SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

THIERRY JEULIN
MARC YOR

Une décomposition non-canonique du drap brownien

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 322-347
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__322_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UNE DECOMPOSITION NON-CANONIQUE DU DRAP BROWNIEN

Th. Jeulin[1] *et M. Yor*[2]

(1) U.F.R. de Mathématiques, Université Paris 7, Tour 45-55, 5ème Etage - 2, Place Jussieu - 75251 PARIS CEDEX 05

(2) Laboratoire de Probabilités - Université P. et M. Curie - Tour 56 - 3ème Etage - 4, Place Jussieu - 75252 PARIS CEDEX 05

1. Introduction.

(1.1) Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel, issu de 0. Dans un travail récent [4], nous avons considéré le processus :

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \frac{ds}{s} B_s \qquad (t \geq 0). \tag{1.a}$$

qui possède les propriétés remarquables suivantes :

(α) $(\tilde{B}_t, t \geq 0)$ <u>est un mouvement brownien réel</u> ;

(β) <u>pour tout</u> $t \geq 0$, <u>la variable</u> B_t <u>est indépendante de</u> $(\tilde{B}_s, s \leq t)$.

Le second paragraphe du présent article consiste en l'étude d'un problème inverse, formulé comme suit :
on définit, sur l'espace canonique $\Omega_* = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ le processus des coordonnées $X_t(\omega) = \omega(t)$, et la filtration qu'il engendre $(\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \leq t\},\ t \geq 0)$. Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des probabilités P sur $(\Omega_*, \mathcal{F}_\infty)$ telles que :

(i) $\left(\tilde{X}_t = X_t - \int_0^t \frac{ds}{s} X_s \ ;\ t \geq 0\right)$ est un mouvement brownien réel

(on suppose ici seulement que l'intégrale $\int_0^t \frac{ds}{s} X_s$ est définie comme :

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ p.s. $\displaystyle\int_\varepsilon^t \frac{ds}{s} X_s$ c'est-à-dire que l'intégrale converge p.s. en 0, mais on ne suppose pas a priori qu'elle converge absolument).

(ii) pour tout $t \geq 0$, la variable X_t est P-indépendante de $(\tilde{X}_s, s\leq t)$.

Nous caractériserons les éléments de $\mathcal{J}$ de la façon suivante

Théorème 1 : *On désigne par* W *la mesure de Wiener sur* $(\Omega_*, \mathcal{F}_\infty)$.

(W *est la loi du mouvement brownien réel issu de* 0*).*

Soit P *une probabilité sur* $(\Omega_*, \mathcal{F}_\infty)$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $P \in \mathcal{J}$

2) P *est la loi de* $(B_t + Yt, t \geq 0)$, *avec* Y *variable aléatoire indépendante de* $(B_t, t \geq 0)$.

3) Il existe une fonction $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *W-harmonique dans l'espace-temps, c'est-à-dire que :*

$$(h(t,X_t), t \geq 0) \text{ est une } (W, \mathcal{F}_t) \text{ martingale, d'espérance } 1,$$

telle que :

$$P = W^h,$$

où W^h *est la probabilité sur* $(\Omega_*, \mathcal{F}_\infty)$ *définie par :*

$$W^h_{|\mathcal{F}_t} = h(t,X_t)\cdot W_{|\mathcal{F}_t}.$$

Ce théorème montre les liens étroits qui existent entre le mouvement brownien $\tilde{B}$ associé à B au moyen de *(1.a)*, et les fonctions h harmoniques d'espace-temps, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

(1.2) Revenons maintenant au point de départ du sous-paragraphe **(1.1)**, c'est-à-dire à la décomposition non-canonique *(1.a)* du mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ et aux propriétés (α) et (β).

Nous appelons la décomposition *(1.a)* non-canonique car, bien qu'elle permette d'écrire le mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ sous la forme :

$$(1.a') \qquad B_t = \tilde{B}_t + \int_0^t \frac{ds}{s} B_s \qquad (t \geq 0)$$

de la somme d'un mouvement brownien $(\tilde{B}_t, t \geq 0)$ et d'un processus à variation bornée, cette décomposition n'est pas la "décomposition" de la (semi)-martingale $(B_t, t \geq 0)$ dans sa filtration propre $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, car on aurait alors : $B_t = \tilde{B}_t$, d'où l'on déduirait $B \equiv 0$ (!)

Nous rappelons maintenant, toujours pour le mouvement brownien réel $(B_t, t \geq 0)$, quelques résultats obtenus en [4], qui complètent (α) et (β).

Notons encore, pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$, et définissons $\mathcal{G}_t = \sigma\{B_u - \frac{u}{t} B_t \ ; \ u \leq t\}$; rappelons que $(B_u - \frac{u}{t} B_t \ ; \ u \leq t)$ est un pont brownien de durée t. Alors :

(γ) $(\mathcal{G}_t)$ est une filtration, et c'est la filtration naturelle du mouvement brownien $(\tilde{B}_t, t \geq 0)$ défini par *(1.a)*.

En conséquence, pour tout $t \geq 0$, la tribu du passé de $\tilde{B}$, soit : $\sigma\{\tilde{B}_t, s \leq t\} \equiv \mathcal{G}_t$ est indépendante de la tribu du futur de B, soit $\sigma\{B_s, s \geq t\}$.

De plus, on a, pour tout couple (s,t) tel que : $0 < s < t$, l'égalité : $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_t$, et, bien que la tribu-germe $\bigcap_{s>0} \mathcal{F}_s$ soit triviale, l'égalité : $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t$ n'est pas satisfaite, puisque la variable B_t est indépendante de la tribu $\mathcal{G}_t$ (plus généralement, pour les problèmes de l'échange de l'intersection et du supremum de familles de tribus, voir H. von Weizsäcker [5]).

Remarquons par ailleurs, de façon tout-à-fait indépendante de ce qui précède, une relation importante qui lie les mouvements browniens B et $\tilde{B}$, à savoir :

(1.b) $$d\left(\frac{B_t}{t}\right) = \frac{d\tilde{B}_t}{t} \qquad (t > 0)$$

Cette relation nous servira beaucoup par la suite.

Nous rappelons maintenant une propriété ergodique du couple $(B,\tilde{B})$, également obtenue en [4].

Pour cela, nous nous plaçons sur l'espace canonique $\Omega_* = C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ sur lequel on considère le processus des coordonnées $(X_t(\omega) \equiv \omega(t), t \geq 0)$, et la mesure de Wiener W. On note encore $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}$.

Alors, la transformation $T : (X_t)_{t\geq 0} \longrightarrow \left(X_t - \int_0^t \frac{ds}{s} X_s \ , \ t \geq 0\right)$ est bien définie W p.s., et laisse W invariante. De plus, on a :

(δ) T <u>est fortement mélangeante</u> ; <u>en fait</u>, <u>pour tout</u> $t > 0$, <u>la tribu</u> $\bigcap_n (T^n)^{-1}(\mathcal{F}_t)$ <u>est triviale</u>.

Ce résultat découle de façon essentielle de la formule :

(1.c) $$T^n(X)_t = \int_0^t dX_s \, L_n(\log \frac{t}{s}),$$

où $(L_n, n \in \mathbb{N})$ est la suite des polynômes de Laguerre, qui forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}_+, e^{-u}du)$; rappelons la formule explicite

(1.d) $$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{k!} (-x)^k.$$

(1.3) Nous nous proposons de dégager, dans le paragraphe 3 du présent article, des propriétés analogues aux propriétés (α), (β), (γ), (δ), ci-dessus, pour le mouvement brownien réel, qui seront obtenues alors pour le drap brownien $(B_{s,t} \ ; \ s \geq 0, t \geq 0)$ supposé nul sur les axes. Nous réunissons ces résultats dans l'énoncé suivant.

