilon^p \end{aligned}$$

pour tout  $h \in [\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon]$ . Finalement, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \forall h \in ]0, \varepsilon[ \quad W_H \left[ \left| hN_a^h - \varepsilon N_a^\varepsilon \right|^{2p} \right] &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\varepsilon}{2^k} N_a^{\varepsilon 2^{-k}} - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} N_a^{\varepsilon 2^{-(k+1)}} \right|^{2p} \\ &\leq c_p \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon}{2^k} \right)^p \\ &\leq c_p \varepsilon^p \end{aligned}$$

d'où la convergence dans  $L^p(W_H)$ . De plus, nous obtenons à la limite l'inégalité:

$$W_H \left[ \left| L^a - \varepsilon N_a^\varepsilon \right|^{2p} \right] \leq c_p \varepsilon^p.$$

2) Nous allons maintenant démontrer la deuxième partie de théorème. Soient  $\delta \in ]0, \frac{1}{2}[$ ,  $a \leq H$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} W_H \left[ \left| L^{a+\varepsilon} - L^a \right|^{2p} \right] &= W_H \left[ \left| L^{a+\varepsilon} - \varepsilon^\delta N_{a+\varepsilon}^{\varepsilon^\delta} + \varepsilon^\delta N_{a+\varepsilon}^{\varepsilon^\delta} - \varepsilon^\delta N_a^{\varepsilon^\delta} + \varepsilon^\delta N_a^{\varepsilon^\delta} - L^a \right|^{2p} \right] \\ &\leq c_p \left( W_H \left[ \left| L^{a+\varepsilon} - \varepsilon^\delta N_{a+\varepsilon}^{\varepsilon^\delta} \right|^{2p} \right] \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{2\delta p} W_H \left[ \left| N_{a+\varepsilon}^{\varepsilon^\delta} - N_a^{\varepsilon^\delta} \right|^{2p} \right] + W_H \left[ \left| \varepsilon^\delta N_a^{\varepsilon^\delta} - L^a \right|^{2p} \right] \right). \end{aligned}$$

Nous savons déjà d'après la première partie que

$$\begin{aligned} W_H \left[ \left| L^a - \varepsilon^\delta N_a^{\varepsilon^\delta} \right|^{2p} \right] &\leq c_p \varepsilon^{\delta p} \\ W_H \left[ \left| L^{a+\varepsilon} - \varepsilon^\delta N_{a+\varepsilon}^{\varepsilon^\delta} \right|^{2p} \right] &\leq c_p \varepsilon^{\delta p} \end{aligned}$$

pourvu que  $a, a + \varepsilon^\delta$  varient dans un compact  $I$  de  $]0, H[$ .

Il reste à estimer  $W_H \left[ \left| N_{a+\varepsilon}^{\varepsilon^\delta} - N_a^{\varepsilon^\delta} \right|^{2p} \right]$ .

D'après le théorème 3.4, nous avons

$$W_H \left[ \left| N_{a+\varepsilon}^{\varepsilon^\delta} - N_a^{\varepsilon^\delta} \right|^{2p} \right] = W_H \left[ \left| \sum_{i=1}^{N_a^{\varepsilon^\delta}} (N_i - 1) \right|^{2p} \right]$$

où les variables aléatoires  $N_i$  sont indépendantes et indépendantes de  $N_a^{\varepsilon^\delta}$ ,  $N_1$  suit la loi de  $N_{\varepsilon, \varepsilon+\varepsilon^\delta}$  sous  $W_{H-a+\varepsilon^\delta}$  et les autres  $N_i$  suivent la loi de  $N_{\varepsilon, \varepsilon+\varepsilon^\delta}$  sous  $Q_{\varepsilon^\delta}^{H-a+\varepsilon^\delta}(d\omega)$ .

