

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PIERRE VALLOIS

## **Amplitude du mouvement Brownien et juxtaposition des excursions positives et négatives**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 26 (1992), p. 361-373

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1992\\_\\_26\\_\\_361\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__361_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# AMPLITUDE DU MOUVEMENT BROWNIEN ET JUXTAPOSITION DES EXCURSIONS POSITIVES ET NEGATIVES

Pierre VALLOIS

*Laboratoire de Probabilités , Tour 56 , 3ème étage , 4 place Jussieu , 75252 Paris Cédex 05.*

## Introduction.

1°) Il est apparu une identité en loi mettant d'une part en jeu , le processus de l'amplitude du mouvement brownien , et d'autre part , la somme de la valeur absolue du mouvement brownien et de son temps local en 0 . Le but de cet article est d'en fournir une explication probabiliste.

a) Soit  $(B_t ; t \geq 0)$  un mouvement brownien réel issu de 0. On note  $(S_t ; t \geq 0)$  et  $(I_t ; t \geq 0)$  les processus du maximum et du minimum :

$$S_t = \max_{0 \leq u \leq t} B_u , I_t = \min_{0 \leq u \leq t} B_u , t \geq 0.$$

S-I est le processus de l'amplitude de  $(B_t ; t \geq 0)$  ; ce processus a été étudié par Feller ([F]) et Imhof ([I1]) et vient de faire l'objet d'études plus récentes ([I2]) , [V3]).

Le processus S-I est croissant et continu ; désignons par  $(\theta(t) ; t \geq 0)$  son inverse continu à gauche, i.e. :

$$\theta(c) = \inf\{t \geq 0 ; S_t - I_t = c\} , c \geq 0.$$

Remarquons que , par scaling ,  $\theta(c) \stackrel{(d)}{=} c^2 \theta(1)$ .

La loi de la v.a.  $\theta(2)$  est connue ([I1], [V3]) :

$$(1) \quad \theta(2) \stackrel{(d)}{=} \xi_1 + \xi_2 ,$$

où  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont deux v.a. indépendantes, de même loi et

$$\xi_1 \stackrel{(d)}{=} \inf\{t \geq 0 ; |B_t| = 1\} .$$

b) Soit  $(L_t ; t \geq 0)$  le temps local en 0 de  $(B_t ; t \geq 0)$  . Nous introduisons trois familles de temps d'arrêt , formées respectivement de :

$$U(c) = \inf\{t \geq 0 ; |B_t| + (1/2) L_t = c\} , V(c) = \inf\{t \geq 0 ; B_t^+ + (1/2) L_t = c\} \text{ et}$$

$$W(c) = \inf\{t \geq 0 ; B_t^+ + (1/2) L_t = c \text{ ou } B_t^- + (1/2) L_t = 2c\} , \text{ où } c > 0 .$$

Par scaling :  $U(c) \stackrel{(d)}{=} c^2 U(1)$  ,  $V(c) = c^2 V(1)$  et  $W(c) = c^2 W(1)$ .

Notons pour simplifier :  $\theta = \theta(2)$  ,  $U = U(2)$ ,  $V = V(2)$  et  $W = W(1)$  .

La loi de chacune des trois v.a.  $U$  ,  $V$  et  $W$  se déduit aisément de ([JY]) .

**Théorème 1.** On a les trois identités en loi :

$$(2) \quad (i) U \stackrel{(d)}{=} \theta \quad ; \quad (ii) V \stackrel{(d)}{=} \zeta + \xi_1 \quad ; \quad (iii) W \stackrel{(d)}{=} \xi_1 \quad ,$$

où  $\zeta$  est une v.a. stable de paramètre  $1/2$  , indépendante de  $\xi_1$  .

c) L'égalité en loi (2) (i) est remarquable et semble au premier abord assez mystérieuse . Pour établir (2) (i) , nous montrons plus généralement (théorème 2) qu'en "juxtaposant" les excursions positives et négatives , la loi de  $(B_t ; 0 \leq t \leq U)$  est transformée en celle de  $(B_t ; 0 \leq t \leq \theta)$ . En particulier ,  $U$  et  $\theta$  ont même loi . En ce qui concerne (2) (ii), on "juxtapose" les excursions négatives et une partie seulement des excursions positives pour obtenir une trajectoire brownienne arrêtée au premier temps d'atteinte de 1 (théorème 3) .

Quant à (2) (iii) , la question est ouverte.

2°) Se mettent en évidence les processus  $(B_t^+ + (1/2)L_t ; t \geq 0)$  ,  $(B_t^- + (1/2)L_t ; t \geq 0)$  et  $(|B_t| + (1/2)L_t ; t \geq 0)$ . Bertoin a étudié les deux premiers processus, ([B]). On peut d'ailleurs montrer (2) (i) via l'étude de Bertoin, ce qui fournit une troisième preuve de (2) (i) !

Signalons également que Le Gall et Yor ([LY]) se sont intéressés aux processus des temps locaux de  $(|B_t| + \gamma L_t ; t \geq 0)$  , où  $\gamma$  est un réel positif donné.

3°) Introduisons plus généralement  $\mathcal{T}(h,k)$  le temps d'arrêt défini par :

$$\mathcal{T}(h,k) = \inf\{t \geq 0 ; B_t^+ = h(L_t) \text{ ou } B_t^- = k(L_t)\} \quad ,$$

où  $h$  et  $k$  sont deux fonctions boréliennes positives .