<u>Théorème 2</u> : *Soit* $(B_{s,t} \ ; \ s \geq 0, t \geq 0)$ *un drap brownien. Alors :*

1) le processus

$$\tilde{B}_{s,t} = B_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} B_{u,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} B_{s,v} + \int_0^s \frac{du}{u} \int_0^t \frac{dv}{v} B_{u,v}$$

est un drap brownien ;

de plus, on a : $$B_{s,t} = st \int_s^\infty \int_t^\infty \frac{d\tilde{B}_{u,v}}{uv} .$$

2) si l'on note, pour $s,t \geq 0$, $\mathcal{G}_{s,t}$ *la tribu engendrée par le pont :*

$$\{\tilde{B}^{(s,t)}_{u,v} \equiv B_{u,v} - \frac{u}{s} B_{s,v} - \frac{v}{t} B_{u,t} + \frac{uv}{st} B_{s,t} \ ; \ u \leq s, v \leq t\},$$

on a : $$\mathcal{G}_{s,t} = \sigma\{\tilde{B}^{(s,t)}_{u,v} \ ; \ u \leq s, \ v \leq t\},$$

aux ensembles négligeables près ;

de plus, $\mathcal{G}_{s,t}$ *est indépendante de la tribu* $\sigma\{(B_{u,t} \ ; \ B_{s,v}) \ ; \ u \leq s, \ v \leq t\}$.

3) si l'on note T_2 *la transformation de* $\Omega^{(2)}_* \equiv C(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R})$ *dans lui-même définie par :*

$$T_2(X)_{s,t} \equiv X_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} X_{u,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} X_{s,v} + \int_0^s \frac{du}{u} \int_0^t \frac{dv}{v} X_{u,v} ,$$

où $(X_{s,t})$ *désigne le processus des coordonnées,*

cette transformation laisse la probabilité $W^{(2)}$ *, loi du drap brownien, invariante, et elle est fortement mélangeante ; en fait, pour tous* $s,t \geq 0$, *la tribu* $\bigcap_n (T_2^n)^{-1} (\mathcal{F}_{s,t})$ *est* $W^{(2)}$*-triviale.*

Nous présentons maintenant, pour le drap brownien, un théorème analogue au théorème 1, bien que moins complet ; ce théorème est dû, pour l'essentiel, à O. Brockhaus [1].

Soit $\mathcal{J}^{(2)}$ l'ensemble des probabilités P sur $\Omega^{(2)}_*$ telles que :

(i) $T_2(X)$ existe P-p.s., c'est-à-dire :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{X_{u,t}}{u} du, \quad \lim_{\eta \to 0} \int_\eta^1 \frac{X_{s,v}}{v} dv \quad , \text{ et}$$

$$\lim_{(\varepsilon,\eta)\to(0,0)} \int_\varepsilon^1 \int_\eta^1 \frac{X_{u,v}}{uv}\, du\, dv \quad \text{existent P-p.s.}$$

et $T_2(X)$ est un drap brownien ;

(ii) pour tous $s,t \geq 0$, la tribu $\sigma\{T_2(X)_{u,v}\ ;\ u \leq s,\ v \leq t\}$ est indépendante de $\sigma\{(X_{u,t}\ ,\ X_{s,v})\ ;\ u \leq s,\ v \leq t\}$.

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 3 : *Une probabilité* P *définie sur* $\Omega_*^{(2)}$ *appartient à* $\mathcal{J}^{(2)}$ *si, et seulement si, c'est la loi d'un processus :*

$$\{B_{s,t} + sU_t + tV_s\ ;\ s,t \geq 0\}$$

où B *est un drap brownien, indépendant du couple de processus* (U,V) *indexés par* $\mathbb{R}_+$ *, les processus* U *et* V *étant continus, nuls en* 0*, et tels que :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t}\, U_t \quad \textit{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t}\, V_t \quad \textit{existent P-p.s.}$$

Rappelons que la loi d'un processus de la forme $\{B_{s,t} + \Phi(s,t)\ ;\ s \geq 0, t \geq 0\}$, où B est un drap brownien, et Φ une fonction déterministe, est localement équivalente à celle du drap brownien si, et seulement si :

$$\Phi(s,t) = \int_0^s \int_0^t du\, dv\, \varphi(u,v),$$

avec $\varphi \in L^2([0,s] \times [0,t], du\, dv)$, pour tous $s,t > 0$.

Il résulte donc du Théorème 3 que, contrairement à ce qui se passe pour l'ensemble $\mathcal{J}$ caractérisé dans le Théorème 1, il existe de nombreux éléments $P \in \mathcal{J}^{(2)}$ qui ne sont pas localement équivalents à $W^{(2)}$.

(1.4) Enfin, dans le paragraphe 4 du présent article, en nous inspirant à la fois de notre travail pour le mouvement brownien réel [4] et de l'article de Föllmer [3], nous associons au drap brownien $(B_{s,t}\ ;\ s \geq 0, t \geq 0)$ deux autres draps browniens :

$$B^{(1)}_{s,t} = B_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u}\, B_{u,t} \qquad \text{et} \qquad B^{(2)}_{s,t} = B_{s,t} - \int_0^t \frac{dv}{v}\, B_{s,v}\ ,$$

et nous remarquons que la filtration du drap brownien $\tilde{B}$ introduit dans le Théorème 2 ci-dessus n'est autre que l'intersection des filtrations de $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$, alors que le supremum des filtrations de $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ n'est pas la filtration propre d'un drap brownien, car cette filtration ne satisfait pas la célèbre condition (F4) de Cairoli - Walsh [2].

2. Démonstration du Théorème 1.

(2.1) Soit $(\beta_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel issu de 0, défini sur un espace de probabilité. Nous commençons par décrire toutes les solutions (trajectorielles) de l'équation :

$$\textbf{(S)} \qquad X_t = \beta_t + \int_0^t \frac{ds}{s} X_s ,$$

où, comme dans l'Introduction, nous supposons seulement que $\lim_{\varepsilon \to 0} \text{p.s.} \int_\varepsilon^1 \frac{ds}{s} X_s$ existe.

Le lemme suivant est un cas très particulier des résultats de [4], nous donnons néanmoins sa démonstration pour la commodité du lecteur.

Lemme 1 : $(X_t, t \geq 0)$ *est solution de* (S) *si, et seulement si, il existe une v.a.* Y *telle que :*

$$(2.a) \qquad X_t = t \left(Y - \int_t^\infty \frac{d\beta_u}{u} \right) \qquad (t > 0).$$

Démonstration : On a, d'après la formule d'Itô, pour $0 < s < t$:

$$\frac{1}{t} X_t = \frac{1}{s} X_s + \int_s^t \frac{d\beta_u}{u} .$$

Comme $\int^\infty \frac{du}{u^2} < \infty$, le membre de droite converge p.s., lorsque $t \longrightarrow \infty$.