Alors,

$$\begin{aligned}
& W_H \left[ \left| N_{a+\varepsilon}^{\varepsilon^\delta} - N_a^{\varepsilon^\delta} \right|^{2p} \middle| N_a^{\varepsilon^\delta} \right] \\
& \leq c_p \left( W_H [(N_1 - 1)^{2p}] + W_H \left[ \left| \sum_{i=2}^{N_a^{\varepsilon^\delta}} (N_i - 1) \right|^{2p} \middle| N_a^{\varepsilon^\delta} \right] \right) \\
& \leq c_p \left( W_H [(N_1 - 1)^{2p}] + W_H \left[ \left| \sum_{i=2}^{N_a^{\varepsilon^\delta}} (N_i - W_H(N_i)) \right|^{2p} \middle| N_a^{\varepsilon^\delta} \right] \right. \\
& \quad \left. + (N_a^{\varepsilon^\delta} - 1)^{2p} (W_H(N_2) - 1)^{2p} \right) \\
& \leq c_p \left( W_H [(N_1 - 1)^{2p}] + c_p (N_a^{\varepsilon^\delta})^p W_H \left[ |N_2 - W_H(N_2)|^{2p} \right] \right. \\
& \quad \left. + (N_a^{\varepsilon^\delta} - 1)^{2p} |W_H(N_2) - 1|^{2p} \right).
\end{aligned}$$

en utilisant le même argument que précédemment pour la dernière majoration.

a) Estimation de  $W_H \left[ |N_1 - 1|^{2p} \right]$ . En utilisant le corollaire 3.5, on obtient facilement

$$W_H \left[ |N_1 - 1|^{2p} \right] \leq c_p.$$

b) Estimation de  $|W_H(N_2) - 1|^{2p}$ . Puisque  $Q_{\varepsilon^\delta + \varepsilon}^{H-a+\varepsilon^\delta}$  coïncide avec  $Q_{\varepsilon^\delta}^{H-a+\varepsilon^\delta} \left( \cdot \middle| H(\omega) \geq \varepsilon^\delta + \varepsilon \right)$ , on a d'après les estimations préliminaires,

$$\begin{aligned}
W_H(N_2) &= Q_{\varepsilon^\delta}^{H-a+\varepsilon^\delta} (N_2 \mathbb{I}_{N_2 \geq 1}) \\
&= Q_{\varepsilon^\delta}^{H-a+\varepsilon^\delta} (\varepsilon^\delta + \varepsilon < H(\omega)) g(\varepsilon^\delta, \varepsilon, H - a + \varepsilon^\delta, \varepsilon^\delta + \varepsilon) \\
&= \left( \frac{1}{\varepsilon + \varepsilon^\delta} - \frac{1}{H - a + \varepsilon^\delta} \right) \frac{\varepsilon^\delta (H - a + \varepsilon^\delta)}{H - a} \left( 1 + \varepsilon^{1-\delta} - \frac{\varepsilon^{1-\delta} (\varepsilon^\delta + \varepsilon)}{H - a + \varepsilon^\delta} \right) \\
&= (1 - \varepsilon^{1-\delta} + O(\varepsilon)) (1 + \varepsilon^{1-\delta} + O(\varepsilon)) \\
&= 1 + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$|W_H(N_2) - 1|^{2p} \leq c_p \varepsilon^{2p}.$$

c) Estimation de  $W_H [|N_2 - W_H(N_2)|^{2p}]$ . Toujours en utilisant le corollaire 3.5, on obtient

$$W_H [|N_2 - W_H(N_2)|^{2p}] \leq c_p.$$

En regroupant les estimations obtenues en a), b) et c), nous obtenons

$$W_H \left[ \left| N_{a+\varepsilon}^{\varepsilon^\delta} - N_a^{\varepsilon^\delta} \right|^{2p} \middle| N_a^{\varepsilon^\delta} \right] \leq c_p \left( 1 + (N_a^{\varepsilon^\delta})^p + (N_a^{\varepsilon^\delta} - 1)^{2p} \varepsilon^{2p} \right).$$