On note  $\mathcal{T}(h) = \mathcal{T}(h,h)$  .

Remarquons que d'après l'identité en loi de Lévy on a :

$$\mathcal{T}(h) \stackrel{(d)}{=} \inf\{t \geq 0 ; B_t = S_t - h(S_t)\} \quad .$$

Soit  $\Gamma$  (resp.  $\Gamma_{\text{sym}}$ ) l'ensemble des temps d'arrêt de la forme  $\mathcal{T}(h,k)$  (resp.

$\mathcal{T}(h)$ ) . La famille  $\Gamma$  a été étudiée par Jeulin et Yor ([JY]) et joue un rôle essentiel dans certaines résolutions "explicites" du problème de Skorokhod pour le mouvement brownien ([AY] , [V1])) .

Lorsque l'on choisit  $h$  et  $k$  affines , mis à part les trois cas précédents ,

on peut identifier facilement les lois des trois temps d'arrêt  $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$ , où :

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}(h_1) ; 0 \leq i \leq 2, h_0 \equiv 1, h_1(x) = x+1 \text{ et } h_2(x) = (1-x)^+.$$

Il est clair que  $\mathcal{T}_0 = \inf\{t \geq 0 ; |B_t| = 1\}$ . Afin de caractériser la loi de  $\mathcal{T}_1$  et de  $\mathcal{T}_2$ , rappelons le théorème de Pitman ([P]) :

(3) Le processus  $(|B_t| + L_t ; t \geq 0)$  (resp.  $(2S_t - B_t ; t \geq 0)$ ) est un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0.

D'après l'identité en loi de Lévy, le processus  $(|B_t| - L_t ; t \geq 0)$  un mouvement brownien issu de 0, par conséquent :

(4)  $\mathcal{T}_1$  (resp.  $\mathcal{T}_2$ ) a même loi que le premier instant où un mouvement brownien (resp. processus de Bessel de dimension 3), issu de 0, atteint le niveau 1.

## 1. Etude de la famille $\Gamma$ .

### Notations.

Nous conservons les notations de l'introduction. Soit  $T(x)$  (resp.  $T_x^* ; \tau(x)$ ) le premier instant où le processus  $(B_t ; t \geq 0)$  (resp.  $(|B_t| ; t \geq 0) ; (L_t ; t \geq 0)$ ) atteint le niveau  $x$ . Rappelons que pour tous  $x \geq 0$  et  $\lambda \geq 0$ , on a :

$$(1.1) \quad (i) \quad E[\exp - \lambda^2 T_x^* / 2] = 1 / \operatorname{ch}(\lambda x)$$

$$(ii) \quad E[\exp - \lambda^2 T(x) / 2] = E[\exp - \lambda^2 \tau(x) / 2] = \exp(-\lambda x)$$

$(R_t ; t \geq 0)$  désigne un processus de Bessel de dimension 3, issu de zéro et  $T_x(R)$  le premier instant où  $(R_t ; t \geq 0)$  atteint  $x > 0$ .

Soient  $a, b, a', b'$  quatre réels tels que  $a > 0, a' > 0$ . On note

$\delta = (a/(-b)^+) \wedge (a'/(-b')^+)$  où  $x^+$  désigne la partie positive de  $x$  ; on fait la convention  $1/0 = +\infty$ .

**Proposition 1.** Soit  $U' = \inf\{t \geq 0 ; B_t^+ \geq a + bL_t \text{ ou } B_t^- \geq a' + b'L_t\}$ . Alors :

$$(1.2) \quad E[\exp - (\lambda^2 U' / 2)] =$$

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^\delta \left\{ \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda(a+bx)} + \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda(a'+b'x)} \right\} \left( \frac{\operatorname{sh} \lambda(a+bx)}{\operatorname{sh} \lambda a} \right)^{-1/2b} \left( \frac{\operatorname{sh} \lambda(a'+b'u)}{\operatorname{sh} \lambda a'} \right)^{-1/2b'} dx.$$

### Preuve.

Nous appliquons la proposition (4.4) de [JY]), il vient :

$E[\exp(-\lambda^2 U'/2) | (B_{U'}, L_{U'})] = (\lambda B_{U'}/\text{sh}(\lambda B_{U'})) \exp f(L_{U'})$ , avec

$$f(x) = [f_1(x) - \lambda \int_0^x \{\coth(\lambda(a+bs)) + \coth(\lambda(a'+b's))\} ds] / 2,$$

$$\text{et } f_1(x) = \int_0^x \{1/(a+bu) + 1/(a'+b'u)\} du.$$

Rappelons également que  $P(B_{U'} > 0 | L_{U'} = x) = 1/[(a+bx)\{1/(a+bx) + 1/(a'+b'x)\}]$ ,

et  $P(L_{U'} \geq x) = \exp(-f_1(x)/2)$ .

Un calcul immédiat conduit à la formule (1.2).  $\square$

**Remarques.** 1°) Si  $b = 0$ ,  $\left(\frac{\text{sh } \lambda(a+bx)}{\text{sh } \lambda a}\right)^{-1/2b}$  est à remplacer par sa limite

lorsque  $b$  tend vers 0, c'est à dire  $\exp(-\lambda x \coth(\lambda a)/2)$ .