Il en est donc de même du membre de gauche ; posons donc :

$Y = \lim_{t\to\infty} \text{p.s. } \frac{1}{t} X_t$. On a alors :

$$\frac{1}{s} X_s = Y - \int_s^\infty \frac{d\beta_u}{u} \text{ , c'est-à-dire } (2.a). \qquad \square$$

<u>Remarque</u> : Le processus $\left(X_t^{(o)} \equiv t \int_t^\infty \frac{d\beta_u}{u} \text{ , } t > 0\right)$ est un mouvement brownien réel, qui peut être prolongé par continuité en $t = 0$ par : $X_o^{(o)} = 0$; une conséquence de la formule *(2.a)* est alors que, pour toute solution X de (S), l'intégrale $\int_0 \frac{ds}{s} X_s$ est absolument convergente. $\square$

(2.2) Soit maintenant $P \in \mathcal{J}$. Posons, de façon à faire coïncider les notations en (i) et (S) : $\beta = \tilde{X}$, et, d'autre part, définissons :

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma\{\tilde{X}_s, s \le t\} \equiv \sigma\{\beta_s, s \le t\}.$$

Pour prouver 2), il nous suffit de montrer, à l'aide de *(2.a)*, que la variable Y est indépendante de $\tilde{\mathcal{F}}_\infty \equiv \sigma\{\beta_s, s \ge 0\}$, et on déduira alors de la représentation *(2.a)* le résultat cherché, à savoir :

$$(2.b) \qquad X_t = B_t + Yt \text{ , } \qquad \text{avec } B_t = -t \int_t^\infty \frac{d\beta_u}{u} .$$

Comme nous venons de le remarquer ci-dessus, il est immédiat que $(B_t, t > 0)$ ainsi défini est un mouvement brownien.

Pour montrer l'indépendance de Y et $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$, remarquons que, par hypothèse, on a l'égalité suivante :

$$E\left[E(Z|\tilde{\mathcal{F}}_t)\varphi\left(Y - \int_t^\infty \frac{d\beta_u}{u}\right)\right] = E(Z)\ E\left(\varphi(Y - \int_t^\infty \frac{d\beta_u}{u})\right)$$

pour toute variable $Z \in L^2(\tilde{\mathcal{F}}_\infty)$, et toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, bornée.

On en déduit, en faisant tendre t vers $+\infty$:

$$E[Z\varphi(Y)] = E[Z]\ E[\varphi(Y)],$$

ce qui équivaut à l'indépendance de $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$ et Y.

(2.3) Nous montrons maintenant que 2) implique 3);

Posons $\nu(dy) = P(Y \in dy)$ et $h_y(t,x) = \exp(y\,x - \frac{y^2 t}{2})$, puis :

$$h(t,x) = \int \nu(dy)\ \exp(yx - \frac{y^2 t}{2}) \equiv \int \nu(dy)\ h_y(t,x).$$

D'après 2), et la relation d'absolue continuité entre les lois de $(B_s, s \le t)$ et $(B_s + ys, s \le t)$ (c'est-à-dire : le théorème de Girsanov, dans sa version la plus simple), on a :

$$P = \int \nu(dy)\ W^{h_y} = W^h\ ,\ \text{c'est-à-dire 3).}$$

(2.4) Nous montrons finalement que 3) implique 1). Ceci découle de ce que W appartient à l'ensemble $\mathcal{J}$ (voir l'Introduction), et du lemme élémentaire suivant.

Lemme 2 : *Soient* Q *et* Q' *deux probabilités équivalentes sur un espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{F})$. *On note* $D = \frac{dQ'}{dQ}$.

Soient $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *deux sous-tribus de* $\mathcal{F}$.

Supposons que D *soit* $\mathcal{B}$*-mesurable, et que* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *soient indépendantes sous* Q. *Alors,* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *sont indépendantes sous* Q' *, et* $Q'_{|\mathcal{A}} = Q_{|\mathcal{A}}$.

Pour nos besoins, nous appliquons le lemme 2 à $Q = W_{|\mathcal{F}_t}$, $Q' = W^h{}_{|\mathcal{F}_t}$,

$\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{F}}_t$ et $\mathcal{B} = \sigma(X_t)$. □

3. La filtration des ponts du drap brownien est une filtration brownienne.

(3.1) $(B_{s,t}\ ;\ s \ge 0, t \ge 0)$ désigne un drap brownien à valeurs réelles, nul sur les axes. On note $\mathcal{F}_{a,b} \equiv \sigma\{B_{s,t}\ ;\ s \le a, t \le b\}$ $(a,b \ge 0)$,

et $\mathcal{G}_{a,b}$ la tribu engendrée par les variables G de l'espace gaussien de B qui sont orthogonales aux variables : $\{B_{x,y}\ ;\ (x,y) \notin R_{a,b}\}$ (ici, et dans la suite, on note : $R_{a,b} = [0,a] \times [0,b]$).

Ainsi définie, la famille $(\mathcal{G}_{a,b}\ ;\ a \geq 0, b \geq 0)$ est, à l'évidence, croissante pour l'ordre partiel sur $\mathbb{R}_+^2$.

On a, pour a et b fixés, une première description de la tribu $\mathcal{G}_{a,b}$.

Proposition 1 : *Fixons* $a > 0$, *et* $b > 0$.

1) Une variable G *satisfait les propriétés ci-dessus si, et seulement si :*

$$G = \int_0^a \int_0^b g(u,v)dB_{u,v}\ ,$$

où $g \in L^2([0,a] \times [0,b], du\ dv)$, *et vérifie en outre les propriétés suivantes :*

(3.a) $$ds\ p.s.,\ \int_0^b g(s,v)dv = 0,\ et\ \ dt\ p.s.,\ \int_0^a g(u,t)du = 0.$$

2) $\mathcal{G}_{a,b}$ *est la tribu engendrée par le pont* $(\tilde{\beta}^{a,b}_{s,t}\ ;\ s \leq a, t \leq b)$, *défini par :*

$$\tilde{\beta}^{a,b}_{s,t} = B_{s,t} - \frac{s}{a} B_{a,t} - \frac{t}{b} B_{s,b} + \frac{st}{ab} B_{a,b}\ .$$

Démonstration : 1) G est une variable de l'espace gaussien de B, qui est orthogonale aux variables $\{B_{(x,y)}\ ;\ (x,y) \notin R_{a,b}\}$ si, et seulement si, elle s'écrit sous la forme : $G = \int_0^\infty \int_0^\infty g(u,v)dB_{u,v}$, avec $g \in L^2(\mathbb{R}_+^2, du\ dv)$, et, de plus : $\int_0^x \int_0^y g(u,v)du\ dv = 0$, pour tout couple $(x,y) \notin R_{a,b}$.

Cette condition équivaut à ce que : $g = g\ 1_{R_{a,b}}$, du dv p.s., et aux conditions *(3.a)*.

2) Nous commençons par remarquer que les variables $\{\tilde{\beta}^{a,b}_{s,t}\ ;\ s \leq a, t \leq b\}$ sont bien de la forme indiquée en 1).

En effet, on a : $\tilde{\beta}^{a,b}_{s,t} = \int_0^a \int_0^b g_{s,t}(u,v)dB_{u,v}$,

où $g_{s,t}(u,v) = 1_{(u\le s, v\le t)} - \frac{s}{a} 1_{(u\le a, v\le t)} - \frac{t}{b} 1_{(u\le s, v\le b)} + \frac{st}{ab} 1_{(u\le a, v\le b)}$ et on vérifie immédiatement que la fonction $g_{s,t}$ satisfait la condition *(3.a)*.