En prenant l'espérance de la dernière inégalité et compte tenu des estimations préliminaires, nous obtenons finalement

$$\varepsilon^{2\delta p} W_H \left[ \left| N_{a+\varepsilon}^{\varepsilon^{\delta}} - N_a^{\varepsilon^{\delta}} \right|^{2p} \right] \leq \varepsilon^{2\delta p} c_p \left( 1 + \varepsilon^{-\delta p} + \varepsilon^{2p(1-\delta)} \right) \leq c_p \varepsilon^{\delta p}.$$

En regroupant les dernières inégalités des parties 1 et 2 et en prenant  $\delta = \frac{1}{2}$ , nous obtenons l'inégalité du théorème 4.1.

La dernière assertion découle ensuite du lemme de Kolmogorov.  $\square$

On peut adapter la construction précédente pour construire un temps local sur chaque branche de l'arbre aléatoire. La construction récursive de  $X_H$  montre que pour chaque  $u \in \mathcal{U}$ , la loi conditionnelle de  $T_u(\omega)$  sous  $W_H(d\omega)$ , connaissant  $\gamma_u(\omega)$ , est  $W_{\gamma_u(\omega)}(\cdot)$ . Il en découle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{v; u \prec v} \mathbb{I}_{\{\tilde{\beta}_v(\omega) < a < a+h < \tilde{\beta}_v(\omega) + \gamma_v(\omega)\}}$$

existe en probabilité sur  $\{\tilde{\beta}_u(\omega) < a < \tilde{\beta}_u(\omega) + \gamma_u(\omega)\}$ . Si  $L_u^a(\omega)$  désigne cette limite, le processus (défini sur un intervalle aléatoire)

$$\left( L_u^a(\omega), \tilde{\beta}_u(\omega) < a < \tilde{\beta}_u(\omega) + \gamma_u(\omega) \right)$$

a une version continue.

## V LIENS AVEC LE MOUVEMENT BROWNIEN.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, l'arbre aléatoire construit ici est très lié au mouvement brownien et nous allons montrer dans ce chapitre que la donnée de l'arbre aléatoire de hauteur  $H$  est équivalente à celle d'une excursion brownienne de hauteur  $H$ .

### 1/ Construction de l'arbre à partir d'une excursion brownienne.

Soit  $f : [0, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}_+$  une excursion, c'est-à-dire une fonction continue telle que  $f(0) = f(\sigma) = 0$  et  $f(t) > 0$  pour tout  $t \in ]0, \sigma[$ . On suppose que tous les maxima locaux de  $f$  sont distincts. On peut alors associer à  $f$  un arbre  $X(f)$  construit de la manière suivante :

Si  $M(f) = \sup f(t)$ , on pose

$$\Pi_0(X(f)) = \{(\emptyset, 0, M(f), 1)\}.$$

Ensuite, soit  $\tau$  l'instant (unique) tel que  $f(\tau) = M(f)$  et soient

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(\tau - t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \tau \\ \psi(t) &= f(t + \tau) & \text{pour } 0 \leq t \leq \sigma - \tau \\ \overline{\varphi}(t) &= \min_{s \leq t} \varphi(s) \\ \overline{\psi}(t) &= \min_{s \leq t} \psi(s). \end{aligned}$$

Soient  $([\alpha_i, \alpha'_i])_{i \in I}$  les intervalles d'excursions de  $\varphi - \overline{\varphi}$  en dehors de 0 : ce sont les sous-intervalles (non réduits à un point) de  $[0, \tau]$  tels que  $\varphi(\alpha_i) = \overline{\varphi}(\alpha_i)$ ,  $\varphi(\alpha'_i) = \overline{\varphi}(\alpha'_i)$  et pour tout  $t \in ]\alpha_i, \alpha'_i[$ ,  $\varphi(t) > \overline{\varphi}(t)$ . On note  $(f_i)_{i \in I}$  les excursions correspondantes :

$$f_i(t) = \varphi(\alpha_i + t) - \varphi(\alpha_i), \quad 0 \leq t \leq \alpha'_i - \alpha_i.$$

On note enfin  $\lambda_i = \varphi(\alpha_i)$ .