2°) Soient  $a = 1$ ,  $a' = 2$ ,  $b = b' = -1/2$  et  $\lambda \geq 0$ . Une application directe de (1.2) conduit à :

$$E(\exp - \frac{\lambda^2}{2} W) = \frac{\lambda}{\text{sh } \lambda \text{ sh } 2\lambda} \int_0^2 \text{sh}(\lambda u) du = \frac{\text{ch } 2\lambda - 1}{\text{sh } \lambda \text{ sh } 2\lambda} = \frac{1}{\text{ch } \lambda}, \quad \lambda \geq 0.$$

3°) Soient  $a = 2$ ,  $b = -1/2$  et  $b' = 0$ ; le temps d'arrêt  $V$  est la limite presque sûre de  $U'$ , lorsque  $a'$  tend vers  $+\infty$ , d'où

$$E[\exp(\lambda^2 V/2)] = e^{-\lambda}/\text{ch } \lambda, \quad \text{pour tout } \lambda \geq 0.$$

4°) Lorsque  $a = a'$  et  $b = b'$ , on a  $U' = \inf\{t \geq 0; |B_t| = a + b L_t\}$ ,

$$E[\exp(\lambda^2 U'/2)] = \lambda (\text{sh } \lambda a)^{1/b} \int_0^\delta \left(\text{sh}(\lambda(a+bx))\right)^{-1-1/b} dx.$$

De plus :

$(|b|/a) L_{U'}$  a pour loi  $\beta^{(2)}(1, 1/b)$  (resp.  $\beta(1, -1/b)$ ) lorsque  $b > 0$  (resp.

$b < 0$ ),

où  $\beta(u, v)(dx) = (1/B(u, v)) x^{u-1} (1-x)^{v-1} 1_{\{0 < x < 1\}} dx$ ,

$\beta^{(2)}(u, v)(dx) = (1/B(u, v)) x^{u-1} (1+x)^{v+u} 1_{\{x > 0\}} dx$ ,

$B(u, v) = \Gamma(u)\Gamma(v)/\Gamma(u+v)$ ,  $u > 0$  et  $v > 0$ .

En particulier,

$$E[\exp(-\lambda^2 U/2)] = 1/\text{ch}^2 \lambda, \quad \text{pour tout } \lambda \geq 0.$$

Compte tenu de (1.1), le théorème 1 est démontré.

Soit  $\delta \in ]0, +\infty]$  et  $h$  une fonction borélienne définie sur  $[0, \delta]$ , et strictement

positive. On note  $g = 1/h$  et  $G(x) = \int_0^x g(u) du$  ;  $x \geq 0$ .

Nous supposons de plus que  $G(x) < +\infty$  pour tout  $x$  de  $[0, \delta[$  et  $G(\delta-) = +\infty$  où

$$G(\delta-) = \lim_{x \rightarrow \delta} G(x) .$$

Rappelons que d'après [JY] , on a :  $\mathcal{T}(h) < +\infty$  p.s. et  $\mathcal{T}(h) < \tau(\delta)$ .

**Proposition 2.** Les deux v.a.  $\mathcal{T}(h)$  et  $\int_0^{T^*} \{1/g^2(G^{-1}(L_s))\} ds$  ont même loi.

Preuve.

Soit  $M_t = g(L_t)B_t$  ;  $t \geq 0$  . Le processus  $(M_t ; t \geq 0)$  est une martingale locale continue dont le temps local en 0 est  $(G(L_t) ; t \geq 0)$  ([Y1], théorème 1).

De plus  $M_t = \int_0^t g(L_u) dB_u$  . Par changement de temps, nous pouvons écrire :

$M_t = \beta(A(t))$  où  $(\beta(t) ; t \geq 0)$  est un mouvement brownien réel issu de 0 et

$$A(t) = \langle M \rangle_t = \int_0^t g^2(L_u) du .$$

Notons  $(\ell(t) ; t \geq 0)$  le temps local en 0 de  $(\beta_t ; t \geq 0)$  . Nous avons :

$$(1.3) \quad G(L_t) = \ell(A(t)) ; \text{ pour tout } t \geq 0 .$$

Posons pour simplifier  $T = \mathcal{T}(h)$  . On a :  $T = \inf\{t \geq 0, |M_t| = 1\}$  .

La fonction  $t \rightarrow A(t)$  est strictement croissante, il est clair que  $A(T) = \sigma$  où  $\sigma = \inf\{t \geq 0 ; |\beta(t)| = 1\}$ . D'où

$$(1.4) \quad L_T = G^{-1}(\ell(\sigma)) .$$

$$\text{Mais } \frac{dA^{-1}(t)}{dt} = 1 / \left( \frac{dA}{dt} (A^{-1}(t)) \right) = 1/g^2(L_{A^{-1}(t)}) = 1/g^2(G^{-1}(\ell(t))) .$$

$$\text{On en déduit } T = A^{-1}(\sigma) = \int_0^\sigma \{1/g^2(G^{-1}(\ell(t)))\} dt. \quad \square$$

**Remarques.** 1°) L'approche précédente est inspirée de Yor ([Y2]).

En utilisant la même approche , via le balayage , signalons un résultat voisin obtenu par ([RY], exercice (4.18) , p 248) :

$$\int_0^{T(G(a))} \{1/g^2(G^{-1}(S_u))\} 1_{\{B_u > 0\}} du \stackrel{(d)}{=} \int_0^{T(a)} 1_{\{B_u > \varphi(S_u)\}} du ,$$

où  $\varphi(x) = x - G(x)/g(x)$  .