Inversement, si une variable gaussienne G vérifie les propriétés de la partie 1) de la Proposition, on montre aisément que :

$$G \equiv \int_0^a \int_0^b g(u,v)dB_{u,v} \equiv \int_0^a \int_0^b g(u,v)d\tilde{\beta}^{a,b}_{u,v} ;$$

ceci complète la démonstration de la partie 2) de la Proposition. □

(3.2) Pour construire un drap brownien $(\tilde{B}_{s,t} ; s \ge 0, t \ge 0)$ qui soit associé à $(B_{s,t} ; s \ge 0, t \ge 0)$ de manière analogue à la façon dont le mouvement brownien $(\tilde{B}_t, t \ge 0)$, défini par *(1.a)*, est associé à $(B_t, t \ge 0)$, nous présentons une construction de $\tilde{B}$ qui utilise de manière essentielle la stabilité de la loi du mouvement brownien réel par inversion du temps.

Ainsi, il existe un mouvement brownien $(\beta_t, t \ge 0)$ tel que :

$$B_t = t\, \beta_{1/t} \qquad (t > 0).$$

On peut alors réécrire la formule *(1.a)* en termes de β, il vient :

$$\tilde{B}_t = t\, \beta_{1/t} - \int_0^t du\, \beta_{1/u}$$

$$= t\, \beta_{1/t} - \int_{1/t}^{\infty} \frac{dv}{v^2} \beta_v = - \int_{1/t}^{\infty} \frac{dv}{v^2} (\beta_v - \beta_{1/t})$$

(3.b)
$$= - \int_{1/t}^{\infty} \frac{d\beta_u}{u} ,$$

par intégration par parties.

Remarque 1 : En formalisant cette suite d'égalités, nous remarquons que l'on

a :

(3.c) $$\tilde{B} = T(B), \quad \text{où} \quad T = J o I,$$

chacune des transformations I et J étant définie sur l'espace de Wiener et préservant la mesure de Wiener. Précisément, on définit :

(3.d) $$I(X)_t = t\, X_{1/t} \quad \text{et} \quad J(X)_t = -\int_{1/t}^{\infty} \frac{dX_u}{u} = t\, X_{1/t} - \int_{1/t}^{\infty} \frac{du\, X_u}{u^2}$$

($(X_u, u \geq 0)$ doit être compris ici comme une trajectoire brownienne générique).

(3.3) En nous inspirant fortement de la construction faite en **(3.1)**, nous associons un drap brownien $(\tilde{B}_{s,t}\ ;\ s \geq 0, t \geq 0)$ à un drap brownien donné $(B_{s,t}\ ;\ s \geq 0, t \geq 0)$.

Tout d'abord, il existe un drap brownien $(\beta_{h,k}\ ;\ h \geq 0, k \geq 0)$ tel que :

(3.e) $$B_{s,t} = st\, \beta_{1/s, 1/t}.$$

Définissons alors :

(3.f) $$\tilde{B}_{s,t} = \int_{1/s}^{\infty} \int_{1/t}^{\infty} \frac{d\beta_{h,k}}{hk}.$$

Il est immédiat que $\tilde{B}$ est un drap brownien.
On a maintenant, à partir de *(3.f)* :

$$\tilde{B}_{s,t} = \int_{1/s}^{\infty} \frac{du}{u^2} \int_{1/t}^{\infty} \frac{dv}{v^2} \left(\int_{1/s}^{u} \int_{1/t}^{v} d\beta_{h,k} \right)$$

(3.g) $$= \int_{1/s}^{\infty} \frac{du}{u^2} \int_{1/t}^{\infty} \frac{dv}{v^2} \left(\beta_{u,v} - \beta_{u,1/t} - \beta_{1/s,v} + \beta_{1/s,1/t} \right),$$

soit, en utilisant à nouveau *(3.e)* :

(3.h) $$\tilde{B}_{s,t} = B_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} B_{u,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} B_{s,v} + \int_0^s \frac{du}{u} \int_0^t \frac{dv}{v} B_{u,v}.$$

Remarque 2 : En utilisant le même formalisme qu'en *(3.b)* et *(3.c)*, nous remar-

quons que l'on a ainsi obtenu $\tilde{B}$ à partir de B de la façon suivante :

(3.i) $$\tilde{B} = T_2(B), \quad \text{où} \quad T_2 = J_2 o I_2 , \quad \text{avec :}$$

$$I_2 = I \otimes I \quad \text{et} \quad J_2 = J \otimes J \quad \text{(voir la formule } (3.e)\text{)}.$$

L'extension de ces définitions au drap brownien à k paramètres est maintenant évidente :

$$\tilde{B}_{(k)} = T_k(B_{(k)}) , \quad \text{où} \quad T_k = J_k o I_k ,$$

avec : $I_k = I \otimes \ldots \otimes I$ et $J_k = J \otimes J \ldots \otimes J$ (k fois).

Nous laissons au lecteur intéressé le soin d'énoncer et de démontrer les Propositions ci-dessous pour le drap brownien à k paramètres.

Nous pouvons maintenant démontrer la

Proposition 2 : *La filtration* $(\mathcal{G}_{s,t} \; ; \; s \geq 0, t \geq 0)$ *est la filtration naturelle du drap brownien* $(\tilde{B}_{s,t} \; ; \; s \geq 0, t \geq 0)$.

Démonstration : Fixons $a > 0$, $b > 0$.

1) Nous commençons par montrer que, pour tout $(s,t) \in R_{a,b}$, la variable $\tilde{B}_{s,t}$ satisfait les propriétés de l'assertion 1) de la Proposition 1, c'est-à-dire qu'elle s'écrit sous la forme :

$$\tilde{B}_{s,t} = \int_0^s \int_0^t dB_{u,v} \, \tilde{g}(u,v),$$

avec :

$$\tilde{g}(u,v) = 1_{(u \leq s, v \leq t)} - \int_0^s \frac{dh}{h} 1_{(u \leq h, v \leq t)} - \int_0^t \frac{dk}{k} 1_{(u \leq s, v \leq k)}$$
$$+ \int_0^s \frac{dh}{h} \int_0^t \frac{dk}{k} 1_{(u \leq h, v \leq t)}.$$

On vérifie ensuite immédiatement que $\tilde{g}$ satisfait les conditions *(3.a)*.

2) Inversement, il nous suffit de montrer que les variables $\{\tilde{\beta}^{a,b}_{s,t} \; ; \; s \leq a, t \leq b\}$ sont des intégrales de Wiener par rapport à

$(\tilde{B}_{u,v}\ ;\ u \le a, v \le b)$. Pour cela, nous utiliserons la formule :

$$(3.i) \qquad B_{s,t} = st \int_s^\infty \int_t^\infty \frac{d\tilde{B}_{u,v}}{uv},$$

que nous démontrerons ci-dessous. Admettant pour l'instant cette formule *(3.i)*, nous en déduisons, par définition de $\tilde{\beta}^{a,b}$:

$$\tilde{\beta}^{a,b}_{s,t} = st \int_s^a \int_t^b \frac{d\tilde{B}_{u,v}}{uv} \qquad (s \le a, t \le b),$$

ce qui donne en particulier le résultat cherché. □

Nous montrons maintenant la formule *(3.i)* en développant le membre de droite à l'aide de *(3.h)*. En effet, on a, d'après *(3.h)* :

$$(3.j) \qquad \begin{aligned} \int_s^\infty \int_t^\infty \frac{d\tilde{B}_{u,v}}{uv} &= \int_s^\infty \int_t^\infty \frac{dB_{u,v}}{uv} - \int_s^\infty \frac{du}{u^2} \left(\int_t^\infty \frac{d_v(\tilde{B}_{u,v})}{v} \right) \\ &- \int_t^\infty \frac{dv}{v^2} \left(\int_s^\infty \frac{d_u(B_{u,v})}{u} \right) + \int_s^\infty \frac{du}{u^2} \left(\int_t^\infty \frac{dv}{v^2} B_{u,v} \right). \end{aligned}$$