On introduit de même les intervalles d'excursion  $([\alpha_j, \alpha'_j])_{j \in J}$  de  $\psi - \bar{\psi}$  en dehors de 0 et les excursions  $(f_j)_{j \in J}$  correspondantes. On note aussi  $\lambda_j = \psi(\alpha_j)$ .

Ici,  $I$  et  $J$  sont deux ensembles d'indices distincts, au plus dénombrables. Par une renumérotation convenable, on peut supposer que  $I \cup J$  est un intervalle de  $\mathbb{N}^*$  de la forme  $[1, \chi]$  (éventuellement,  $\chi = +\infty$ ) et que pour tous  $i, i' \in I \cup J$ ,

$$i < i' \implies \begin{cases} M(f_i) > M(f_{i'}) \\ M(f_i) = M(f_{i'}), \lambda_i < \lambda_{i'} \end{cases} \quad \text{ou}$$

(on utilise ici l'hypothèse sur les maxima locaux).

On pose

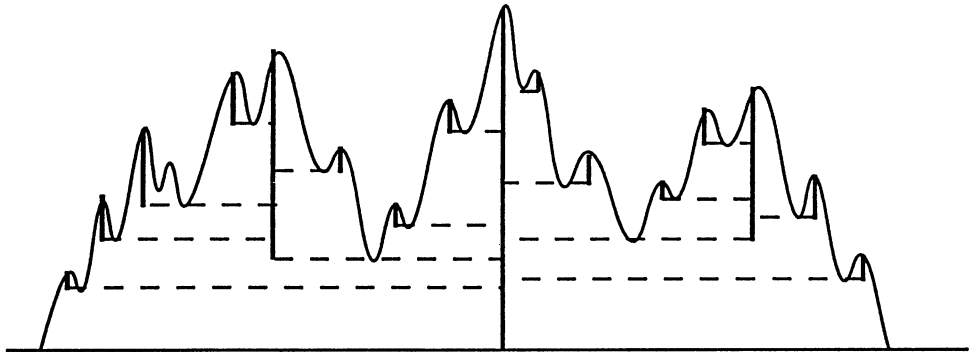
$$\Pi_1(X(f)) = \Pi_0(X(f)) \cup \{(i, \lambda_i, M(f_i), 1); i \in I\} \cup \{(j, \lambda_j, M(f_j), 2); j \in J\}.$$

On complète la définition de  $X(f)$  par récurrence à l'aide de la relation

$$\Pi_{n+1}(X(f)) = \Pi_1(X(f)) \cup \{(iu, \beta, \gamma, \xi), i \in I \cup J, |u| \geq 1, (u, \beta, \gamma, \xi) \in \Pi_n(X(f_i))\}.$$

On vérifie que  $X(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Pi_n(X(f))$  a les propriétés souhaitées.

La figure suivante montre comment on construit l'arbre à partir de l'excursion brownienne.



**Théorème 5.1:** Soit  $n_a(df)$  la mesure d'Itô des excursions du mouvement brownien réel, conditionnée par  $\{M(f) = a\}$ . Sous  $n_a(df)$ , l'arbre  $X(f)$  a pour loi  $W_a$ .