2°) Considérons  $\mathcal{T}_+(h) = \inf\{t \geq 0 ; B_t^+ = h(L_t)\}$ . Une étude analogue montrerait :

$$(1.5) \quad \mathcal{T}_+(h) \stackrel{(d)}{=} \int_0^{T(1)} \{1/g^2(G^{-1}(L_s))\} ds .$$

3°) Soit  $\mu$  une probabilité sur  $\mathbb{R}$  possédant un moment d'ordre 1, et symétrique (i.e.  $\mu[0, x] = \mu[-x, 0]$  ;  $\forall x \geq 0$ ) . Pour simplifier nous supposons que  $\mu$  ne charge pas les points. Soit  $T = \mathcal{T}(h)$  ; on cherche une fonction  $h$ , croissante, telle que  $B_T$  ait pour loi  $\mu$  .

Compte tenu de l'égalité  $|B_T| = h(L_T)$  et de (1.4), on a :

$$P(|B_T| \geq x) = P(\ell(\sigma) \geq G(h^{-1}(x))) , \text{ pour tout } x \geq 0 .$$

Or  $\ell(\sigma)$  suit une loi exponentielle de paramètre 1 ; par conséquent,

$$(1.6) \quad \nu[x, +\infty[ = \exp - G(h^{-1}(x)) = \exp - \int_0^x (1/u) dh^{-1}(u) ,$$

où  $\nu[x, +\infty[ = P(|B_T| \geq x)$  .

On différencie (1.6) , il vient :  $d\nu(x)/\nu[x_1, +\infty[ = (1/x) dh^{-1}(x)$  . D'où :

$$(1.7) \quad h^{-1}(x) = \int_0^x \{t/(\mu] -\infty, t] + \mu[t, +\infty[)\} dt ; \quad \forall x \geq 0 .$$

Ceci fournit , lorsque  $\mu$  est symétrique et sans atomes, une expression explicite de  $h$  en fonction de  $\mu$  ; nous retrouvons les formules obtenues dans le cas général par ([V1], lemme 3.5) .

Nous donnons à présent deux applications de la proposition 2.

**Proposition 3.** On a :

$$(1.8) \quad \begin{aligned} & \text{(i)} \int_0^{T_1^*} \exp(-2L_t) dt \stackrel{(d)}{=} T_1(R) ; \quad \text{(ii)} \int_0^{T_1^*} \exp(2L_t) dt \stackrel{(d)}{=} T(1) ; \\ & \text{(iii)} V(1) \stackrel{(d)}{=} \int_0^{T(1)} \exp(-L_t) dt ; \quad \text{(iv)} U(1) \stackrel{(d)}{=} \int_0^{T_1^*} \exp(-L_t) dt . \end{aligned}$$

**Preuve.**

Soient  $h_0(x) = a+bx$  avec  $a>0$  ,  $b \neq 0$  ,  $\delta = a/(-b)^+$  ,  $g_0 = 1/h_0$  et

$$G_0(x) = \int_0^x g_0(u) du ; \quad x < \delta . \text{ Alors } G_0^{-1}(x) = (a/b)(e^{bx}-1) \text{ et}$$

$1/g_0^2(G_0^{-1}(x)) = a^2 e^{2bx}$  . Il suffit alors d'appliquer (3) , (1.5) , le théorème 1

et la proposition 2 , pour établir (1.8) .  $\square$

La proposition 3 nous incite à déterminer la loi des v.a.  $\mathcal{E}^\lambda$  et  $\mathcal{E}_+^\lambda$  où :

$$\mathcal{E}^\lambda = \int_0^{T_1^*} \exp(\lambda L_t) dt \quad , \quad \mathcal{E}_+^\lambda = \int_0^{T(1)} \exp(\lambda L_t) dt \quad \text{et } \lambda \in \mathbb{R} .$$

Plus généralement , pour toute fonction borélienne  $\varphi$  , définie sur  $\mathbb{R}_+$  et localement bornée , on introduit les deux v.a. :

$$\mathcal{E}(\varphi) = \int_0^{T_1^*} \varphi(L_t) dt \quad , \quad \mathcal{E}_+(\varphi) = \int_0^{T(1)} \varphi(L_t) dt .$$

Soit  $\psi$  la fonction définie par  $\psi(x) = \int_0^x \sqrt{\varphi(t)} dt$  ,  $x \geq 0$  .

**Proposition 4** . La v.a.  $\mathcal{E}(\varphi)$  (resp.  $\mathcal{E}_+(\varphi)$ ) a même loi que  $\mathcal{T}(\gamma)$  (resp.  $\mathcal{T}_+(\gamma)$ ), où  $\gamma(x) = \sqrt{\varphi(\psi^{-1}(x))}$  ,  $x \geq 0$  .

#### Preuve

On pose  $h(x) = \sqrt{\varphi(\psi^{-1}(x))}$   $x \geq 0$  , et  $g = 1/h$  . Alors :

$$G(x) = \int_0^x (\varphi(\psi^{-1}(t)))^{-1/2} dt = \int_0^{\psi^{-1}(x)} (\varphi(u))^{-1/2} d\psi(u) = \psi^{-1}(x) .$$

On en déduit  $1/g^2(G^{-1}(x)) = \varphi(x)$  pour tout  $x \geq 0$  . Il suffit alors d'appliquer la proposition 2. □

**Remarques** . 1°) Lorsque  $\varphi(x) = e^{\lambda x}$  , on a  $\gamma(x) = 1 + \lambda x/2$  ; donc :

(1.9)  $\mathcal{E}^\lambda$  (resp.  $\mathcal{E}_+^\lambda$ ) a même loi que  $\mathcal{T}(\gamma)$  (resp.  $\mathcal{T}_+(\gamma)$ ) .