Nous remarquons maintenant, grâce à la formule d'Itô appliquée à $(B_{u,v}\ ;\ v \ge t)$ que l'on peut écrire la somme du second et du quatrième termes du membre de droite de *(3.j)* comme :

$$\int_s^\infty \frac{du}{u^2} \left(\frac{B_{u,t}}{t}\right) = - \int_s^\infty \frac{du}{u^2} \int_t^\infty \frac{d_v(\tilde{B}_{u,v})}{v} + \int_s^\infty \frac{du}{u^2} \int_t^\infty \frac{dv}{v^2} B_{u,v}.$$

On peut donc réécrire *(3.j)* sous la forme équivalente :

$$(3.j') \qquad \int_s^\infty \int_t^\infty \frac{d\tilde{B}_{u,v}}{uv} = \int_s^\infty \int_t^\infty \frac{dB_{u,v}}{uv} + \int_s^\infty \frac{du}{u^2} \left(\frac{B_{u,t}}{t}\right) - \int_t^\infty \frac{dv}{v^2} \int_s^\infty \frac{d_u(B_{u,t})}{u}.$$

Pour démontrer la formule *(3.i)*, il nous suffit donc maintenant de montrer que $\frac{B_{s,t}}{st}$ est égal, p.s., au membre de droite de *(3.j')*.

Or, en appliquant tout d'abord la formule d'Itô pour $(\frac{B_{u,t}}{ut}, s \le u \le s+h)$, puis, en laissant tendre h vers $+\infty$, on obtient :

$$(3.k) \qquad \frac{B_{s,t}}{st} = -\int_s^\infty \frac{d_u(B_{u,t})}{ut} + \int_s^\infty \frac{du}{u^2 t} B_{u,t}.$$

Nous décomposons maintenant le premier terme du membre de droite de *(3.k)* en utilisant cette fois la formule d'Itô pour $(B_{u,v} \; ; \; t \le v \le t+k)$, et en laissant tendre k vers $+\infty$. Il vient :

$$-\frac{B_{u,t}}{t} = \int_t^\infty \frac{d_v(B_{u,v})}{v} - \int_t^\infty \frac{B_{u,v}dv}{v^2} .$$

Lorsque l'on reporte cette identité en *(3.k)*, ceci nous donne l'égalité de $\frac{B_{s,t}}{st}$ et du membre de droite de *(3.j')*, ce qui est la relation cherchée. □

(3.4) Nous nous intéressons maintenant aux propriétés ergodiques de la transformation T_2 définie sur $\Omega_*^{(2)} \equiv C(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$ au moyen de :

$$(3.h') \qquad T_2(X)_{s,t} \equiv X_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} X_{u,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} X_{s,v} + \int_0^s \frac{du}{u} \int_0^t \frac{dv}{v} X_{u,v} \; ;$$

cette formule est bien en accord avec *(3.h)*.

T_2 laisse invariante la loi du drap brownien $(B_{s,t} \; ; \; s \ge 0, t \ge 0)$.

De même que pour l'étude à un paramètre [4], les propriétés d'ergodicité de T_2 découleront simplement de la

Proposition 3 : *On a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la formule :*

$$(3.j) \qquad T_2^n(X)_{s,t} = \int_0^s \int_0^t dX_{u,v} \, L_n(\log \tfrac{s}{u}) \, L_n(\log \tfrac{t}{v})$$

où L_n *désigne toujours le polynôme de Laguerre de degré* n.

Démonstration : Notons $X_{s,t}^{(n)} = T_2^n(X)_{s,t}$, et procédons par récurrence. Supposons donc que la formule *(3.j)* soit vraie pour n. On a alors :

$$X^{(n+1)}_{s,t} = T_2(X^{(n)})_{s,t}$$

$$= \int_0^s \int_0^t dX_{u,v}\, L_n(\log \tfrac{s}{u})\, L_n(\log \tfrac{t}{v})$$

$$- \int_0^s \frac{dh}{h} \left(\int_0^h \int_0^t dX_{u,v}\, L_n(\log \tfrac{h}{u})\, L_n(\log \tfrac{t}{v}) \right)$$

$$- \int_0^t \frac{dk}{k} \left(\int_0^s \int_0^k dX_{u,v}\, L_n(\log \tfrac{s}{u})\, L_n(\log \tfrac{k}{v}) \right)$$

$$+ \int_0^s \int_0^t \frac{dh}{h} \frac{dk}{k} \left(\int_0^h \int_0^k dX_{u,v}\, L_n(\log \tfrac{h}{u})\, L_n(\log \tfrac{k}{v}) \right)$$

$$= \int_0^s \int_0^t dX_{u,v} \{ \quad \},$$

où $\{ \quad \} = \left(L_n(\log \frac{s}{u}) - \int_u^s \frac{dh}{h} L_n(\log \frac{h}{u}) \right) \left(L_n(\log \frac{t}{v}) - \int_v^t \frac{dk}{k} L_n(\log \frac{k}{v}) \right)$

$$= (L_{n+1}(\log \tfrac{s}{u}))\, (L_{n+1}(\log \tfrac{t}{v})),$$

en vertu de la relation de récurrence des polynômes de Laguerre :

$$L_{n+1}(x) = L_n(x) - \int_0^x dz\, L_n(z). \tag{3.k}$$

(Cette relation *(3.k)* découle, par exemple, très simplement de la formule explicite *(1.d)*). □

Nous montrons maintenant la

Proposition 4 : *Pour tous* $s,t \geq 0$, *la tribu* $\bigcap_n (T_2^n)^{-1} (\mathcal{F}_{s,t})$ *est triviale (aux ensembles négligeables près).*

En conséquence, la transformation T_2 *est fortement mélangeante.*

Démonstration : Nous la ferons pour $s = t = 1$. Introduisons les notations :

$$\Phi = \bigcap_n (T_2^n)^{-1} (\mathcal{F}_{1,1}), \quad \text{et } \partial \text{ pour le bord du rectangle } R_{1,1}.$$

Remarquons tout d'abord que, par construction, $(T_2^n)^{-1} (\mathcal{F}_{1,1})$ est indépendante de $T^{n-1}(B)_\partial$. En conséquence, la tribu Φ est indépendante de la tribu engendrée par $\{T^k(B)_\partial \ ; \ k = 0,1,2,\ldots\}$. Il suffit donc de montrer que la tribu engendrée par cette suite est $\mathcal{F}_{1,1}$.

Par isomorphisme d'espaces de Hilbert, il suffit de montrer que la famille, indexée par $\mathcal{I} = \{(n,x,y) \in \mathbb{N} \times]0,1] \times]0,1]\}$, des fonctions de (h,k) :

$$L_n(\log \tfrac{1}{h})\, L_n(\log \tfrac{y}{k})\, 1_{(k\le y)} \quad \text{et} \quad 1_{(h\le x)}\, L_n(\log \tfrac{x}{h})\, L_n(\log \tfrac{1}{k})$$

est totale dans $L^2([0,1]^2 \ ; \ dh\, dk)$.

Il est bien sûr équivalent de montrer que la famille, indexée par $\mathcal{J} = \{(n,a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+\}$, des fonctions de (u,v) $(\in \mathbb{R}_+^2)$:

$$L_n(u)\, L_n(v-b)\, 1_{(v\ge b)} \quad \text{et} \quad L_n(u-a)\, 1_{(u\ge a)}\, L_n(v)$$

est totale dans $L^2(\mathbb{R}_+^2 \ ; \ e^{-(u+v)} du\, dv)$.