*Démonstration :* Le théorème est pour l'essentiel une conséquence de résultats classiques de théorie des excursions. En utilisant la décomposition de Williams de l'excursion brownienne en son maximum (voir [R]), on obtient que sous  $n_a(df)$ , les fonctions  $a - \varphi$  et  $a - \psi$  suivent la loi de deux processus de Bessel de dimension 3 indépendants issus de 0 et arrêtés en leur temps d'atteinte de  $a$ . Rappelons que, pour  $0 < \varepsilon < a$ , un processus de Bessel de dimension 3 issu de  $\varepsilon$  et arrêté au temps d'atteinte de  $a$  a même loi qu'un mouvement brownien issu de  $\varepsilon$  conditionné à atteindre  $a$  avant de passer par 0 (voir [PY]). Il en découle aisément que la mesure ponctuelle

$$\sum_{i \in I} \delta_{(\lambda_i, f_i)}$$

est sous  $n_a(df)$  une mesure de Poisson d'intensité

$$\mathbb{I}_{\{\lambda + M(e) < a\}} d\lambda \, n(de)$$

où  $n(de)$  est la mesure d'Itô des excursions positives. Le même résultat vaut pour la mesure ponctuelle

$$\sum_{j \in J} \delta_{(\lambda_j, j_j)}.$$

On en déduit aussitôt que  $\Pi_1(X(f))$  suit sous  $n_a(df)$  la loi de  $\Pi_1(\omega)$  sous  $W_a$ . On termine ensuite la preuve par récurrence sur le nombre de générations.  $\square$

## 2/ Reconstruction de l'excursion à partir de l'arbre aléatoire.

Dans ce paragraphe, nous expliquons brièvement comment on peut inversement reconstruire l'excursion  $f$  à partir de l'arbre  $X(f)$  en "montant et redescendant" le long des branches. Nous considérons une excursion brownienne  $f$  sous la loi  $n_a$  et  $X(f)$  l'arbre associé, comme précédemment. Nous allons déterminer, pour un instant  $t$  donné, la branche qui correspond à l'excursion de la première génération qui "enjambe" l'instant  $t$ , puis nous recommençons le procédé. En considérant le niveau de départ de chaque excursion, nous obtenons, à la limite, la valeur du mouvement brownien en  $t$ . Cette construction repose sur la notion de temps local définie dans la partie 4 et le fait que le temps local  $L^b(X(f))$  coïncide avec le temps local (usuel) de l'excursion  $f$  au niveau  $b$ . En effet, le nombre de branches de  $X(f)$  coupant les niveaux  $b - \varepsilon$  et  $b$  correspond au nombre de montées pour  $f$  du niveau  $b - \varepsilon$  au niveau  $b$  qui, renormalisé par  $\varepsilon$ , est une approximation classique du temps local brownien.

Pour tout  $u \in \mathcal{U}^0$ , posons

$$\sigma_u(X(f)) = \int_{\tilde{\beta}_u(X(f))}^{\tilde{\beta}_u(X(f)) + \gamma_u(X(f))} L_u^a(X(f)) da.$$

$\sigma_u$  représente la longueur de l'excursion associée à  $u$ .

Définissons ensuite par récurrence  $t_u$  :

$$t_\emptyset(X(f)) = 0$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$t_n(X(f)) = \begin{cases} \sum_{\substack{\beta_j(X(f)) \leq \beta_n(X(f)) \\ \xi_j(X(f))=1}} \sigma_j(X(f)) & \text{si } \xi_n(X(f)) = 1 \\ \left( \sum_{\xi_j(X(f))=1} \sigma_j(X(f)) \right) + \left( \sum_{\substack{\beta_j(X(f)) \geq \beta_n(X(f)) \\ \xi_j(X(f))=2}} \sigma_j(X(f)) \right) & \text{si } \xi_n(X(f)) = 2 \end{cases}$$

puis

$$\forall u \in X(f), |u| = n, \forall i \in \mathbb{N} \quad t_{ui}(X(f)) = t_u(X(f)) + t_i(T_u(X(f))).$$

$t_u$  représente l'instant du début de l'excursion associée à  $u$ .