2°) Quand  $\varphi(x) = x^\alpha$  avec  $\alpha > -2$  , on a  $\gamma(x) = (\beta x)^{\alpha/2\beta}$  , où  $\beta = 1 + \alpha/2$  ; d'où :

$$(1.10) \quad \inf\{t \geq 0 ; |B_t| = (\beta L_t)^{\alpha/2\beta}\} \stackrel{(d)}{=} \int_0^{T_1^*} (L_t)^\alpha dt ,$$

$$(1.10)_+ \quad \inf\{t \geq 0 ; B_t^* = (\beta L_t)^{\alpha/2\beta}\} \stackrel{(d)}{=} \int_0^{T(1)} (L_t)^\alpha dt .$$

## 2. Décompositions trajectorielles.

### Notations.

1°) Soient  $A_+(t) = \int_0^t 1_{\{B_u > 0\}} du$  ,  $A_-(t) = \int_0^t 1_{\{B_u < 0\}} du$  ;  $t \geq 0$ .

$\alpha_+$  (resp.  $\alpha_-$ ) désigne l'inverse continu à droite de  $A_+$  (resp.  $A_-$ ).

On introduit  $Y_+$  et  $Y_-$  les deux processus :

$$Y_+ = (Y_+(t) = (B^+ + (1/2)L)(\alpha_+(t)) ; t \geq 0) ,$$

$$Y_- = (Y_-(t) = (B^- + (1/2)L)(\alpha_-(t)) ; t \geq 0) .$$

2°) On désigne par  $\mathcal{E}^+ = \{B_U > 0\}$  ,  $\mathcal{E}^- = \{B_U < 0\}$  ,  $\zeta_+ = A_+(U)$  et  $\zeta_- = A_-(U)$ .

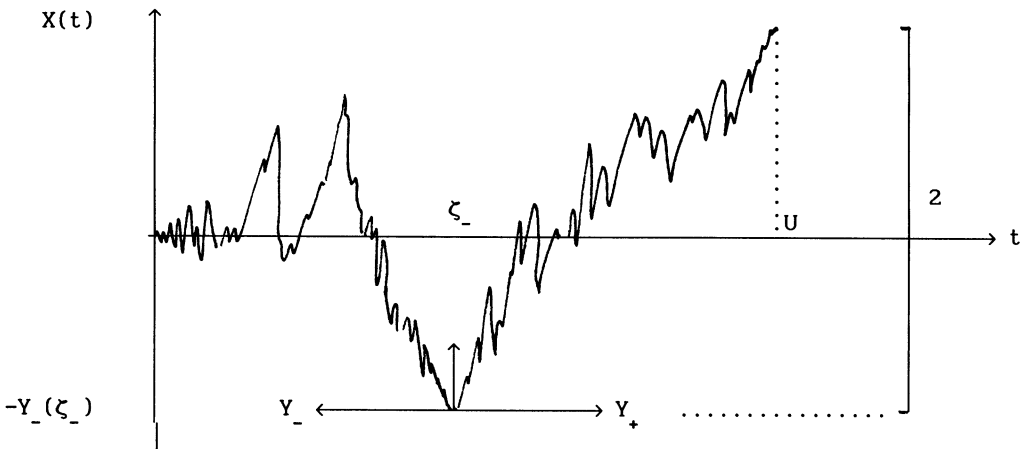
On a  $\zeta_+ + \zeta_- = U$  .

3°) On construit le processus  $X$  de la manière suivante : sur  $\mathcal{E}^+$  (resp.  $\mathcal{E}^-$ ), on pose :

$$X(t) = Y_-(\zeta_- - t) - Y_-(\zeta_-) , 0 \leq t \leq \zeta_- ; X(t) = Y_+(t - \zeta_-) - Y_-(\zeta_-) , \zeta_- \leq t \leq U .$$

$$(\text{resp. } X(t) = Y_+(\zeta_+) - Y_+(\zeta_+ - t) , 0 \leq t \leq \zeta_+ ; X(t) = Y_+(\zeta_+) - Y_-(t - \zeta_+) , \zeta_+ \leq t \leq U)$$

Représentons le cas  $\mathcal{E}^+$  par la figure :



**Théorème 2.** Le processus  $X$  a même loi que  $(B_t ; 0 \leq t \leq \theta)$  .

**Remarques.** 1°) En particulier  $U$  a même loi que  $\theta$  .

2°) Soit  $t > 0$  fixé . Bertoin ([B]) a établi que le processus  $\left( (Y_+(u), 0 \leq u \leq A_+(t)) , (Y_-(u) ; 0 \leq u \leq A_-(t)) \right)$  a même loi que  $(\vec{B} , \vec{\zeta})$  , où

$$\vec{B} = (\vec{B}(u) = B_\rho - B_{\rho+u} ; 0 \leq u \leq t - \rho) , \vec{\zeta} = (\vec{\zeta}(u) = B_\rho - B_{\rho-u} ; 0 \leq u \leq \rho) \text{ et}$$

$$\rho = \sup\{u < t ; B_u = S_t\} .$$

a) Montrons à présent , via le travail de Bertoin ([B]) , que  $U$  et  $\theta$  ont même loi .