Notons $\mathcal{L}$ la fermeture dans ce dernier espace L^2 de l'espace vectoriel engendré par la famille indexée par $\mathcal{J}$. Il nous suffit de montrer que, pour tous $n,m \in \mathbb{N}$, la fonction $L_n(u)\, L_m(v)$ appartient à $\mathcal{L}$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$; en intégrant $L_n(u)\, L_n(v-b)\, 1_{(v\ge b)}$ par rapport à $db\, 1_{[c,\infty)}(b)$, il n'est pas difficile de montrer que la fonction $H(u,v)$ ainsi obtenue appartient à $\mathcal{L}$. Or, on a :

$$\int_c^\infty db\, L_n(v-b) 1_{(v\ge c)} = \int_0^{v-c} dx\, L_n((v-c)-x)\, 1_{(v\ge c)}$$

$$= \int_0^{v-c} dy\, L_n(y)\, 1_{(v\ge c)} = (L_n(v-c) - L_{n+1}(v-c))\, 1_{(v\ge c)} \ ,$$

d'après la relation *(3.k)*.

Ainsi, on obtient : $H(u,v) = L_n(u)\, (L_n(v-c) - L_{n+1}(v-c)) 1_{(v\ge c)}$.

En conséquence, la fonction $L_n(u)\, L_{n+1}(v-c)\, 1_{(v\ge c)}$ appartient à $\mathcal{L}$.

En itérant ce procédé, on montre que, pour tous $m \ge n$, la fonction

$L_n(u)\, L_m(v-c)\, 1_{(v\geq c)}$ appartient à $\mathcal{L}$.

En faisant de même avec la famille $L_m(u-a)\, 1_{(u\geq a)}\, L_m(v)$, on montre que $L_n(u-c)\, 1_{(u\geq c)}\, L_m(v)$ appartient à $\mathcal{L}$, pour tous $n \geq m$. Finalement, en prenant $c = 0$, on a ainsi montré que, pour tous $n,m \in \mathbb{N}$, $L_n(u)\, L_m(v)$ appartient à $\mathcal{L}$. □

(3.3) Pour la démonstration du Théorème 3, nous utiliserons le

Lemme 3 : *Soit* $\gamma : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *fonction continue telle que, pour tous* $s,t > 0$,

$$\int_0^s \frac{du}{u}\, \gamma(u,t) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^s \frac{du}{u}\, \gamma(u,t), \quad \int_0^t \frac{dv}{v}\, \gamma(s,v) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\eta\to 0} \int_\eta^t \frac{dv}{v}\, \gamma(s,v)$$

et $$\int_0^s \int_0^t \frac{du\, dv}{uv}\, \gamma(u,v) \overset{\text{def}}{=} \lim_{(\varepsilon,\eta)\to(0,0)} \int_\varepsilon^s \int_\eta^t \frac{du\, dv}{uv}\, \gamma(u,v)$$

existent.

Posons $$T_2(\gamma)_{s,t} = \gamma(s,t) - \int_0^s \frac{du}{u}\, \gamma(u,t) - \int_0^t \frac{dv}{v}\, \gamma(s,v) + \int_0^s \int_0^t \frac{du\, dv}{uv}\, \gamma(u,v).$$

On a alors : $T_2(\gamma) \equiv 0$ *si, et seulement si :*

$$\gamma(s,t) = t\, f(s) + s\, g(t),$$

où f *et* g *sont deux fonctions continues sur* $\mathbb{R}_+$ *, nulles en* 0*, telles que :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x}\, f(x) \quad \textit{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x}\, g(x) \quad \textit{existent.}$$

Démonstration du lemme :

a) Si la fonction γ s'écrit : $\gamma(s,t) = t\, f(s) + s\, g(t)$, les fonctions f et g vérifiant les conditions énoncées ci-dessus, on a :

$$\int_\varepsilon^s \frac{du}{\varepsilon}\,\gamma(u,t) = g(t)\,(s-\varepsilon) + t\int_\varepsilon^s \frac{du}{u}\,f(u)$$

$$\int_\eta^t \frac{dv}{v}\,\gamma(s,v) = f(s)\,(t-\eta) + s\int_\eta^t \frac{dv}{v}\,g(v)$$

$$\int_\varepsilon^s\int_\eta^t \frac{du\,dv}{uv}\,\gamma(u,v) = (t-\eta)\int_\varepsilon^s \frac{f(u)du}{u} + (s-\varepsilon)\int_\eta^t \frac{g(v)}{v}\,dv.$$

Ces trois intégrales convergent donc lorsque $(\varepsilon,\eta) \longrightarrow (0,0)$.

b) Inversement, on a, pour $0 < \varepsilon < s$ et $0 < \eta < t$, et toute fonction continue $\gamma : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$T_2(\gamma)_{s,t} - T_2(\gamma)_{\varepsilon,t} - T_2(\gamma)_{s,\eta} + T_2(\gamma)_{\varepsilon,\eta}$$

$$= \gamma(s,t) - \gamma(\varepsilon,t) - \gamma(s,\eta) + \gamma(\varepsilon,\eta) + \int_\varepsilon^s\int_\eta^t \frac{du\,dv}{uv}\,\gamma(u,v)$$

$$- \int_\varepsilon^s \frac{du}{u}\,(\gamma(u,t) - \gamma(u,\eta) - \int_\eta^t \frac{dv}{v}\,(\gamma(s,v) - \gamma(\varepsilon,v)).$$

Si, comme on le suppose dans la suite, $T_2(\gamma) \equiv 0$, alors, pour $0 < \eta \le t$ fixés, la fonction Γ définie pour $s \ge \varepsilon$ par :

$$\Gamma(s) = \gamma(s,t) - \gamma(s,\eta) - \int_\eta^t \frac{dv}{v}\,(\gamma(s,v) - \gamma(\varepsilon,v))$$

vérifie : $0 = \Gamma(s) - \Gamma(\varepsilon) - \displaystyle\int_\varepsilon^s \frac{\Gamma(x)}{x}\,dx + C\,\log(\frac{s}{\varepsilon})$.

où l'on a posé $C = \displaystyle\int_\eta^t \gamma(\varepsilon,v)\,\frac{dv}{v}$.

Γ est de classe C^1 sur $[\varepsilon,\infty[$, et on a : $\Gamma'(s) - \frac{1}{s}\,\Gamma(s) + \frac{C}{s} = 0$, c'est-à-dire : $\frac{d}{ds}\left(\frac{\Gamma}{s} - \frac{C}{s}\right) = 0$, soit : $\Gamma(s) = \frac{s}{\varepsilon}\,\Gamma(\varepsilon) + C(1 - \frac{s}{\varepsilon})$; on en déduit :

$$\gamma(s,t) - \gamma(s,\eta) = \frac{s}{\varepsilon}\,(\gamma(\varepsilon,t) - \gamma(\varepsilon,\eta)) + \int_\eta^t \frac{dv}{v}\,\gamma(s,v) - \frac{s}{\varepsilon}\int_\eta^t \frac{dv}{v}\,\gamma(\varepsilon,v).$$

Maintenant, $0 < \varepsilon \leq s$ étant fixés, la fonction

$$H : v(>0) \longrightarrow H(v) = \frac{\gamma(s,v)}{s} - \frac{\gamma(\varepsilon,v)}{\varepsilon}$$

vérifie : $H(t) - H(\eta) = \int_\eta^t \frac{dv}{v} H(v)$, d'où l'on déduit :

$$\frac{H(t)}{t} = \frac{H(\eta)}{\eta}$$

et : $$\frac{\gamma(s,t)}{st} = \frac{\gamma(s,\eta)}{s\eta} + \frac{\gamma(\varepsilon,t)}{\varepsilon t} - \frac{1}{\varepsilon\eta}\gamma(\varepsilon,\eta).$$

Finalement, $\frac{\gamma(s,t)}{s} - \frac{t\,\gamma(s,1)}{s} \equiv g(t)$ ne dépend que de t, et il reste à définir $f(s) = \gamma(s,1)$.