On définit ensuite  $f^n(t)$  par récurrence:

si  $\sup\{t_i; t_i < t, i \in \mathbb{N}^*\}$  est atteint, on note  $u_t^1$  le nœud pour lequel le supremum est atteint, puis

$$f^1(t) = \tilde{\beta}_{u_t^1}(X(f)) (= f(t_{u_t^1})).$$

Sinon,

$$f^1(t) = \sup\{\tilde{\beta}_u, t_u < t, \xi_u = 1\} \wedge \inf\{\tilde{\beta}_u, t_u < t, \xi_u = 2\}$$

en posant  $\inf \emptyset = +\infty$ . Dans ce deuxième cas, à cause de la manière dont  $X(f)$  est construit, on voit aisément qu'on a déjà  $f^1(t) = f(t)$ .

Puis, par récurrence,

-si  $u_i^n$  est bien défini et si  $\sup\{t_{u_i^n}; t_{u_i^n} < t, i \in \mathbb{N}^*\}$  est atteint, on note  $u_i^{n+1}$  le nœud pour lequel il est atteint et

$$f^{n+1}(t) = \tilde{\beta}_{u_i^{n+1}} (= f(t_{u_i^{n+1}})).$$

-si  $u_i^n$  est bien défini et le supremum non atteint, on pose

$$f^{n+1}(t) = \sup\{\tilde{\beta}_{u_i^n}; t_{u_i^n} < t, \xi_{u_i^n} = 1\} \wedge \inf\{\tilde{\beta}_{u_i^n}; t_{u_i^n} < t, \xi_{u_i^n} = 2\}.$$

-si  $u_i^n$  n'est pas défini, on pose

$$f^{n+1}(t) = f^n(t).$$

$f^n(t)$  représente le niveau de départ de l'excursion de la  $n^{\text{ième}}$  génération enjambant  $t$ .

Finalement, nous obtenons, p.s. pour tout  $t \geq 0$ ,

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(t).$$

En effet, lorsque tous les  $u_i^n$  sont bien définis, la suite  $t_{u_i^n}$  converge en croissant vers  $t$ . Dans le cas contraire, la suite  $f^n(t)$  est stationnaire égale à  $f(t)$  à partir d'un certain rang. On a ainsi bien reconstruit l'excursion  $f$  en utilisant uniquement la donnée de  $X(f)$ .



## Références.

- [A1] D. Aldous : *The continuum random tree I*  
Ann. Probab. 19, 1-28 (1991).
- [A2] D. Aldous : *The continuum random tree II, III*  
A paraître.
- [LG1] J.F. Le Gall : *Brownian excursions, trees and measure-valued branching processes.*  
Ann. Probab. 19 (1991).
- [LG2] J.F. Le Gall : *Marches aléatoires, mouvement brownien et processus de branchement.*  
Séminaire de probabilités XXIII, Lecture Notes Math. 1372, Springer, Berlin (1989)
- [LJ] Y. Le Jan : *Superprocesses and projective limits of branching Markov process.*  
Ann. Inst. H. Poincaré 27, 91-106 (1991).
- [N1] J. Neveu : *Arbres et processus de Galton-Watson*  
Ann. Inst. H. Poincaré 22, 199-207 (1986)
- [N2] J. Neveu : *Erasing a branching tree*  
Supplement to Adv. Appl. Probab. 101-108 (1986)
- [NP1] J. Neveu-J.W. Pitman : *Renewal property of the extrema and tree property of the excursion of a one-dimensional brownian motion*  
Séminaire de probabilités XXIII, Lecture Notes Math. 1372, Springer, Berlin (1989)
- [NP2] J. Neveu-J.W. Pitman : *The branching process in a brownian excursion*  
Séminaire de probabilités XXIII, Lecture Notes Math. 1372, Springer, Berlin (1989)
- [PY] J.W. Pitman-M. Yor : *A decomposition of Bessel bridges.*  
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 59, 425-457 (1982)
- [R] L.C.G. Rogers : *Williams' characterisation of the Brownian excursion law : proof and applications.*  
Séminaire de probabilités XV, Lecture Notes Math. 850, Springer, Berlin (1979)