On a  $\{U > t\} = \Lambda_+ \cap \Lambda_-$  , avec  $\Lambda_+ = \{ \max_{0 \leq u \leq t} (B^+ + (1/2)L)(u) < 2 \}$  et

$$\Lambda_- = \{ \max_{0 \leq u \leq t} (B^- + (1/2)L)(u) < 2 \}$$

Or le processus  $B^+ + (1/2)L$  (resp.  $B^- + (1/2)L$ ) est constant sur les

excursions négatives (resp. positives) de B, par conséquent :

$$\Lambda_+ = \{ \max_{0 \leq u \leq \Lambda_+(t)} Y_+(u) < 2 \} \text{ et } \Lambda_- = \{ \max_{0 \leq u \leq \Lambda_-(t)} Y_-(u) < 2 \} .$$

$$\text{Mais } \{ \max_{u \geq 0} B(u) < 2 \} = \{ B_\rho - \inf_{\rho \leq u \leq t} B_u < 2 \} , \quad \{ \max_{u \geq 0} \tilde{B}(u) < 2 \} = \{ B_\rho - I_\rho < 2 \} ,$$

$$\text{et } B_\rho = S_t . \text{ Donc } \{ U > t \} \stackrel{(d)}{=} \{ S_t - I_t < 2 \} = \{ \theta > t \} .$$

Il est clair que U et  $\theta$  ont même loi.

b) Les deux processus  $\tilde{B}$  et  $\tilde{B}$  sont intimement liées au méandre brownien .

En effet , d'après ([BY],[D]) , les processus  $(\frac{1}{\sqrt{t-\rho}} \tilde{B}(u(t-\rho)); 0 \leq u \leq 1)$  et  $(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \tilde{B}(u\rho); 0 \leq u \leq 1)$  sont deux méandres browniens indépendants , et indépendants de  $\rho$  .

### Preuve du théorème.

1°) Si Z est un processus , on note  $\bar{Z}_t = \max_{0 \leq u \leq t} Z_u$  et  $Z_-t = \min_{0 \leq u \leq t} Z_u$  , pour tout  $t \geq 0$  et  $T_x(Z)$  le premier instant où le processus Z atteint x.

D'après la formule de Tanaka, on a :  $B_t^* = -M_+(t) + (1/2)L_t$  ;  $t \geq 0$  , où

$$M_+(t) = - \int_0^t 1_{\{B_u > 0\}} dB_u .$$

D'une manière analogue  $(1/2)L = \bar{M}_-$  , où  $M_-(t) = \int_0^t 1_{\{B_u < 0\}} dB_u$  .

Soient  $\beta_+(t) = M_+(\alpha_+(t))$  et  $\beta_-(t) = M_-(\alpha_-(t))$  ,  $t \geq 0$  . Par changement de temps ,  $\beta_+$  et  $\beta_-$  sont deux mouvements browniens réels issus de 0. Les deux martingales  $M_+$  et  $M_-$  étant orthogonales, les deux mouvements browniens  $\beta_+$  et  $\beta_-$  sont indépendants.

Mais  $((1/2)L_t ; t \geq 0)$  est un processus croissant qui ne croit que sur les zéros de  $B^*$ . D'après la solution au problème de réflexion de Skorokhod , on a :

$$\bar{M}_+ = 1/2 L \text{ et}$$

$$(2.1) \quad (1/2)L(\alpha_+(t)) = \bar{\beta}_+(t) , t \geq 0 ; \quad Y_+ = 2\bar{\beta}_+ - \beta_+ ; \quad Y_- = 2\bar{\beta}_- - \beta_- .$$

Utilisons le théorème de Pitman (3) : les deux processus  $Y_+$  et  $Y_-$  sont

indépendants ,  $Y_+$  et  $Y_-$  ont même loi qu'un processus de Bessel de dimension 3 , issu de 0 .

2°) Soit  $s \geq 0$  , tel que  $B_u \geq 0$  pour tout u de  $[\tau(s_-), \tau(s)]$ . Remarquons que  $(B^+ + (1/2)L)(\tau(s)) = s/2$  et  $(B^+ + (1/2)L)(v) > s/2$  pour tout  $v > \tau(s)$ . Par conséquent  $\tau(s) = \sup\{t ; (B^+ + (1/2)L)(t) > s/2\}$ .

On en déduit , par changement de temps, que sur  $\mathcal{E}^*$ , on a :

$$(2.2) \quad (i) \quad \zeta_+ = T_2(Y_+) \quad ; \quad (ii) \quad \zeta_- = \sup\{t \geq 0 ; Y^-(t) = (1/2)L_U\}.$$

$$\text{De plus } \mathcal{E}^+ = \left\{ \max_{0 \leq s \leq U} (B^- + (1/2)L)(s) < 2 \right\} = \left\{ \max_{u \leq \zeta_-} Y^-(u) < 2 \right\}.$$

3°) Il convient d'ajouter au théorème de Pitman déjà cité :

$$L_t = \min_{u \geq t} (|B_u| + L_u) \quad (\text{resp. } S_t = \min_{u \geq t} (2S_u - B_u)) \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

$$\text{Posons } \xi = (1/2)L_U. \text{ D'après (2.1) et (2.2) (i), on a } \xi = \min_{u \geq \zeta_+} Y_+(u) =$$

$$\min_{u \geq T_2(Y_+)} Y_+(u). \text{ Par conséquent, conditionnellement à } \mathcal{E}^+, \xi \text{ est une v.a. qui}$$

est indépendante du processus  $(Y_+(s) ; 0 \leq s \leq \zeta_+)$ .