La continuité de f et g sur $\mathbb{R}_+$ découle de celle de γ sur $\mathbb{R}_+^2$; l'existence de $T_2(\gamma)$ impose :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{f(x)dx}{x} \quad \text{existe ;}$$

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{g(x)dx}{x} \quad \text{existe.} \qquad \square$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.

a) Si $X_{s,t} = B_{s,t} + s\,U_t + t\,V_s$, où B est un drap brownien, et U et V sont deux processus continus indexés par $\mathbb{R}_+$ et satisfaisant :

$$U_o = V_o = 0, \quad \text{et :} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x} U_x \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x} V_x \quad \text{existent,}$$

alors $T_2(X) \equiv T_2(B)$ est un drap brownien, et la tribu $\sigma\{T_2(X)_{u,v}\ ;\ u \leq s,\ v \leq t\}$ est indépendante de $\sigma\{(B_{u,t}\ ;\ B_{s,v})\ ;\ u \leq s, v \leq t\}$ d'après le théorème 2, et donc de $\sigma\{(X_{u,t}\ ;\ X_{s,v})\ ;\ u \leq s, v \leq t\}$ si le couple (U,V) est indépendant de B.

b) Inversement, si $P \in \mathcal{J}^{(2)}$, alors $\tilde{X} \equiv T_2(X)$ est un drap brownien, de même

que $\xi : (s,t) \longrightarrow \xi_{s,t} = st \int_s^\infty \int_t^\infty \frac{d\tilde{X}_{u,v}}{uv}$.

De plus, on a : $T_2(\xi) = \tilde{X}$, et $T_2(X-\xi) = 0$.

D'après le lemme 3, on a :

$$X_{s,t} - \xi_{s,t} = sU_t + t\,V_s \ .$$

L'indépendance de (U,V) et ξ résulte de l'hypothèse (ii) faite sur P ;

on remarque en effet que, pour $0 < s \le u$, et $0 < t \le v$,

on a : $\frac{X_{s,v}}{sv} - \frac{X_{u,t}}{ut} - \frac{X_{u,v}}{uv} \equiv \frac{X_{s,t}}{st} - \int_s^u \int_t^v \frac{d\tilde{X}_{x,y}}{xy}$ qui est P-indépendant de

$\sigma\{\xi_{a,b}\ ;\ a \le u, b \le v\}$, et converge,, quand $(u,v) \longrightarrow (\infty,\infty)$, vers :

$$\frac{U_t}{t} + \frac{V_s}{s} \ . \qquad \square$$

4. Une sous-filtration non brownienne de la filtration du drap brownien.

(4.1) En nous inspirant à la fois de notre travail pour le mouvement brownien réel [4] et de l'article de Föllmer [3], il nous a semblé naturel d'associer au drap brownien B les deux draps browniens :

(4.a) $$B^{(1)}_{s,t} \equiv B_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} B_{u,t} \quad ; \quad B^{(2)}_{s,t} \equiv B_{s,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} B_{s,v}.$$

Nous remarquons maintenant que $\tilde{B}$ peut s'écrire de deux manières différentes, en fonction de $B^{(1)}$ d'une part, et de $B^{(2)}$, d'autre part ; en effet , on a :

(4.b) $$\tilde{B}_{s,t} \equiv B^{(1)}_{s,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} B^{(1)}_{s,v} \equiv B^{(2)}_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} B^{(2)}_{u,t} \ .$$

Introduisons maintenant $\mathcal{G}^{(i)}_{a,b} \equiv \sigma\{B^{(i)}_{s,t}\ ;\ s \le a, t \le b\}$, $i = 1,2$,

et $\mathcal{H}^-_{a,b} = \mathcal{G}^{(1)}_{a,b} \cap \mathcal{G}^{(2)}_{a,b}$, puis $\mathcal{H}^+_{a,b} = \mathcal{G}^{(1)}_{a,b} \vee \mathcal{G}^{(2)}_{a,b}$.

Nous montrons maintenant la

Proposition 5 : *1)* $\mathcal{H}^+_{a,b}$ *est la tribu engendrée par les variables de l'espace gaussien* $(B_{s,t}\ ;\ s \le a, t \le b)$, *indépendantes de (ou orthogonales à) la variable* $B_{a,b}$;

2) $\mathcal{G}_{a,b} = \mathcal{H}^-_{a,b}$

Démonstration : 1) Il suffit de montrer que, si $f \in L^2(R_{a,b}\ ;\ du\ dv)$ est telle que :

$$(4.c) \qquad E\left[\left(\iint_{R_{a,b}} f(u,v)dB_{u,v}\right)B^{(i)}_{s,t}\right] = 0,$$

pour tous $s \le a$, et $t \le b$, et $i = 1,2$, alors f est constante.
Or, on peut réécrire *(4.c)*, pour $i = 1$, sous la forme :

$$\int_0^s dh \int_0^t dv\ f(h,v) - \int_0^s \frac{du}{u} \int_0^u dh \int_0^t dv\ f(h,v) = 0,$$

soit, en dérivant par rapport à s, puis par rapport à t :

$$f(s,t) = \frac{1}{s}\int_0^s dh\ f(h,t) \quad , ds\ dt\ p.s.$$

Il n'est alors pas difficile de déduire de ce résultat que f ne dépend que de t, puis, par symétrie, que f est constante.

2) Il découle immédiatement du fait que $\mathcal{G}_{a,b} \equiv \sigma\{\tilde{B}_{s,t}\ ;\ s \le a, t \le b\}$ et des formules *(4.b)* que l'on a :

$$\mathcal{G}_{a,b} \subseteq \mathcal{G}^{(1)}_{a,b} \cap \mathcal{G}^{(2)}_{a,b} \equiv \mathcal{H}^-_{a,b}\ .$$

Il nous reste à montrer l'inclusion inverse ; pour cela, nous nous appuyons sur les descriptions suivantes de $\mathcal{G}^{(1)}_{a,b}$ et $\mathcal{G}^{(2)}_{a,b}$:

$$\mathcal{G}^{(1)}_{a,b} \equiv \sigma\left\{\iint_{R_{a,b}} f(u,v)dB_{u,v}\ ,\ \text{indépendante de}\ (B_{a,t}\ ;\ t \le b)\right\}$$

$$\mathcal{G}^{(2)}_{a,b} \equiv \sigma\left\{\iint_{R_{a,b}} f(u,v)dB_{u,v}\ ,\ \text{indépendante de}\ (B_{s,b}\ ;\ s \le a)\right\}.$$

En conséquence, on a :

$$\mathcal{H}^-_{a,b} \equiv \mathcal{G}^{(1)}_{a,b} \cap \mathcal{G}^{(2)}_{a,b} = \sigma\left\{\iint_{R_{a,b}} f(u,v)dB_{u,v} \text{ , indépendante de } B_{\partial R_{a,b}}\right\}$$

et donc, par définition de $\mathcal{G}_{a,b}$:

$$\mathcal{H}^-_{a,b} = \mathcal{G}_{a,b}. \qquad \square$$

Nous avons rappelé ci-dessus que $(\mathcal{G}_{a,b}\ ;\ a \geq 0, b \geq 0)$ est la filtration naturelle d'un drap brownien ; nous allons maintenant montrer la

Proposition 6 : $(\mathcal{H}^+_{a,b}\ ;\ a \geq 0, b \geq 0)$ *n'est pas la filtration naturelle d'un drap brownien, car elle ne vérifie pas la propriété (F4), c'est-à-dire :*

$\mathcal{H}^+_{\infty,b}$ *et* $\mathcal{H}^+_{a,\infty}$ *ne sont pas conditionnellement indépendantes, sachant* $\mathcal{H}^+_{a,b}$.

Démonstration : Il découle de [4] que, pour tout t fixé, on a :

$$\sigma\{B_{s,t}\ ;\ s \geq 0\} = \sigma\{B^{(1)}_{s,t}\ ;\ s \geq 0\},$$

et donc : $\mathcal{G}^{(1)}_{\infty,b} = \sigma\{B_{s,t}\ ;\ s \geq 0,\ t \leq b\} = \mathcal{F}_{\infty,b}$,

ce qui implique que : $\mathcal{H}^+_{\infty,b} \equiv \mathcal{G}^{(1)}_{\infty,b} \vee \mathcal{G}^{(2)}_{\infty,b} = \mathcal{F}_{\infty,b}$.

Par symétrie, on a : $\mathcal{H}^+_{a,\infty} = \mathcal{F}_{a,\infty}$.

En conséquence, la variable $B_{a,b}$ est mesurable à la fois par rapport à $\mathcal{H}^+_{a,\infty}$ et $\mathcal{H}^+_{\infty,b}$, et est indépendante de $\mathcal{H}^+_{a,b}$ (d'après la proposition 5).
La propriété (F4) n'est donc pas réalisée pour la filtration
$(\mathcal{H}^+_{a,b}\ ;\ a \geq 0, b \geq 0)$. $\square$

Il serait intéressant de mieux comprendre les relations qui peuvent exister entre $(\mathcal{H}^+_{a,b})$ martingales et $(\mathcal{F}_{a,b})$ martingales ; nous continuons de travailler sur ce sujet.

(4.2) L'introduction des draps browniens $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ associés à B

au moyen de la formule *(4.a)* permet de donner une seconde démonstration de la propriété de mélange fort de la transformation T_2 (voir la Proposition 4) qui préserve la loi $W^{(2)}$ du drap brownien.

Dans ce but, introduisons les transformations θ_1 et θ_2 sur l'espace canonique $\Omega_*^{(2)} \equiv C(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$ définies par :

$$(4.d) \qquad \theta_1(X)_{s,t} \equiv X_{s,t} - \int_0^s \frac{du}{u} X_{u,t} \; ; \; \theta_2(X)_{s,t} \equiv X_{s,t} - \int_0^t \frac{dv}{v} X_{s,v} \, .$$

En accord avec les formules *(4.a)* et *(4.b)*, remarquons que θ_1 et θ_2 laissent $W^{(2)}$ invariante et que, de plus, on a :

$$(4.e) \qquad T_2 = \theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1 .$$

Une conséquence importante de *(4.e)* est que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(4.f) \qquad T_2^n = \theta_1^n \circ \theta_2^n = \theta_2^n \circ \theta_1^n .$$

Pour prouver, comme nous le faisons dans la démonstration de la Proposition 4 que, pour $s,t \geq 0$ fixés, la tribu $\bigcap_{n\geq 0} (T_2^n)^{-1} (\mathcal{F}_{s,t})$ est $W^{(2)}$-triviale, il nous suffit, en conséquence de *(4.f)*, de montrer, par exemple, que $\bigcap_{n\geq 0} (\theta_1^n)^{-1} (\mathcal{F}_{s,t})$ est $W^{(2)}$-triviale, ce que nous montrons maintenant.

Proposition 7 : *Pour* $i = 1,2$, *et tous* $s,t \geq 0$, *la tribu* $\bigcap_{n\geq 0} (\theta_i^n)^{-1}(\mathcal{F}_{s,t})$ *est* $W^{(2)}$*-triviale.*

En conséquence, les transformations θ_1 *et* θ_2 *, et a fortiori* T_2 *, sont fortement mélangeantes.*

Démonstration : Nous commençons par remarquer les variantes immédiates suivantes de la formule *(1.c)* :

$$(4.g) \qquad \theta_1^n(X)_{s,t} = \int_0^s d_u(X_{u,t}) L_n(\log \tfrac{s}{u}) \; ; \; \theta_2^n(X)_{s,t} = \int_0^t d_v(X_{s,v}) L_n(\log \tfrac{t}{v}).$$

D'autre part, nous avons déjà remarqué, dans le point 2) de la démonstration de la Proposition 5 que, pour $s,t \geq 0$ fixés, la tribu $\mathcal{G}_{s,t}^{(1)} \equiv \theta_1^{-1}(\mathcal{F}_{s,t})$ est

la tribu engendrée par les variables $B(f)_{s,t} \equiv \iint_{R_{s,t}} f(u,v)dB_{u,v}$, où $f \in L^2(R_{s,t}\ ;\ du\ dv)$, qui sont orthogonales à $(B_{s,t}\ ;\ v \le t)$.

En conséquence, la tribu $\bigcap_{n\ge 0} (\theta_1^n)^{-1}\ (\mathcal{F}_{s,t})$ est engendrée par les variables $B(f)_{s,t}$, où $f \in L^2(R_{s,t}\ ;\ du\ dv)$, qui sont orthogonales aux variables

$$\{\theta_1^n(B)_{s,v}\ ;\ n \in \mathbb{N}, v \le t\}.$$

A l'aide de la formule *(4.g)*, il nous suffit, pour démontrer que la tribu $\bigcap_{n\ge 0} (\theta_1^n)^{-1}\ (\mathcal{F}_{s,t})$ est $W^{(2)}$-triviale, de prouver que l'ensemble des fonctions de (u,v) :

$$\{L_n(\log \frac{s}{u})\ \varphi(v)\ ;\ n \in \mathbb{N},\ \varphi \in b(\mathcal{B}[0,t])\}$$

est total dans $L^2(R_{s,t}\ ;\ du\ dv)$, ce qui découle immédiatement de la totalité des polynômes de Laguerre $(L_n, n \in \mathbb{N})$ dans $L^2(\mathbb{R}_+, e^{-x}dx)$. □

Remerciements : Nous remercions vivement H. Föllmer de nous avoir communiqué un preprint de son article [3], dont une version plus complète, exposée à Paris en Janvier 1992, est en préparation.

REFERENCES

[1] **O. BROCKHAUS** : Der Zusammenhang zwischen Suffizienter Statistik und Drift beim Brownschen Blatt.
Diplomarbeit. Bonn (Feb. 1992).

[2] **R. CAIROLI, J.B. WALSH** : Stochastic integrals in the plane.
Acta Math., 134, p. 111-183 (1975).

[3] **H. FOLLMER** : Martin boundaries on Wiener space.
In : "Diffusion processes and related Problems in Analysis", volume I.
M. Pinsky, ed. p. 3-17. Birkhaüser (1990).

[4] **T. JEULIN, M. YOR** : Filtration des ponts browniens, et équations différentielles stochastiques linéaires.
Sém. Probas. XXIV, Lect. Notes in Maths. 1426, p. 227-265 (1990).

[5] **H. von WEIZSACKER** : Exchanging the order of taking suprema and countable intersection of σ-algebras.
Ann. I.H.P., **19**, *p. 91-100 (1983).*