Soit  $a > 0$ . Rappelons à présent le théorème de Williams ([W]):

(2.3) i) Le processus  $\hat{R} = (\hat{R}(t) = a - B_{T(a)-t} ; 0 \leq t \leq T(a))$  a pour loi celle d'un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0, et arrêté à son dernier temps de passage en  $a$ .

ii) La v.a.  $S_{g(a)}$  suit une loi uniforme sur  $[0, a]$ , où

$$g(a) = \sup\{u < T(a) ; B_u = 0\}.$$

iii) Le processus  $(B_{u+g(a)} ; 0 \leq u \leq T(a)-g(a))$  est indépendant de  $(B_u ; 0 \leq u \leq g(a))$  et est identique en loi à  $(R_u ; 0 \leq u \leq T_a(R))$ .

iv) Soit  $\eta = \sup\{u < g(a) ; B_u = S_{g(a)}\}$ . Conditionnellement à  $S_{g(a)} = x$ , les deux processus  $(B_u ; 0 \leq u \leq \eta)$  et  $(B_{g(a)-u} ; 0 \leq u \leq g(a)-\eta)$  sont indépendants, et ont même loi que  $(B_u ; 0 \leq u \leq T(x))$ .

$$\text{Remarquons que } T(a) - g(a) = T_a(\hat{R}) \text{ et } a - S_{g(a)} = \min_{t \geq T_a(\hat{R})} \hat{R}(t).$$

On en déduit que, conditionnellement à  $\mathcal{E}^+$ ,  $\min_{u \geq T_2(Y_+)} Y_+(u)$  suit une loi

uniforme sur  $[0, 2]$ .

Par conséquent, conditionnellement à  $\mathcal{E}^+$ , les deux processus  $(Y_+(u) ; 0 \leq u \leq \zeta_+)$  et  $(Y_-(u) ; 0 \leq u \leq \zeta_-)$  sont indépendants,  $(Y_+(u) ; 0 \leq u \leq \zeta_+)$  a même loi que  $(R_t ; 0 \leq t \leq T_2(R))$ ,  $(Y_-(u) ; 0 \leq u \leq \zeta_-)$  a même loi que  $(\xi' - B_{T(\xi')-t} ; 0 \leq t \leq T(\xi'))$  conditionné à ne pas atteindre 2, où  $\xi'$  est v.a. indépendante des processus  $B$  et  $P(\xi' \in \cdot) = P(\xi \in \cdot | \mathcal{E}^+)$ .

Nous savons déjà que  $(1/2)\xi$  suit une loi  $\beta(1, 2)$  ; il est toutefois intéressant de retrouver ce résultat, via les processus  $Y_+$  et  $Y_-$ . En effet:

$$P(\mathcal{E}^+ | \xi = x) = P(x - B_t < 2 ; \forall t \in [0, T(x)]) = (2 - x)/2. \text{ D'où}$$

$$P(\xi \in dx, \mathcal{E}^+) = [(2 - x)/4] 1_{\{0 < x < 2\}} dx.$$

4°) Par construction, sur  $\mathcal{E}^+$ ,  $X(\zeta_-) = \min_{0 \leq s \leq U} X(s)$ ,  $\zeta_- = \sup \{s < U ; X(s) = X(\zeta_-)\}$  et  $(X(s + \zeta_-) - X(\zeta_-) ; 0 \leq s \leq \zeta_+) = (Y_+(s) ; 0 \leq s \leq \zeta_+)$ .  
 On applique le théorème 1 de ([V2]) avec  $\varphi(x) = 2 - x$  (le temps  $\theta$  correspond à  $U$  de ([V2])) et le 1°) du lemme 2 de ([V2]) on en déduit que ,  
 conditionnellement à  $\mathcal{E}^+$ ,  $(X(t) ; 0 \leq t \leq U)$  a même loi que  $(B_t ; 0 \leq t \leq \theta)$ , puis  
 par symétrie que ces deux processus ont même loi .  $\square$

Etudions à présent le cas du temps d'arrêt  $V = V(2)$ .

Nous notons  $\zeta_- = A_-(V)$  et  $\zeta_+ = A_+(V)$ . Il est clair que  $\zeta_+ = T_2(Y_+)$ .

Soient  $2\xi = Y_-(\zeta_-)$  et  $\hat{Y}$  le processus :  $\hat{Y}(t) = 2\xi - Y_-(\zeta_- - t) ; 0 \leq t \leq \zeta_-$ .

Remarquons que  $2\xi = (1/2)L_V$  et  $\zeta_- = T_{2\xi}(\hat{Y})$ .

On définit le processus  $Z : Z(t) = \hat{Y}(t) ; 0 \leq t \leq T_{\xi}(\hat{Y})$ ,

$Z(t) = \hat{Y}(\zeta_- + T_{\xi}(\hat{Y}) - t) - \xi ; T_{\xi}(\hat{Y}) < t \leq \zeta_-$ ,  $Z(t) = Y_+(t - \zeta_-) ; \zeta_- < t \leq \zeta_- + T_1(Y_+)$ .

### Théorème 3.

1°) La v.a.,  $A_+(V) - A_+(V(1))$  est indépendante du processus  $Z$  et

$$A_+(V) - A_+(V(1)) \stackrel{(d)}{=} T_1^*$$

2°) Le processus  $Z$  a même loi que  $(B_t ; 0 \leq t \leq T(1))$ .

Remarques. Par changement de temps,  $T_1(Y_+) = A_+(V(1))$ ; Par conséquent la durée de vie de  $Z$  est  $A_-(V) + A_+(V(1))$ ; cette v.a. est indépendante de  $A_+(V) - A_+(V(1))$  et suit une loi stable de paramètre  $1/2$ . De plus,  $V = (A_-(V) + A_+(V(1))) + (A_+(V) - A_+(V(1)))$ , est une réalisation presque sûre de l'identité en loi (2) (ii).

### Preuve du théorème.

Soit  $\xi'$  une v.a. indépendante des processus  $R$  et  $B$  et de même loi que  $\xi$ .

On montre d'une manière analogue à la preuve du théorème 2 :

(i)  $\xi$  suit une loi uniforme sur  $[0,1]$ ,

(ii) les deux processus  $(Y_+(t); 0 \leq t \leq \zeta_+)$  et  $(Y_-(t); 0 \leq t \leq \zeta_-)$  sont indépendants,

(iii)  $(Y_+(t) ; 0 \leq t \leq \zeta_+)$  a même loi que  $(R_t ; 0 \leq t \leq T_2(R))$ ,

iv)  $(Y_-(t) ; 0 \leq t \leq \zeta_-)$  a même loi que le processus  $R$  arrêté à son dernier temps de passage en  $2\xi'$ .

On applique successivement (2.3) i), ii) et iv) :  $(\hat{Y}(t) ; 0 \leq t \leq \zeta_-)$  a même loi

que  $(B_t; 0 \leq t \leq T(2\xi'))$  et  $(Z(t); 0 \leq t \leq \zeta_-)$  a même loi que  $(B_t; 0 \leq t \leq g(1))$ .  
 On utilise à nouveau (2.3) : le processus  $Z$  a même loi que  $(B_t; 0 \leq t \leq T(1))$ .  
 Mais  $A_+(V(1)) = T_1(Y_+)$  et  $A_+(V) - A_+(V(1)) = \inf\{t \geq 0; Y_+(t + T_1(Y_+)) = 2\} \stackrel{(d)}{=} T_1^*.$   $\square$

### Bibliographie.

[AY] Azéma, J.; Yor, M., : Une solution simple au problème de Skorokhod.  
*Séminaire de Probabilités XIII. Lect. Notes. Math. Vol. 721. Berlin Heidelberg New York : Springer 1979.*

[B] Bertoin, J. : Décomposition du mouvement brownien avec dérive en un minimum local par juxtaposition de ses excursions positives et négatives.  
*Séminaire de Probabilités XXV. Lect. Notes Math., Vol. 1485. Berlin Heidelberg New York : Springer.*

[BY] Biane, P. ; Yor, M : Quelques précisions sur le méandre brownien .  
*Bull. Sci. Math. 2<sup>e</sup> Série, Vol 112, p 101-109, 1988.*

[D] Denisov, I.V. : A random walk and a Wiener process near a maximum .  
*Theory of Probability and its Applications, Vol 28, n° 24, p 821-824, Soviet Journal published December 1983. English translation published 1984.*

[F] Feller, W. : The asymptotic distribution of the range of sums of independent variables. *Ann. Math. Statist. 22, 427-432. 1951.*

[I1] Imhof, J.P. : On the range of Brownian motion and its inverse process.  
*The Annals of Probability, Vol 13, N°3, 1011-1017, 1985.*

[I2] Imhof, J.P. : A construction of the Brownian path from  $BES^3$  pieces.  
*Preprint.*

[JY] Jeulin, T. ; Yor, M. : Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement brownien. *Séminaire de Probabilités XV Lect. Notes Math. Vol. 850. Berlin Heidelberg New York : Springer 1979/1980.*

- [LY] Le Gall , J.F.; Yor M. : Excursions browniennes et carrés de processus de Bessel. *Note C.R. Acad. Sc. Paris, t 303, Série I, n°3, 1986.*
- [P] Pitman , J. : *One dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process. Adv. Appl. Prob. 7, p 511-526 (1975).*
- [RY] Revuz , D. ; Yor , M. : Continuous Martingales and Brownian Motion . *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York . 1991 .*
- [V1] Vallois , P. : Le problème de Skorokhod sur  $\mathbb{R}$  : une approche avec le temps local. *Séminaire de Probabilités XVII. Lect. Notes Math., Vol 986. Berlin Heidelberg New York Springer 1982.*
- [V2] Vallois , P. : Une extension des théorèmes de Ray et Knight sur les temps locaux Browniens. *Probab. Th. Rel. Fields 88, 445-482 (1991).*
- [V3] Vallois , P. : Diffusion arrêtée au premier instant où l'amplitude atteint un niveau donné. *A paraître.*
- [W] Williams , D. : Decomposing the Brownian path. *Bull. Am. Math. Soc. 76, 871-873 (1970).*
- [Y1] Yor , M. : Sur le balayage des semi-martingales continues *Séminaire de Probabilités XIII. Lect. Notes Math., Vol 721 . Berlin Heidelberg New York Springer 1979 .*
- [Y2] Yor , M. : Problème de Skorokhod et balayage du mouvement brownien . *Manuscrit non publié .*